Lehrstuhl für Informatik I
— Informationsstrukturen und
wissensbasierte Systeme —
Universität Würzburg

Prof. Dr. H. Noltemeier
Dipl. Math. S.O. Krumke

Würzburg, 18. Juni 1997

Übungen zur Vorlesung Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen (SS97)

6. Übungsblatt

Aufgabe 21: (Wurzelbäume in stark zusammenhängenden Graphen)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein endlicher stark zusammenhängender Graph.

(a) Sei $s \in V$ eine beliebige Ecke. Beweisen Sie, daß G einen spannenden Wurzelbaum mit Wurzel s besitzt, d.h. einen Wurzelbaum $T = (V, R', \alpha', \omega')$ mit Wurzel s und $T \sqsubseteq G$. **(2 Punkte)**

(b) Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein endlicher stark zusammenhängender Graph. Beweisen Sie, daß es einen irreduziblen Kern G_* von G gibt, dessen Pfeilmenge R_* die Ungleichung $|R_*| \leq 2(|V| - 1)$ erfüllt. (Hinweis: Verwenden Sie Teil (a) und die Tatsache, daß mit G auch G^{-1} stark zusammenhängend ist) **(3 Punkte)**

Aufgabe 22: (Satz vom grauen Weg)

Formulieren und beweisen Sie den Satz vom grauen Weg bei DFS. Er wurde in den Beweisen des Intervallsatzes (Satz 6.2) und der Klassifizierung eines Pfeiles r anhand der Farbe der Endecke $\omega(r)$ benutzt. **(3 Punkte)**

Aufgabe 23: (Eigenschaften der Tiefensuche)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein endlicher Graph, auf den der Algorithmus DFS aus der Vorlesung angewendet werde.

(a) Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung:

Lemma 6.7: *Sei r ein Pfeil im Graphen $G = (V, R, \alpha, \omega)$ und $\alpha(r) = u$ und $\omega(r) = v$. Wenn r das erste Mal durch* DFS *erforscht wird, sei v schwarz. Dann ist r eine Forward Edge, wenn $d[u] < d[v]$, und eine Cross Edge, wenn $d[u] > d[v]$.* **(3 Punkte)**

(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Sei $v \in E_G(u)$ und $d[u] < d[v]$. Dann ist v ein Nachfahre von u im DFS-Wald G_π. **(2 Punkte)**

Aufgabe 24: (Berechnung des reduzierten Graphen)

Geben Sie einen Algorithmus an, der zu einem endlichen gerichteten Graphen $G = (V, R, \alpha, \omega)$ den reduzierten Graphen $\hat{G}$ in Zeit $\mathcal{O}(|V| + |R|)$ berechnet. **(3 Punkte)**

Abgabetermin: Mittwoch, 25. Juni 1997, bis 11^{30} Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen vor der Teilbibliothek Mathematik/Informatik