Lehrstuhl für Informatik I
— Informationsstrukturen und
wissensbasierte Systeme —
Universität Würzburg

Prof. Dr. H. Noltemeier
Dipl. Math. S.O. Krumke

Würzburg, 12. Juni 1997

Übungen zur Vorlesung
Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen (SS97)

2. Übungsblatt

Aufgabe 5: (Bipartite Graphen)

In dieser Aufgabe sei $G = (V, E)$ ein endlicher einfacher ungerichteter und zusammenhängender Graph. Man nennt G *bipartit*, wenn es eine Partition $V = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ der Eckenmenge gibt, so daß $(u, v) \in E$ impliziert, daß entweder $u \in A$ und $v \in B$ oder $u \in B$ und $v \in A$ gilt.

Beweisen Sie, daß G genau dann bipartit ist, wenn es in G keinen elementaren Kreis ungerader Länge gibt. (**3 Punkte**)

Aufgabe 6: (Zusammenhang und Artikulationspunkte)

In dieser Aufgabe sei $G = (V, E)$ ein endlicher einfacher ungerichteter und zusammenhängender Graph. Eine Ecke $v \in V$ heißt *Artikulationspunkt* von G, wenn $G[V \setminus \{v\}]$ nicht mehr zusammenhängend ist. Beweisen Sie, daß die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:

1. Die Ecke v ist ein Artikulationspunkt von G.
2. Es existieren zwei von v verschiedene Ecken x und y, so daß v Element der Spur jedes Weges von x nach y ist. (**3 Punkte**)

Aufgabe 7: (Topologische Sortierung)

In dieser Aufgabe sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein endlicher gerichteter Graph. Eine *topologische Sortierung* von G ist eine bijektive Abbildung $\sigma \colon V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$, mit folgender Eigenschaft:

$$\sigma(\alpha(r)) < \sigma(\omega(r)) \qquad \text{für alle } r \in R.$$

(a) Zeigen Sie, daß für G genau dann eine topologische Sortierung existiert, wenn G kreisfrei ist. (**2 Punkte**)

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gerichteten Graphen G in Adjazenzlistendarstellung in $\mathcal{O}(|V| + |R|)$ Zeit prüft, ob G kreisfrei ist. (**2 Punkte**)

Aufgabe 8: (Graphfärbungen)

Eine *k-Färbung* eines (gerichteten oder ungerichteten) Graphen G mit Eckenmenge V ist eine surjektive Abbildung $f\colon V \to \{1,\dots,k\}$, so daß für alle adjazenten Ecken $u, v \in V$ gilt: $f(u) \neq f(v)$. Zwei Ecken dürfen also höchstens dann die gleiche Farbe erhalten, wenn sie nicht durch eine Kante verbunden sind.

(a) Sei $G = (V, R)$ ein gerichteter endlicher Graph mit maximalem Grad $\Delta := \max_{v \in V} g(v)$. Zeigen Sie, daß man G mit $\Delta + 1$ Farben färben kann. (**1 Punkt**)

(b) Sei $G = (V, R)$ wieder ein gerichteter endlicher Graph, der keinen Kreis besitzt. Sei ℓ die maximale Länge eines elementaren Weges in G. Beweisen Sie, daß man G mit $\ell + 1$ Farben färben kann. (**2 Punkte**)

Abgabetermin: Mittwoch, 28. Mai 1997, bis 11^{30} Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen vor der Teilbibliothek Mathematik/Informatik

Lösungen:

Aufgabe 5

„⇒“ Sei $G = (V, E)$ bipartit mit der Partition $V = A \cup B$ und sei w ein elementarer Kreis in G. Wir zeigen, daß w gerade Länge haben muß.

Sei $w = [v_1, \ldots, v_k = v_1]$ und o. E. sei $v_1 \in A$. Da G bipartit ist, muß $v_2 \in B$ sein, u. s. w. Induktiv folgt, daß $v_i \in A$ für alle ungeraden i und $v_i \in B$ für alle geraden i. Wegen $v_k = v_1 \in A$ muß k ungerade sein. Also hat w gerade Länge.

„⇐“ G besitze keine elementaren Kreise ungerader Länge.

Sei $v \in V$. Da G zusammenhängend ist, gibt es von jeder Ecke in V einen Weg zu v. Daher bilden die Mengen $A = \{x \in V :$ der kürzeste Weg von v nach x hat gerade Länge$\}$ und $B = \{x \in V :$ der kürzeste Weg von v nach x hat ungerade Länge$\}$ eine Partition von V.

Wir zeigen nun, daß es in A und B keine adjazenten Ecken gibt:

Ann.: $a, a' \in A$ seien adjazent. Seien $w = [v = w_1, \ldots, w_k = a]$ und $w' = [v = w'_1, \ldots, w'_p = a']$ jeweils kürzeste Wege von v nach a und a'. Wähle i, j maximal mit $w_i = w'_j$. Da w und w' minimale Wege sind, muß $i = j$ sein. Daher haben die Teilwege $[w_i, \ldots, a]$ und $[w'_j, \ldots, a']$ entweder beide gerade, oder beide ungerade Länge.

