Praktikumsbericht

Generierung von schönen Graphzeichnungen mit Kreisbögen für Graphen mit zwei Knotenklassen

León Lang

Abgabedatum: 27. April 2024
Betreuer: Prof. Dr. Alexander Wolff
Tim Hegemann, M. Sc.

Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität

1 Einleitung

Graphen von Hand zu zeichnen, kann sehr zeitaufwändig sein. Vor allem Graphen „schön“und möglichst kreuzungsfrei zu zeichnen, macht diese Aufgabe deutlich zeitintensiver. Unter „schönen“Graphzeichnungen, ist hier gemeint, dass Knoten möglichst gleichmäßig verteilt sind, Kanten nicht zu nahe an anderen Knoten vorbeilaufen und die Winkel zwischen mehreren Kanten mit einem gleichen Endknoten möglichst gleich groß sind. Um diesen Zeitaufwand in Zukunft zu verhindern, wäre es vorteilhaft, diesen Prozess zu automatisieren, indem man einem Programm Graphdaten, wie die einzelnen Knoten und deren Nachbarn, übergibt und dieses daraus eine möglichst schöne Graphzeichnung berechnet.
Bei den hier betrachteten Graphen handelt es sich um Graphen, deren Knoten in zwei Gruppen eingeteilt sind. Die hierfür verwendeten Knoten stellen Charaktere von Märchen dar. Es wird zwischen Hauptcharakteren und Nebencharakteren unterschieden, wobei dies kein Einfluss auf mögliche Kanten zwischen einzelnen Knoten hat. Aber aus der entstehenden Graphenzeichnung soll außerdem klar werden, welcher Knoten zu welcher der beiden Klassen gehört.

2 Aufgabenstellung

Erstellen eines Programms, das Graphdaten aus JSON-Dateien einlesen kann und daraus möglichst schöne Graphzeichnungen erstellt. Um zu bewerten, wie schön eine Graphzeichnung ist, muss dafür ein entsprechender Algorithmus entworfen werden. In den generierten Graphzeichnungen soll die Knotenklasse (Haupt- oder Nebencharakter) jedes Knotens einfach erkennbar sein. Des Weiteren sollten die Knoten in der Graphzeichnung mit dem dazugehörigen Namen beschriftet werden. Für die beste erzeugte Graphzeichnung soll eine IPE-Datei erstellt werden, die die Graphzeichnung und Beschriftung der Knoten abbildet.

3 Related Work

Duncan et al. [DEG$^+$10] beschäftigten sich mit sogenannten Lobardi Zeichnungen von Graphen. Die grundlegende Idee dahinter ist, die Kanten an jedem Knoten v gleichmäßig aufzuteilen, sodass die Winkelabstände zwischen zwei aufeinander folgenden Kanten genau $\frac{360°}{deg_v}$ entspricht. Da dies mit geradlinigen Kanten zu sehr großen Graphzeichnungen führen kann, verwendeten Duncan et al. teilweise Kreisbögen als Kanten, wobei mögliche Kantenkreuzungen vernachlässigt werden. Außerdem wurden kreisförmige Lombardi Zeichnungen untersucht. Bei diesen befinden sich, wenn möglich, alle Knoten auf einem Kreis.
Der Ansatz von Duncant et al. hat grundlegende Ähnlichkeiten zu dieser Arbeit, unterscheided sich aber dadurch, da das Ziel ist, für einen Graphen herauszufinden, ob dieser als kreisförmige Lombardi Zeichnung dargestellt werden kann und nicht die Knoten auf zwei Kreise, anhand ihrer Knotenklasse, aufgeteilt werden. Des Weiteren müssen

