Lehrstuhl für Informatik I
— Informationsstrukturen und
wissensbasierte Systeme —
Universität Würzburg

Prof. Dr. H. Noltemeier

Würzburg, 15. Juni 1998

Übungen zur Vorlesung
Praktische Informatik II (SS98)

4. Übungsblatt

Aufgabe 13: (Natürlicher Prioritätssuchbaum)

In der Vorlesung wurde ein Verfahren vorgestellt, das zur Speicherung von Punkten im $\mathbb{R}^2$ kein Skelett wie der statische PST, sondern den natürlichen Baum bzgl. der x-Koordinaten verwendet (sogenannter natürlicher PST, $nPST$). Dabei wurde folgende Vorgehensweise verwendet:

1) Start mit Wurzel $\frac{+\infty}{(+\infty, +\infty)}$ (sie repräsentiert die leere Punktmenge S).
2) Einfügen eines Punktes $P = (P.x, P.y)$:
   a) Suche gemäß $P.x$ einen Platz für P (also ein Blatt)
   b) Erweitere den $nPST$ um zwei Söhne zu diesem Blatt
   c) Insert(P, Wurzel($nPST$))

   Dabei gilt folgende Invariante $(*)$: Jedes Nichtblatt in $nPST$ hat 2 Söhne.

(a) Beweisen Sie, daß nach obigem Schema für jeden einzufügenden Punkt Schritt c) korrekt ausgeführt werden kann. (**3 Punkte**)

(b) Fügen Sie die Punktmenge $S := \{(4,4), (5,2), (3,5), (2,3), (7,1)\}$ in einen $nPST$ ein. Dabei sollen die Schritte einzeln dargestellt werden. (**2 Punkte**)

(c) Zeigen Sie, daß bei Gleichverteilung der Punkte in S mit $S \subset \{1, \ldots, N\} \times \{1, \ldots, N\}$, $|S| \ll N$ (d.h. die Ergebnisse des Zufallsexperiments „$|S|$-maliges Ziehen eines Punktes aus $\{1, \ldots, N\} \times \{1, \ldots, N\}$ ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge“ sind gleichwahrscheinlich) der Erwartungwert für die Höhe des $nPST$ aus $\mathcal{O}(\log |S|)$ ist.

    Gilt dies auch, wenn man nur eine Gleichverteilung der x-Koordinaten fordert? (**2+1 Punkte**)

Aufgabe 14: (Löschen im natürlichen Prioritätsbaum)

(a) Entwerfen Sie eine DELETE-Prozedur, die einen Punkt aus dem $nPST$ löscht, wobei die erwartete logarithmische Höhe des $nPST$ und die Invariante $(*)$ aus Aufgabe 13 gewahrt bleiben sollen. (**3 Punkte**)

(b) Löschen Sie mittels der von Ihnen in (a) angegebenen Prozedur den Punkt $(4, 4)$ aus dem in Aufgabe 13 (b) entwickelten $nPST$ (**2 Punkte**)

Aufgabe 15: (Bestimmung extremaler Punkte)

Sei $S = \{P_i = (x_i, y_i) | i = 1, \ldots, n\}$ eine Menge von n Punkten der reellen Ebene mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, $n \geq 3$ und $x_1 < x_2$; ferner sei $\hat{y}$ eine beliebige reelle Zahl. S sei durch einen Prioritätssuchbaum PST der Höhe h_{PST} repräsentiert.

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der in $\mathcal{O}(h_{PST})$ Zeit den folgenden Punkt $(x_*, y_*) \in S$ ermittelt – oder feststellt, daß es keinen derartigen Punkt in S gibt. Hierbei sei

$$x_* := \min\{x_i | x_1 \leq x_i \leq x_2 \text{ und es existiert ein } (x_i, y_i) \in S \text{ mit } y_i \leq \hat{y}\}$$

und y_* so klein wie möglich, so daß $(x_*, y_*) \in S$ gilt. (**3 Punkte**)

Aufgabe 16: (Zur Flächen- und Konturbestimmung von Mengen achsenparalleler Rechtecke)

Gegeben sei eine Menge $S = \{[a_i, b_i] \mid a_i < b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$ von n Intervallen der reellen Zahlengeraden und ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$.

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der die m maximalen Teilintervalle $[c_j, d_j]$ ($c_j < d_j$, $1 \leq j \leq m$) von $[a, b]$ bestimmt, deren Inneres nicht von S geschnitten wird (d.h. für die $(c_j, d_j) \cap [a_i, b_i] = \varnothing$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt).

Begründen Sie die Korrektheit und Vollständigkeit Ihres Vorschlags. (**2 Punkte**)

Welches ist der worst-case-Aufwand Ihres Verfahrens bezüglich elementarer Operationen bzw. des erforderlichen Speicherplatzes? (**2 Punkte**)

Abgabetermin: Die Bearbeitungen zu diesem Übungsblatt sind bis Montag, den 22. Juni 1998, bis 10^{00} Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen vor der Teilbibliothek Mathematik/Informatik abzugeben.

Hinweise: Maximal zwei Teilnehmer dürfen ein Übungsblatt bearbeiten.