Lehrstuhl für Informatik I
— Informationsstrukturen und
wissensbasierte Systeme —
Universität Würzburg

Prof. Dr. H. Noltemeier
Dipl. Math. S.O. Krumke

Würzburg, 13. Mai 1997

Übungen zur Vorlesung Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen (SS97)

1. Übungsblatt

Aufgabe 1: (Speicherung von Graphen)

In dieser Aufgabe sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein endlicher gerichteter Graph.

(a) Der *inverse Graph* G^{-1} zu G ist definiert durch $G^{-1} = (V, R^{-1}, \alpha', \omega')$ mit $R^{-1} := \{ r^{-1} : r \in R \}$ wobei $\alpha'(r^{-1}) = \omega(r)$ und $\omega'(r^{-1}) = \alpha(r)$. Der Graph G^{-1} entsteht aus G also dadurch, daß die Richtung aller Pfeile „umgedreht" wird.

Geben Sie sowohl für die Adjazenzmatrixspeicherung als auch für die Adjazenzlistenspeicherung von G effiziente Algorithmen an, um G^{-1} aus G zu berechnen. Bestimmen Sie die Laufzeit Ihrer Algorithmen.(**2+2 Punkte**)

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der in $\mathcal{O}(|V|)$ Zeit feststellt, ob ein einfacher Graph G in Adjazenzmatrixspeicherung eine Ecke v mit $g^+(v) = 0$ und $g^-(v) = |V| - 1$ enthält. (Hinweis: G kann höchstens *eine* solche Ecke v enthalten.) (**3 Punkte**)

Aufgabe 2: (Starker Zusammenhang)

(a) Beweisen Sie, daß die in Definition 3.10 der Vorlesung definierte Relation „stark zusammenhängend ($\sim$)" eine Äquivalenzrelation ist. (**2 Punkte**)

(b) Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter endlicher stark zusammenhängender Graph mit $|V| \geq 2$. Zeigen Sie, daß dann $|R| \geq |V|$ gilt. (**2 Punkte**)

Aufgabe 3: (Wege)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph und w ein Weg in G mit $\alpha(w) = u$ und $\omega(w) = v$. Zeigen Sie, daß es dann einen *elementaren* Weg w' in G mit $\alpha(w') = u$ und $\omega(w') = v$ gibt. (**2 Punkte**)

Aufgabe 4: (Ungerichtete Graphen)

Sei $G = (V, E, \gamma)$ ein ungerichteter endlicher Graph. Mit $k(G)$ bezeichnen wir die *Anzahl der Zusammenhangskomponenten* von G. Sei $e \in E$ eine Kante von G und $G - e := (V, E \setminus \{e\}, \gamma)$ der Graph, den man erhält, wenn man aus G die Kante e entfernt. Beweisen Sie, daß dann die Ungleichung

$$k(G) \leq k(G - e) \leq k(G) + 1$$

gilt. (**4 Punkte**)

Abgabetermin: Mittwoch, 21. Mai 1997, bis 11^{30} Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen vor der Teilbibliothek Mathematik/Informatik

Hinweise: Bis zu zwei Übungsteilnehmer dürfen gemeinsam ein Übungsblatt abgeben. Zur Teilnahme an der Klausur sind mindestens 40 Prozent der Punkte in den Übungen während des Semesters notwendig.

Die erste Übung findet am Freitag, den 23 . Mai, statt. Die Gruppeneinteilung entnehmen Sie bitte den Aushängen.