bei einer Lombardi Zeichnung die Winkelabstände zwischen allen aufeinander folgenden Kanten eines Knoten exakt gleich sein, wodurch die Kreisbögen eindeutig bestimmt werden. Bei dieser Arbeit hingegen wird lediglich die Differenzen zu dieser optimalen Verteilung als Bewertungskriterium verwendet.
Auch Brandes et al. [BST00] beschäftigten sich mit der Aufteilung von Winkelabständen zweier Kanten mit einem gleichem Knoten, da sehr kleine Abstände dazu führen können, Kanten nicht auseinander halten zu können. Hierbei wurden bestehende Graphzeichnungen mit geraden Kanten und beliebiger Knotenanordnung als Vorgabe verwendet und versucht, für diese, das Problem der zu kleinen Winkelabstände zu lösen, indem nur die Kanten überarbeitet werden. Dafür wurden gerade Kanten durch kubische Bezier-Kurven ersetzt. Diese Kurven ermöglichen es, die Winkel an den beiden Endpunkten der Kurve beliebig zu wählen.

4 Umsetzung

4.1 Konzept

Als grundlegende Idee zum Aufbau der Graphen gilt es, die Knoten möglichst gut anzuordnen. Eine schöne Anordnungsmöglichkeit ist, Knoten gleichmäßig auf einem Kreis zu platzieren, wobei zwischen zwei benachbarten Knoten immer dieselben Abstände vewrwendet werden. Da hierbei zwischen zwei unterschiedlichen Gruppen an Knoten unterschieden wird, werden die Knoten auf zwei Kreise verteilt. Beide Kreise haben den gleichen Mittelpunkt, wobei einer einen deutlich größeren Radius besitzt, als der andere. Auf dem kleineren/inneren Kreis befinden sich nur Knoten, die Hauptcharaktere repräsentieren. Hierbei gilt es, einen Spezialfall zu beachten. Hat das Märchen nur einen Hauptcharakter, so befindet sich der hierzu gehörende Knoten nicht auf dem inneren Kreis, sondern genau auf dem Mittelpunkt der Kreise. Des Weiteren ist es möglich, ab $n = 4$ Hauptcharakteren $n - 1$ Knoten auf dem inneren Kreis zu verteilen und einen Knoten in der Kreismitte zu platzieren. Die Knoten der Nebencharaktere werden auf dem größeren/äußeren Kreis gleichmäßig verteilt.
Um die Kanten zwischen den jeweiligen Knoten zu zeichnen, werden zwei Möglichkeiten in Betracht gezogen. Zum einen können die Kanten geradlinig gezeichnet werden. Die zweite Möglichkeit ist, die Kanten als Kreisbögen von einem Knoten zum nächsten darzustellen. Dies hat den Vorteil, dass Kreisbögen im Vergleich zu Geraden oft als angenehmer wahrgenommen werden.

4.2 Einlesen der Eingabe

Jedes Märchen ist durch eine JSON-Datei dargestellt. Diese beinhaltet alle Charaktere, deren Namen, ob diese Haupt- oder Nebencharakter sind und die Beziehungen zwischen den einzelnen Charakteren. Diese Beziehungen haben ein Ziel und eine Beschreibung. Nach Einlesen einer JSON-Datei wird für jeden Charakter ein Vertex-Element erstellt, das die zuvor aufgelisteten Attribute besitzt. Des Weiteren wird eine Liste mit allen Kanten für Beziehungen zwischen zwei Knoten erstellt.

