Lehrstuhl für Informatik I
— Informationsstrukturen und
wissensbasierte Systeme —
Universität Würzburg

Prof. Dr. H. Noltemeier
Dipl. Math. S.O. Krumke

Würzburg, 21. Mai 1997

Übungen zur Vorlesung
Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen (SS97)

2. Übungsblatt

Aufgabe 5: (Bipartite Graphen)

In dieser Aufgabe sei $G = (V, E)$ ein endlicher einfacher ungerichteter und zusammenhängender Graph. Man nennt G *bipartit*, wenn es eine Partition $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ der Eckenmenge gibt, so daß $(u, v) \in E$ impliziert, daß entweder $u \in A$ und $v \in B$ oder $u \in B$ und $v \in A$ gilt.

Beweisen Sie, daß G genau dann bipartit ist, wenn es in G keinen elementaren Kreis ungerader Länge gibt. **(3 Punkte)**

Aufgabe 6: (Zusammenhang und Artikulationspunkte)

In dieser Aufgabe sei $G = (V, E)$ ein endlicher einfacher ungerichteter und zusammenhängender Graph. Eine Ecke $v \in V$ heißt *Artikulationspunkt* von G, wenn $G[V \setminus \{v\}]$ nicht mehr zusammenhängend ist. Beweisen Sie, daß die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:

1. Die Ecke v ist ein Artikulationspunkt von G.
2. Es existieren zwei von v verschiedene Ecken x und y, so daß v Element der Spur jedes Weges von x nach y ist. **(3 Punkte)**

Aufgabe 7: (Topologische Sortierung)

In dieser Aufgabe sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein endlicher gerichteter Graph. Eine *topologische Sortierung* von G ist eine bijektive Abbildung $\sigma\colon V \to \{1, 2, \ldots, |V|\}$, mit folgender Eigenschaft:

$$\sigma(\alpha(r)) < \sigma(\omega(r)) \qquad \text{für alle } r \in R.$$

(a) Zeigen Sie, daß für G genau dann eine topologische Sortierung existiert, wenn G kreisfrei ist. **(2 Punkte)**

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gerichteten Graphen G in Adjazenzlistendarstellung in $\mathcal{O}(|V| + |R|)$ Zeit prüft, ob G kreisfrei ist. **(2 Punkte)**

Aufgabe 8: (Graphfärbungen)

Eine *k-Färbung* eines (gerichteten oder ungerichteten) Graphen G mit Eckenmenge V ist eine surjektive Abbildung $f\colon V \to \{1,\ldots,k\}$, so daß für alle adjazenten Ecken $u, v \in V$ gilt: $f(u) \neq f(v)$. Zwei Ecken dürfen also höchstens dann die gleiche Farbe erhalten, wenn sie nicht durch eine Kante verbunden sind.

(a) Sei $G = (V, R)$ ein gerichteter endlicher Graph mit maximalem Grad $\Delta := \max_{v \in V} g(v)$. Zeigen Sie, daß man G mit $\Delta + 1$ Farben färben kann. (**1 Punkt**)

(b) Sei $G = (V, R)$ wieder ein gerichteter endlicher Graph, der keinen Kreis besitzt. Sei ℓ die maximale Länge eines elementaren Weges in G. Beweisen Sie, daß man G mit $\ell + 1$ Farben färben kann. (**2 Punkte**)

Abgabetermin: Mittwoch, 28. Mai 1997, bis 11^{30} Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen vor der Teilbibliothek Mathematik/Informatik