Da a und a' adajzent sind, läßt sich damit ein Kreis $[w_i, \ldots, a, a', \ldots, w'_j = w_i]$ ungerader Länge konstruieren im Widerspruch dazu, daß G keine ungeraden Kreise besitzt.

Analog folgt, daß B keine adjazenten Ecken enthält.

Da A und B eine Partition bilden, muß jede Kante in E eine Ecke in beiden Mengen haben. $\square$

Aufgabe 6

„⇒“ Sei $v \in V$ Artikulationspunkt von G. Da $G[V \setminus \{v\}]$ nicht zusammenhängend ist, muß es zwei Ecken x und y geben, die durch keinen Weg verbunden sind.

Da G aber zusammenhängend war, muß es in G Wege von x nach y geben. Diese müssen die Ecke v enthalten.

„⇐“ Seien $x, y \in V$ zwei von v verschiedene Ecken, so daß jeder Weg zwischen x und y die Ecke v berührt.

Sei w nun ein Weg in $G[V \setminus \{v\}]$ mit $\gamma(w) = (x, y)$. Wegen $G[V \setminus \{v\}] \sqsubseteq G$ ist w auch in G ein Weg zwischen x und y, der aber v nicht enthält – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Daher gibt es in $G[V \setminus \{v\}]$ keinen Weg zwischen x und y, d.h. x und y befinden sich in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten von $G[V \setminus \{v\}]$. G ist also nach Entfernen von v nicht mehr zusammenhängend und damit ist v nach Def. ein Artikulationspunkt von G. $\square$

Aufgabe 7

(a) „⇒“ z.z. Es existiert eine topologische Sortierung des Graphen $G \quad \Rightarrow \quad G$ ist kreisfrei.

Widerspruchsannahme: Es ex. eine topologische Sortierung σ und G enthält einen Kreis $w = (r_1, r_2, \dots, r_p)$, mit $\sigma(\alpha(r_i)) < \sigma(\omega(r_i)) = \sigma(\alpha(r_{i+1})\quad i \in \{1, \dots, p-1\}$ folgt dann induktiv $\sigma(\alpha(r_1)) < \sigma(\alpha(r_p)) < \sigma(\omega(r_p)) = \sigma(\alpha(r_1))$ Widerspruch! $\square$

„$\Leftarrow$“ Beweis durch Induktion nach $|V|$. Falls $|V| = 1$, so ist die Aussage klar. Sei sie für $|V| = n$ bewiesen und $|V| = n + 1$.

Es existiert eine Ecke $v \in V$ mit $g^-(v) = 0$, sonst besäße G nach Lemma 3.7 der Vorlesung einen Kreis.

Der Graph $G[V \setminus \{v\}]$ ist kreisfrei und besitzt nach Induktionsvoraussetzung eine topologische Sortierung $\sigma \colon V \setminus \{v\} \to \{1, \dots, n\}$. Dann ist aber σ' mit $\sigma(v)' := 1$ und $\sigma'(u) := \sigma(u) + 1$ für $u \neq v$ eine topologische Sortierung von G (da $g^-(v) = 0$). $\square$

(b) Topsort

Input: Ein gerichteter Graph $G = (V, R)$ in Adjazenzlistendarstellung mit $|V| =: n$

```
1  k ← 1
2  L ← ∅    {leere Liste}
3  for all v ∈ V do
4    indeg[v] ← 0
5  for all v ∈ V do
6    for all w ∈ Adj[v] do
7      indeg[w] ← indeg[w] + 1
8  for all v ∈ V do
9    if indeg[v] = 0 then
10     füge v and L an
11 while L ≠ ∅ do
12   entferne das erste Element v von L
13   σ[v] ← k
14   k ← k + 1
15   for all w ∈ Adj[v] do
16     indeg[w] ← indeg[w] − 1
17     if indeg[w] = 0 then
18       füge w and L an
19 if k = |V| + 1 then
20   return true
21 else
22   return false
```

Die Schritte 1 bis 3 benötigen $\mathcal{O}(|V|)$ Zeit. Jeder Pfeil $r \in R$ wird in Schritt 6 und 15 höchstens einmal erfaßt. Somit ist die Komplexität des Algorithmus $\mathcal{O}(|V| + |R|)$.

Behauptung:

(i) Zu Beginn des $k$ten Durchlaufs der **while**-Schleife gilt für jedes $w \in V$:

$$\texttt{indeg}[w] = |\{\, u \in V : u \in V_G(w) \wedge \sigma[u] \text{ ist noch nicht definiert} \,\}| \tag{1}$$

(ii) Ist v der im $k$ten Durchlauf gewählte Knoten, so gilt $k > \sigma[x]$ für alle Vorgänger von v.