4.3 Berechnung der zu betrachtenden Knotenplatzierungen

Die Knoten werden zuerst auf zwei Listen aufgeteilt, abhängig davon, ob der Charakter ein Haupt- oder Nebencharakter ist. Die n Hauptcharaktere werden auf dem inneren Kreis platziert. Im Normalfall werden die Knoten mit gleichmäßigem Abstand auf dem inneren Kreis verteilt, wobei genau ein Knoten am nördlichsten Punkt liegt. Hierbei kann einem Knoten eine feste Position zugewiesen werden und für die verbleibenden Knoten werden alle Permutationen der Knotenpositionen berechnet. Graphen mit genau einem Hauptcharakter stellen einen Spezialfall dar. In diesem Fall wird der zugehörige Knoten im Kreismittelpunkt platziert.
Die m Nebencharaktere werden auf dem äußeren Kreis platziert. Diese werden, wie zuvor auch bei den Hauptcharakteren auf dem inneren Kreis, gleichmäßig verteilt, wobei sich genau ein Knoten am nördlichsten Punkt befindet. Bei einer weiteren Anordnung werden die Positionen der Knoten um $\frac{360}{2m}$ Grad auf dem äußeren verschoben. Dadurch befindet sich am nördlichsten Punkt kein Knoten mehr, sondern eine Lücke. Für beide möglichen Anordnungen müssen alle Permutationen der Knotenreihenfolge betrachtet werden.
Für alle nun vorliegenden Anordnungen muss die daraus entstehende Zeichnung berechnet und anschließend bewertet werden.

4.4 Geradlinige Zeichnung

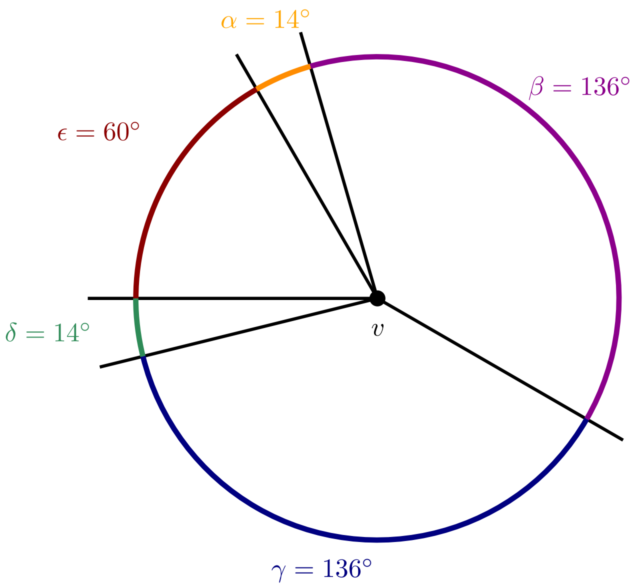
4.4.1 Bewertung

Die Bewertung der entstandenen Graphzeichnungen erfolgen in zwei Schritten. Zuerst wird die Anzahl der durch die aktuelle Anordnung der Knoten entstandenen Kantenkreuzungen berechnet. Die zweite Bewertung bezieht sich auf die entstandenen Winkel zwischen nebeneinanderliegenden Kanten mit einem gemeinsamen Endknoten.
Da hierbei die Anzahl der Kantenkreuzungen wichtiger als die Winkelabstände ist, wird die Anzahl der Kantenkreuzungen zuerst betrachtet und ist der Hauptbewertungsfaktor. Erzeugt die aktuell betrachtete Graphzeichnung G' weniger Kantenkreuzungen als die bisher beste Graphzeichnung G, wird G durch G' ersetzt. Besitzen G und G' die gleiche Anzahl an Kantenkreuzungen, werden für beide Zeichnungen eine Punktzahl anhand der Abweichung der Winkelabstände vom Optimum berechnet und die Zeichnung mit besserer Punktzahl wird zwischengespeichert. Hierbei ist genauso, wie bei der Anzahl der Kantenkreuzungen auch, ein niedrigerer Wert besser, da dieser für eine geringere Abweichung von den optimalen Winkelabständen zweier Kanten steht.
Die Punktzahl *score* für die einzelnen Winkel wird wie folgt berechnet:

$$\text{score} = \left(\frac{360°}{\deg_v} - \alpha\right)^2 \tag{1}$$

Hierbei ist deg_v der Grad des gemeinsamen Knotens v der beiden Kanten e und f, $\frac{360}{deg_v}$ ergibt somit den optimalen Winkel zwischen den einzelnen benachbarten Kanten eines Knotens v und α steht für den aktuell betrachteten Winkel zwischen den zwei benachbarten Kanten e und f. Benachbart steht hierbei dafür, dass in dem durch die zwei

