Lehrstuhl für Informatik I
— Informationsstrukturen und
wissensbasierte Systeme —
Universität Würzburg

Prof. Dr. H. Noltemeier
Dipl. Math. S.O. Krumke

Würzburg, 1. Juli 1997

Übungen zur Vorlesung
Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen (SS97)

8. Übungsblatt

Aufgabe 29: (Potentialdifferenzen)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein endlicher Graph. Ist $\pi\colon V \to \mathbb{R}$ eine beliebige Eckenbewertung („Potential"), so induziert π eine Pfeilbewertung $\Delta_\pi\colon R \to \mathbb{R}$ („Potentialdifferenz") durch:

$$\Delta_\pi(r) := \pi(\omega(r)) - \pi(\alpha(r)).$$

Eine Funktion $\Delta\colon R \to \mathbb{R}$ nennen wir *Potentialdifferenz*, wenn es eine Eckenbewertung π mit $\Delta = \Delta_\pi$ gibt.

(a) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathfrak{D}(G)$ der Potentialdifferenzen in G ein linearer Raum ist. **(2 Punkte)**

(b) Sei β eine beliebige Strömung in G und $\Delta \in \mathfrak{D}(G)$ beliebig. Beweisen Sie, daß dann

$$\sum_{r \in R} \Delta(r) \cdot \beta(r) = 0$$

gilt (Hinweis: Benutzen Sie die Definition von Δ als Potentialdifferenz eines Potentials π und ordnen Sie die entstehenden Summen um.). **(2 Punkte)**

Aufgabe 30: (Strömungen in Bäumen und kreisfreien Graphen)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ endlich mit den Kapazitätsfunktionen $l, c\colon R \to \mathbb{R}$, wobei wie üblich $0 \le l(r) \le c(r)$ für alle $r \in R$ gelte.

(a) Sei G zusätzlich kreisfrei. Beweisen Sie, daß die einzige (bezüglich l und c) zulässige Strömung in G die Nullströmung $\beta \equiv 0$ ist. **(2 Punkte)**

(b) Sei G nun ein Baum. Zeigen Sie, daß die Menge $\mathfrak{S}(G)$ der (zulässigen und unzulässigen) Strömungen in G nur die Nullströmung enthält. **(2 Punkte)**

Aufgabe 31: (Entfernen von Pfeilen bei Strömungen)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ wie in der Definition 8.10 des Maximalströmungsproblems. Es gelte $l \equiv 0$. Sei β^* eine zulässige Strömung in G mit maximalem Strömungswert $\beta^*(r_0) > 0$.

Mit der *Entfernung* eines Pfeils $r \in R$ bezeichnen wir die Betrachtung des Partialgraphen $G_{R\setminus\{r\}}$. Zeigen Sie, daß es mindestens einen Pfeil $r \in R \setminus \{r_0\}$ gibt, dessen Entfernung den Wert einer maximalen (zulässigen) Strömung verringert.
(**2 Punkte**)

Aufgabe 32: (Strömungen mit Kapazitätsschranken auf den Ecken)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ wie in der Definition 8.10 des Maximalströmungsproblems. Es gelte $l \equiv 0$. Es seien zusätzlich auch Kapazitätsschranken $k(v) \geq 0$ für die Ecken $v \in V$ gegeben. Gesucht ist eine zulässige Strömung β in G mit

$$\beta^+(v) \leq k(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

und maximalen Strömungswert $\beta(r_0)$ (wegen $\beta^+(v) = \beta^-(v)$ gilt dann auch $\beta^-(v) \leq k(v)$ für alle $v \in V$).

Reduzieren Sie das obige Problem auf ein „gewöhnliches“ Maximalströmungsproblem wie in Definition 8.10 der Vorlesung. (**3 Punkte**)

Abgabetermin: Mittwoch, 9. Juli 1997, bis 11^{30} Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen vor der Teilbibliothek Mathematik/Informatik