Lehrstuhl für Informatik I
— Informationsstrukturen und wissensbasierte Systeme —
Universität Würzburg

Würzburg, 24. Juni 1997

Prof. Dr. H. Noltemeier
Dipl. Math. S.O. Krumke

Übungen zur Vorlesung Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen (SS97)

7. Übungsblatt

Aufgabe 25: (Bäume kürzester Wege)

In dieser Aufgabe sei $G = (V, R)$ ein endlicher Graph und $c\colon R \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion. Es sei kein Kreis negativer Länge von der Ecke $s \in V$ erreichbar.

(a) Zeigen Sie, daß ein Baum kürzester Wege bezüglich s in G existiert. **(2 Punkte)**

(b) Zeigen Sie, daß ein Baum kürzester Wege bezüglich s in G jedoch nicht notwendigerweise eindeutig sein muß. **(2 Punkte)**

Aufgabe 26: (Zuverlässigste Wege)

Sei $G = (V, R)$ ein endlicher gerichteter Graph, der ein Kommunikationsnetz modelliert: die Ecken sind Verbindungsknoten, die Pfeile sind unidirektionale Kommunikationslinks.

Für jeden Pfeil $(u, v) \in R$ ist eine Wahrscheinlichkeit $0 \leq f(u, v) \leq 1$ bekannt, mit der die Verbindung (u, v) ausfällt. Dabei nehmen wir an, daß diese Wahrscheinlichkeiten voneinander unabhängig sind. Daher ist dann für einen Weg $w = (r_1, \ldots, r_k)$ seine *Zuverlässigkeit*, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß er *nicht* ausfällt, durch

$$z(w) := \prod_{i=1}^{k} (1 - f(r_i))$$

gegeben.

Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der zu zwei gegebenen Ecken $s, t \in V$ einen *zuverlässigsten Weg* w von s nach t bestimmt, d.h. einen Weg w, für den $z(w)$ maximal ist. **(2 Punkte)**

Aufgabe 27: (Kürzeste Wege bei Einheitskosten (Breitensuche))

In dieser Aufgabe sei $G = (V, R)$ ein endlicher Graph und $s \in V$ eine Ecke. Wir betrachten das Problem, kürzeste Wege von s zu allen Ecken $v \in V$ zu bestimmen, wenn alle Pfeile $r \in R$ die Länge 1 besitzen. Dazu sei folgender Algorithmus gegeben:

Input: Ein gerichteter Graph $G = (V, R)$ in Adjazenzlistendarstellung; ein Knoten $s \in V$

```
Init(G, s)   {Initialisierung durch Algorithmus 7.1 aus der Vorlesung}
L ← {s}   {Eine Liste, die nur s enthält}
while L ≠ ∅ do
  Entferne das erste Element u aus L
  for all (u, v) ∈ R do
    if d[v] > d[u] + 1 then
      d[v] ← d[u] + 1
      π[v] ← u
      Füge v an das Ende von L an.
```

(a) Beweisen Sie, daß bei Abbruch des Algorithmus $d[v] = \delta(s, v)$ für alle $v \in V$ gilt und G_π ein Baum kürzester Wege bezüglich s ist.(Hinweis: Versuchen Sie, möglichst viele bereits bewiesene Ergebnisse aus der Vorlesung und Übung zu verwenden). **(3 Punkte)**

(b) Zeigen Sie, daß man den obigen Algorithmus so implementieren kann, daß er in Zeit $\mathcal{O}(|V| + |R|)$ läuft. **(1 Punkt)**

Aufgabe 28: (Eigenschaften von Abständen in Graphen)

In dieser Aufgabe sei $G = (V, R)$ ein endlicher Graph und $c\colon R \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion. Lemma 7.5 der Vorlesung besagt, daß

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + c(u, v) \quad \text{für alle } (u, v) \in R.$$

Der skizzierte Beweis behandelte nur den Fall, daß $\delta(s, v)$ und $\delta(s, u)$ endlich sind. Vervollständigen Sie den Beweis für den Fall, daß auch $+\infty$ und $-\infty$ als Abstände auftreten können. **(2 Punkte)**

Abgabetermin: Mittwoch, 2. Juli 1997, bis 11^{30} Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen vor der Teilbibliothek Mathematik/Informatik