Kanten entstandenen Kreissegment keine weitere Kante mit Knoten v verläuft (siehe Abb. 1). Hat der Knoten v nur Grad 2, werden beide entstandenen Winkel betrachtet. Die Differenz zwischen dem optimalen und dem tatsächlichen Winkel wird anschließend quadriert. Diese Punktzahl wird für alle entstanden Winkel berechnet und aufsummiert. Abbildung 1 zeigt die Berechnung der Winkelpunktzahl für den Beispielknoten v. Dieser



$$deg_v = 5$$

$$optangle_v = 72°$$

$$score_\alpha = (\tfrac{360°}{5} - 14°)^2 = 3364$$

$$score_\beta = (\tfrac{360°}{5} - 136°)^2 = 4096$$

$$score_\gamma = (\tfrac{360°}{5} - 136°)^2 = 4096$$

$$score_\delta = (\tfrac{360°}{5} - 4°)^2 = 3364$$

$$score_\epsilon = (\tfrac{360°}{5} - 60°)^2 = 144$$

$$totalscore_v = \sum score_i = 15064$$

Abb. 1: Berechnung der Winkelpunktzahl für Knoten v

hat Grad $deg_v = 5$, woraus sich ein optimaler Winkelabstand für zwei nebeneinander liegenden Kanten $optangle_v = \frac{360}{5} = 72$ ergibt. Die Punktzahlen $score_\alpha$ bis $score_\epsilon$ sind die jeweiligen Punktzahlen der einzelnen Winkel α bis ϵ. Diese Punktzahlen werden aufsummiert, um die Punktzahl für den Knoten v zu erhalten. Dieser Schritt wird für jeden Knoten des Graphens wiederholt, wobei die Punktzahlen der einzelnen Knoten zu einer Gesamtpunktzahl für den ganzen Graphen aufsummiert werden.

4.5 Zeichnung mit Kreisbögen

4.5.1 Berechnung der Kreisbögen

Die Berechnung der Kreisbögen für bestehende Kanten ist in drei Teile aufgeteilt, da drei verschiedene Arten von Kreisbögen existieren. Zum einen gibt es die Kreisbögen zwischen zwei Knoten derselben Klasse, also auf demselben Kreis (innerer oder äußerer), wobei diese Knoten auf dem Kreis direkt nebeneinander liegen. Des Weiteren existieren Kreisbögen zwischen Knoten auf dem nneren und Knoten auf dem äußeren Kreis. Die dritte Art von Kreisbögen bezieht sich auf Knoten auf dem äußeren Kreis, die nicht direkt nebeneinander liegen, also mindestens ein weiterer Knoten auf dem äußeren Kreis zwischen diesen liegt.

Für Kreisbögen der ersten Art wird die bestehende Kante zwischen zwei Knoten u und v durch einen Kreisbogen *arc* mit den beiden Knoten als Endpunkten ersetzt. Als Kreismittelpunkt des Kreisbogens *arc* wird in diesem Fall der Mittelpunkt der gesamten Graphzeichnung verwendet. Der Radius von *arc* ist abhängig von der Knotenklasse der beiden Knoten u, v. Befinden diese sich auf dem inneren Kreis, wird der Radius des inneren Kreises verwendet, für Knoten auf dem äußeren Kreis wird der Radius des äußeren Kreises verwendet. Für einen Kreisbogen muss zusätzlich bestimmt werden, welchen Teil des Kreises er darstellen soll, also ob der Kreisbogen über den kleinen Winkel zwischen u, v verläuft oder den großen Winkel auf der anderen Seite. Da die einzelnen Knoten einer Klasse auf dem jeweiligen Kreis gleichmäßig verteilt sind, ist hier immer der kleinere Winkel zu wählen. Ansonsten liegt mindestens ein weiterer Knoten w auf dem entstandenen Kreisbogen und es ist nicht ersichtlich, dass dieser Kreisbogen eine Verbindung zwischen u, v darstellen soll und überlagert Kreisbögen für Verbindungen zwischen u, w und v, w, beziehungsweise macht den Anschein, als gäbe es eine Verbindung zwischen u, w und v, w, auch wenn dies nicht der Fall ist. Abbildung 2 veranschaulicht diesen Schritt.

