Lehrstuhl für Informatik I
— Informationsstrukturen und
wissensbasierte Systeme —
Universität Würzburg

Prof. Dr. H. Noltemeier
Dipl. Math. S.O. Krumke

Würzburg, 3. Juni 1997

Übungen zur Vorlesung
Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen (SS97)

4. Übungsblatt

Aufgabe 13: (Bäume und unizyklische Graphen)

Im folgenden sei $G = (V, E, \gamma)$ ein ungerichteter Graph. Eine Kante $e \in E$ heißt *Brücke*, wenn $k(G - e) > k(G)$ gilt (vgl. Aufgabe 4). Wir nennen einen zusammenhängenden Graphen G *unizyklisch*, wenn G genau einen einfachen Kreis enthält. Beweisen Sie, daß für endliche Graphen die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. G ist unizyklisch.
2. Für eine geeignete Kante $e \in E$ ist $G - e$ ein Baum.
3. G ist zusammenhängend mit $|V| = |E|$.
4. G ist zusammenhängend und die Menge aller Kanten von G, die keine Brücken sind, bildet einen einfachen Kreis. **(6 Punkte)**

Aufgabe 14: (Minimale Spannende Bäume)

Im folgenden sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein endlicher Graph und $c\colon R \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion.

(a) Sei $A \cup B = V$ eine Partition von V und $\sigma(A, B)$ der zugehörige Schnitt. Sei $r^* \in \sigma(A, B)$ ein Pfeil mit $c(r^*) = \min\{\, c(r) : r \in \sigma(A, B) \,\}$. Beweisen oder widerlegen Sie, daß es dann einen minimalen spannenden Baum T^* von G mit $r^* \in T^*$ gibt. **(2 Punkte)**

(b) Sei wiederum $\sigma(A, B)$ ein Schnitt und T_A bzw. T_B minimale spannende Bäume von $G[A]$ bzw. $G[B]$. Beweisen oder widerlegen Sie, daß es einen minimalen spannenden Baum T^* von G mit $T_A \sqsubseteq T$ und $T_B \sqsubseteq T$ gibt. **(2 Punkte)**

Aufgabe 15: (Matroide)

Sei $\mathcal{U} = (S, \mathcal{F})$ ein Unabhängigkeitssystem und $c\colon S \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion.

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß der Greedy-Algorithmus immer eine maximale unabhängige Menge M^* mit minimalem Gewicht $c(M^*)$ findet, falls $\mathcal{U}$ nicht nur ein Unabhängigkeitssystem sondern sogar ein Matroid ist. Beweisen Sie nun die folgende Umkehrung dieses Ergebnisses aus der Vorlesung:

Sei $\mathcal{U} = (S, \mathcal{F})$ ein Unabhängigkeitssystem. Falls der Greedy-Algorithmus für *jede* Gewichtsfunktion $c\colon S \to \mathbb{R}$ eine maximale unabhängige Menge $M^* \in \mathcal{F}$ mit minimalem Gewicht $c(M^*)$ findet, dann ist $\mathcal{U}$ ein Matroid. (**3 Punkte**)

Aufgabe 16: (Wurzelbäume in gerichteten Graphen)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph. Die Ecke $s \in V$ heißt *Wurzel* von G, wenn $E_G(s) = V$, d.h. wenn alle Ecken $v \in V$ von s aus erreichbar sind. Ein *Wurzelbaum mit Wurzel* s ist ein Baum G, der eine Wurzel $s \in V$ besitzt.

Beweisen Sie, daß ein endlicher Graph $G = (V, R, \alpha, \omega)$ genau dann ein Wurzelbaum mit Wurzel s ist, wenn $E_G(s) = V$ und $g^-(s) = 0$ sowie $g^-(v) = 1$ für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt. (**4 Punkte**)

Abgabetermin: Mittwoch, 11. Juni 1997, bis 11^{30} Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen vor der Teilbibliothek Mathematik/Informatik