Lehrstuhl für Informatik I
Informationsstrukturen und wissensbasierte Systeme
Universität Würzburg

Prof. Dr. H. Noltemeier
Dr. S. O. Krumke

Würzburg, den 19. November 1997

Informationsstrukturen und wissensbasierte Systeme
(WS 97/98)

2. Übung

Aufgabe 3: (Verbesserter Algorithmus für MAX k-SAT)

In Aufgabe 2 wurde ein Algorithmus für MAX k-SAT entwickelt, der zu einer Instanz $I = (X, M)$ des Problems mit $m := |M|$ Klauseln immer eine Belegung der Atomformeln in X findet, die mindestens $m/2$ Klauseln erfüllt. In dieser Aufgabe soll ein Algorithmus entwickelt werden, der eine Belegung liefert, die mindestens $(1 - 2^{-k})m$ Klauseln erfüllt.

In dieser Aufgabe lassen wir zu, daß eine Klausel außer Literalen auch die Konstanten 0 und 1 enthält. Diese Literale haben die natürliche Bedeutung: Eine Klausel, welche 1 enthält, ist unter jeder Belegung wahr.

Wir nehmen in dieser Aufgabe zur Vereinfachung an, daß es keine Klausel gibt, die sowohl eine Atomformel A_i als auch die negierte Atomformel $\neg A_i$ enthält.

Sei $I = (X, M)$ eine Instanz von k-SAT mit $X = \{A_1, \ldots, A_m\}$ und $M = \{C_1, \ldots, C_m\}$. Wir bezeichnen mit $M_{A_i=0}$ diejenige Klauselmenge, die aus M entsteht, wenn man A_i in allen Klauseln durch 0 und $\neg A_i$ durch 1 ersetzt. Analog entsteht $M_{A_i=1}$ durch Ersetzen von A_i durch 1 und $\neg A_i$ durch 0. $M_{A_1=1}$ und $M_{A_1=0}$ sind Klauselmengen über $\{A_2, \ldots, A_n\}$.

(a) Sei $E[M] = (1 - 2^{-k})m$ der Erwartungswert der Anzahl Klauseln aus M, die eine zufällige Belegung erfüllt. Zeigen Sie, daß

$$E[M] = \frac{1}{2}(E[M_{A_1=1}] + E[M_{A_1=0}])$$

gilt. **(2 Punkte)**

(b) Wir betrachten nun den folgenden Algorithmus: Zuerst berechnet der Algorithmus $E[M_{A_1=1}]$ und $E[M_{A_1=0}]$. Dann weist er A_1 den Wahrheitswert t zu, der $E[M_{A_1=t}]$ maximiert. Dieser Vorgang wird dann mit der Klauselmenge $M_{A_1=t}$ und der Atomformel A_2 fortgesetzt, wobei ein Wahrheitswert für A_2 fixiert wird. Der Algorithmus fährt so fort, bis alle Atomformeln mit Wahrheitswerten belegt sind.

Beweisen Sie, daß die vom Algorithmus bei Abbruch gelieferte Belegung mindestens $(1 - 2^{-k})m$ Klauseln aus M erfüllt. **(4 Punkte)**

Aufgabe 4: (Hillclimbing und minimale aufspannende Bäume)

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher ungerichteter und zusammenhängender Graph und $w\colon E \to \mathbb{R}$ eine Kantengewichtsfunktion. In dieser Aufgabe soll Hillclimbing benutzt werden, um in G eine minimalen aufspannenden Baum mit minimalem Gewicht zu finden.

Ein klassisches Verfahren zur Bestimmung eines minimalen aufspannenden Baumes ist das *Greedy-Verfahren* bzw. der *Algorithmus von Kruskal*. Dieses Verfahren sortiert die Kanten aus E aufsteigend bezüglich ihres Gewichtes. Der Algorithmus startet mit der leeren Kantenmenge $T := \varnothing$. Dann betrachtet er die Kanten aus E in der aufsteigend sortierten Reihenfolge (jede Kante einmal). Er fügt eine Kante zu T hinzu, wenn sie keinen Kreis in T erzeugt. Man kann zeigen, daß dieser Algorithmus immer einen minimalen aufspannenden Baum liefert. Sie dürfen diese Eigenschaft in dieser Aufgabe ohne Beweis benutzen.

Als Zustandsmenge Z für das Hillclimbing-Verfahren wählen wir

$$Z := \{\, T : T \text{ ist aufspannender Baum von } G \,\}.$$

Für einen Zustand $z = T$ besteht die Menge seiner Nachfolger aus alle denjenigen aufspannenden Bäumen T', die durch Tausch einer Kante aus T entstehen, d.h. für die es $e \in T$ und $e' \notin T$ gibt, so daß $T' = (T \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ gilt.

Die Bewertung $\varphi(z)$ eines Zustandes $z = T$ ist das Gewicht des Baumes T. Der Hillclimbing-Algorithmus werde so modifiziert, daß er vom aktuellen Zustand z nur dann in einen Folgezustand $z' \in N(z)$ übergeht, wenn $\varphi(z') < \varphi(z)$ gilt.