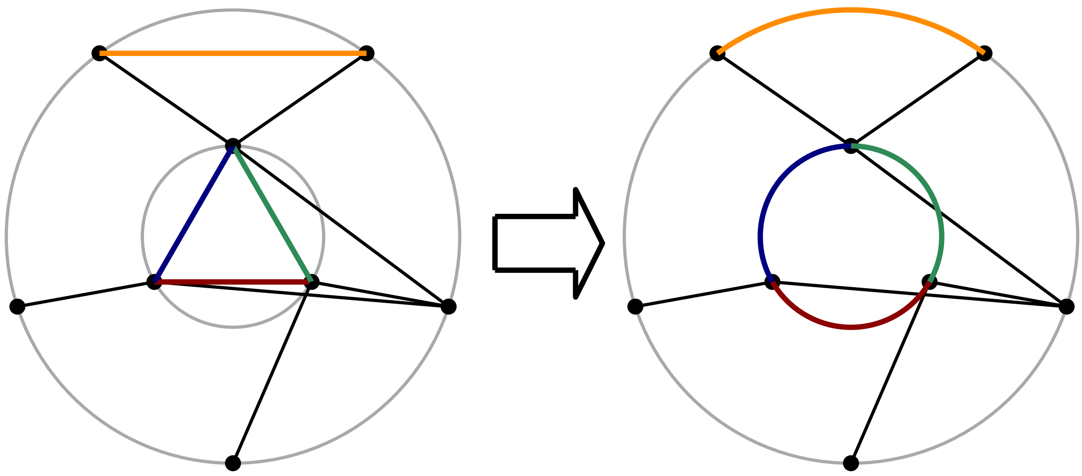


Abb. 2: Berechnung der Kreisbögen auf dem inneren/äußeren Kreis

Die zweite Art von Kreisbögen entstehen aus Kanten zwischen zwei Knoten unterschiedlicher Knotenklasse, also zwischen einem Knoten auf dem inneren und einem Knoten auf dem äußeren Kreis. Die zugrundeliegende Idee hierfür ist es, für jeden Knoten p auf dem inneren Kreis alle Kanten zum äußeren Kreis zu betrachten und die Endpunkte in folgende zwei Gruppen aufzuteilen: Knoten links von p, Knoten rechts von p. Knoten die mittig unterhalb von p liegen werden der Gruppe der Knoten auf der rechten Seite zugewiesen (Zuweisung zur anderen Gruppe wäre auch möglich) und für Knoten die mittig über p liegen, wird kein Kreisbogen berechnet und die gerade Kante behalten. Welcher Gruppe ein Knoten zugeordnet wird, wird wie folgt entschieden. Der Knoten p und der Kreismittelpunkt c bilden eine Gerade. Angenommen p liegt auf dem inneren Kreis am nördlichsten Punkt, ist diese Gerade pc senkrecht, falls nicht, wird p als oben angesehen, um die Definition von rechts und links anwenden zu können. Befindet sich nun ein zu p benachbarter Knoten auf dem äußeren Kreis rechts dieser Geraden, kommt er in die rechte Gruppe, Knoten links der Geraden gehören zur linken Gruppe. Für Knoten dieser beiden Gruppen werden nach außen gerichtete Kreisbögen nach einem gewissen Schema berechnet. Durch den Schnitt zwischen der Tangente des inneren Kreises an Punkt p und der Geraden pc ergibt sich für die jeweilige Seite ein 90 Grad Winkel, siehe Abbildung 3. Die zugrunde liegende Idee ist es, diesen Winkel anhand der Anzahl der benachbarten Knoten von p auf der rechten (bzw. linken) Seite aufzuteilen. Ein erster Ansatz der