Induktion nach k: $k = 1$: In den Zeilen 5 bis 5 werden offenbar korrekt die Innengrade der Ecken berechnet und in `indeg` gespeichert.

$k \to k+1$: Sei v der im $k$ten Durchlauf gewählte Knoten. Dann wird $\texttt{indeg}[w]$ genau für die Nachfolger von v um eins vermindert und v numeriert. Dies zeigt, daß Gleichung (1) zu Beginn des $(k+1)$ten Durchlauf gilt.

Sei nun v der im $(k+1)$ten Durchlauf gewählte Knoten. Wir müssen zeigen, daß $k+1 > \sigma[x]$ für alle Vorgänger von v gilt. Wir haben bereits gezeigt, daß zu Beginn des $(k+1)$ten Durchlaufs $\texttt{indeg}[v]$ die Anzahl der noch nicht numerierten Vorgänger von v. Da $\texttt{indeg}[v] = 0$, sind alle Vorgänger von v bereits numeriert. ◇

Nun die Korrektheit: Gibt der Algorithmus `true` aus, so wurden $|V|$ Knoten numeriert, d.h. alle Ecken. Nach der obigen Behauptung, Teil (ii) ist σ eine topologische Sortierung, also ist G kreisfrei.

Sei umgekehrt G kreisfrei. Dann gibt es eine Ecke mit $g^-(v) = 0$. Somit ist die Liste L beim ersten Durchlauf nicht leer. Es genügt nun zu zeigen, daß L beim $k$ten Durchlauf $(1 \le k \le n)$ nicht leer ist.

Sei $k \le n$. Nach der obigen Behauptung, Teil (a) gibt zu Beginn des $k$ten Durchlaufs $\texttt{indeg}[v]$ für $v \in V$ die Anzahl der noch nicht numerierten Vorgänger an. Da $k \le n$, ist mindestens eine Ecke v_0 noch nicht numeriert.

Ist $\texttt{indeg}[v_0] > 0$, so gibt es einen noch nicht numerierten Vorgänger v_1 von v. Ist $\texttt{indeg}[v_1] = 0$, so ist $v_1 \in L$, insbesondere $L \neq \varnothing$. Ansonsten gibt es einen noch nicht numerierten Vorgänger v_2 von v_1. Da G kreisfrei ist, muß die Folge $v_0, v_1, v_2, \ldots$ mit einem v_i mit $\texttt{indeg}[v_i] = 0$ abbrechen. □

Aufgabe 8

(a) Ist der maximale Grad eines Graphen gleich Δ, dann kann jede Zusammenhangskomponente (die Richtung der Pfeile ist für diese Aufgabe unerheblich) des Graphen mit $\Delta + 1$ Farben durch einen Wellenfront-Algorithmus gefärbt werden. Die erste Ecke bekommt eine beliebige Farbe. Alle folgenden Ecken färbt man so, daß die Färbungseigenschaft nicht verletzt wird. Da die Ecke höchstens Δ viele Nachbarn hat, die zusammen nicht mehr als Δ verschiedene Farben besitzen, gibt es immer eine verbleibende Farbe, mit der die neue Ecke gefärbt werden kann.

(b) Sei $G = (V, R)$. Sei l die Länge des längsten elementaren Weges in G. Wir definieren für alle $v \in V$:

$$f(v) := \max \left\{ |w| \;\middle|\; \begin{array}{l} w \text{ ist elementarer Weg,} \\ \alpha(w) = v \end{array} \right\}$$

Behauptung: f ist eine $(l+1)$-Färbung auf G.

Beweis: Offenbar ist $f(V) \subset \{0, 1, \ldots, l\}$. Es werden also nur $l + 1$ Farben vergeben. Nachzuweisen bleibt, daß benachbarte Ecken nie dieselbe Farbe erhalten.

Seien v, v' benachbart, o. E. $(v, v') \in R$. Sei $f(v) = f(v') = k$. Seien

$$\begin{aligned} w &= (v = v_0, v_1, \ldots, v_k) \\ w' &= (v' = v'_0, v'_1, \ldots, v'_k) \end{aligned}$$

die zugeordneten elementaren Wege, notiert durch ihre Spur. Wäre v nicht in der Spur von w', so wäre

$$(v, v') \circ w'$$

ein elementarer Weg der Länge $k + 1$ von v aus im Widerspruch zur Definition. Also gilt $v = v'_j$ für ein j. Insbesondere ist v von v' durch den Weg $(v' = v'_0, v'_1, \ldots, v'_j = v)$ erreichbar. Dann ist aber $(v' = v'_0, v'_1, \ldots, v'_j = v) \circ (v, v')$ ein Kreis in G. Widerspruch. $\square$