(a) Zeigen Sie, daß der Hillclimbing-Algorithmus nach endlich vielen Schritten terminiert. Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Anzahl der Zustandsübergänge an. **(2 Punkte)**

(b) Beweisen Sie, daß der bei Abbruch des Hillclimbing-Algorithmus aktuelle Zustand $z = T$ ein minimaler aufspannender Baum von G ist.

(Hinweis: Benutzen Sie die Korrektheit des Algorithmus von Kruskal.) **(3 Punkte)**

Aufgabe 5: (Traveling Salesperson Problem (TSP))

Wir betrachten das Euklidische Traveling Salesperson Problem aus der Vorlesung. Gegeben ist eine Menge $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$ von Punkten in der Euklidischen Ebene. Wir nehmen zur Vereinfachung der Aufgabe an, daß nicht drei Punkte aus S auf einer Geraden liegen.

Gesucht ist eine kürzeste Tour, die jeden Punkt genau einmal besucht, d.h. eine Permutation σ der Zahlen $\{1, \ldots, n\}$, so daß

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_2(S_{\sigma(i)}, S_{\sigma(i+1)}) + d_2(S_{\sigma(n)}, S_{\sigma(1)})$$

minimiert wird. Hierbei ist d_2 die *Euklidische Metrik*. Der einfachen Notation halber nennen wir auch die entsprechende Folge $(S_{\sigma(1)}, \ldots, S_{\sigma(n)})$ eine Tour und bezeichnen sie ebenfalls mit σ.

(a) Wir nennen eine Tour σ *sich kreuzend*, wenn es $1 \leq i < j \leq n$ gibt, so daß sich die Strecken $\overline{S_{\sigma(i)}S_{\sigma(i+1)}}$ und $\overline{S_{\sigma(j)}S_{\sigma(j+1)}}$ in einem inneren Punkt der Strecken schneiden (wir setzen dabei $\sigma(n+1) := \sigma(1)$). Wenn σ nicht sich kreuzend ist, so heißt σ *kreuzungsfrei.*

Beweisen Sie, daß jede optimale Tour kreuzungsfrei ist. **(2 Punkte)**

(b) Sei opt die Länge einer kürzesten Tour. In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, daß ein minimaler aufspannender Baum T im vollständigen Graphen G mit Eckenmenge S und euklidischen Kantengewichten nicht schwerer ist als opt.

Der *Grad* einer Ecke v in einem Graphen G ist die Anzahl der zu v inzidenten Kanten in G. Ein *Matching* in einem Graphen $H = (V, E)$ ist eine Teilmenge $M \subseteq E$ der Kanten, so daß keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Endpunkt besitzen. Ein Matching heißt *perfekt*, wenn jede Ecke aus V Endpunkt einer Kante aus M ist.

Sei D die Menge derjenigen Ecken aus T, die ungeraden Grad besitzen. Im vollständigen Graphen H mit Eckenmenge D und euklidischen Kantengewichten sei M^* ein perfektes Matching mit minimalem Gewicht (Ein solches Matching kann durch klassische Methoden effizient bestimmt werden). Beweisen Sie, daß das Gewicht des Matchings M^* höchstens $\mathsf{opt}/2$ ist. **(2 Punkte)**

(c) Der Satz von Euler besagt, daß es in einem endlichen Graphen H, in dem jede Ecke geraden Grad besitzt, einen *Eulerschen* Kreis gibt, d.h. einen Kreis, der jede Kante genau einmal durchläuft. In diesem Fall heißt H dann auch *Eulersch.*

Sei H der Graph mit Eckenmenge S und allen Kanten aus T und M^*. Zeigen Sie, daß H Eulersch ist. **(1 Punkt)**

(d) Sei K ein Eulerscher Kreis im Graphen H aus (c) (Ein solcher Kreis kann ebenfalls durch bekannte Methoden effizient gefunden werden). Zeigen Sie, wie man aus K effizient eine Tour σ konstruieren kann, die Länge höchstens $3/2 \cdot \mathrm{OPT}$ besitzt. **(3 Punkte)**

Aufgabe 5: (A^*-Algorithmus)

Sei V eine Zustandsmenge mit Nachbarschaftsbeziehungen $N(v)$ $(v \in V)$. Implizit wird dadurch der gerichtete Graph $G = (V, R)$ mit $R = \{\, (v, w) : w \in N(v) \,\}$ definiert. Es sei $k\colon R \to \mathbb{R}$ eine Kantenbewertung. Gegeben sei ferner eine Startmenge $S \subseteq V$ und eine ausgezeichnete Menge $F \subseteq V$, die sogenannte „Zielmenge“.

(a) Finden Sie ein Beispiel eines endlichen Graphen, wo für $\mathrm{OPT} := \inf\{\, h^*(s) : s \in S \,\}$ gilt: $\mathrm{OPT} = -\infty$. **(1 Punkt)**

(b) Geben Sie ein Beispiel eines Graphen an, bei dem zwar $-\infty < \mathrm{OPT} < +\infty$ gilt, dennoch aber kein kostenminimaler Weg von der Startmenge S in die Zielmenge F existiert. **(1 Punkt)**

Abgabetermin: Dienstag, 25. November 1997, bis 10^{00} Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen vor der Teilbibliothek Mathematik/Informatik