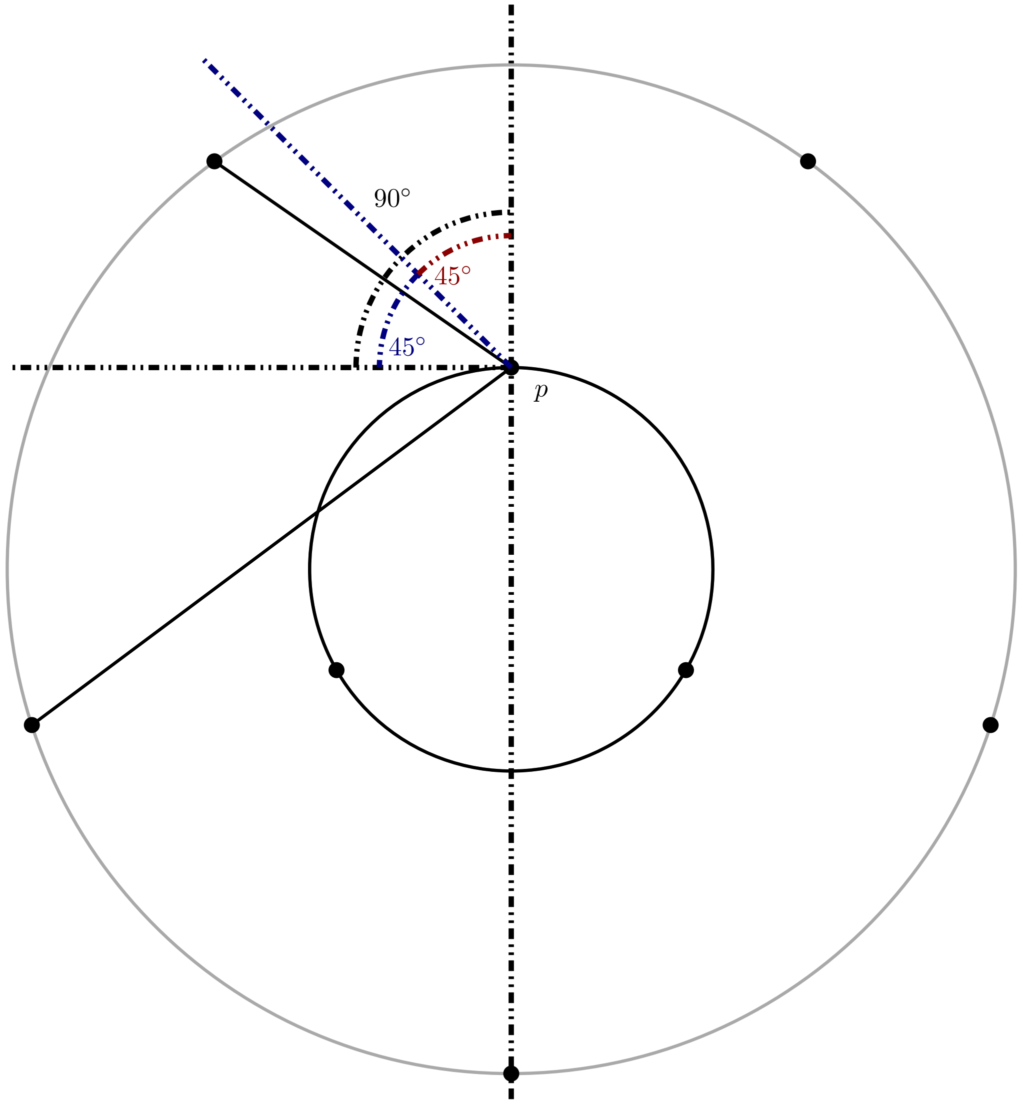


Abb. 3: Aufteilung der 90 Grad zur Bestimmung der Kreisbögen

Aufteilung war, diese 90 Grad durch die Anzahl k der benachbarten Knoten aufzuteilen,

sodass sich k Winkel ergeben. Diese Winkel bestimmen den Winkel der Tangente für den Kreisbogen von p zu einem benachbarten Knoten an Punkt p. Somit ergibt sich für die Aufteilung der Winkel folgende Formel: $\alpha = \frac{90°}{k+1}$. Dies führt aber zu folgendem Problem: Befindet sich der zugehörige Endpunkt auf dem äußeren Kreis oberhalb der Tangente mit Winkel α, entsteht ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt oberhalb der Tangente liegt und somit auf der falschen Seite. Dieser entstandene Kreisbogen ist folglich falsch herum und sorgt zum einen für mehr Kreuzungen und zum anderen ist dieser nicht besonders ansehnlich.
Ein zweiter Ansatz war, anstelle die 90 Grad direkt aufzuteilen, diese zuerst in zwei 45 Grad Winkel aufzuteilen. Kanten, deren Endpunkt im oberen (roten) 45 Grad Winkel liegen, werden hierbei weiterhin als gerade Kanten gezeichnet und nicht in Kreisbögen umgewandelt. Für alle k verbleibenden zu p benachbarten Knoten auf dem rechten (bzw. linken) Halbkreis wird der 45 Grad Winkel wie zuvor aufgeteilt: $\alpha = \frac{45°}{k+1}$. Auch bei dieser Winkelaufteilung kommt es je nach Position des benachbarten Knotens zu Kreisbögen, deren Mittelpunkt auf der falschen Seite der Tangente liegt.
Da dieses Problem nur auftritt, wenn sich der Knoten auf dem äußeren Kreis oberhalb seiner zugehörigen Tangente befindet, ist es stark abhängig von der Anzahl k und der Position des Knotens. Die Lösung für dieses Problem ist es, die 90 Grad nicht anhand der Anzahl k der Knoten aufzuteilen, um die Tangenten zu erhalten, sondern den Winkel der Tangente anhand der Position des zugehörigen Knotens auf dem äußeren Kreis zu bestimmen. Würden die gesamten 90 Grad anhand der Position auf dem Halbkreis aufgeteilt werden, könnte es in seltenen Fällen dennoch zu dem gleichen Problem führen, daher werden alle Kanten in den obersten 22.5 Grad geradlinig gezeichnet und die verbleibenden 67.5 Grad entsprechend aufgeteilt. Dadurch ergibt sich folgende Formel:

$$\alpha = \left(22.5° + (90° - 22°)\left(\frac{\beta}{180°}\right)\right) \tag{2}$$

Der Winkel α ist der Winkel der Tangente 5 für den Kreisbogen und der Winkel β ist der Winkel zwischen dem nördlichsten Punkt auf dem äußeren Kreis und dem Endpunkt u der Kante, für die ein Kreisbogen berechnet werden soll. Abbildung 4 zeigt diese Berechnung. Kante 3 ist die direkte Verbindung des Zeichnungsmittelpunktes mit dem Knoten u und dient zur Berechnung des Winkelabstands zwischen u und dem nördlichsten Punkt. Kante 4 ist die direkte Verbindung von u und p an dem Mittelpunkt von 4 wird eine Normale 1 angesetzt. Durch die Formel 2 ergibt sich für den Knoten u ein Winkel von 36 Grad. Diesen Winkel bildet Kante 5 ab. Die Normale 2 der Kanten 5 liegt an Knoten p an. Der Schnittpunkt zwischen 1 und 2 bildet den Mittelpunkt des Kreisbogens zur Verbindung von u und p. Die gelben Zahlen $X.2$ zeigen dies für Knoten w. Zu beachten ist hierbei, dass sich mehrere Kanten auf der Geraden zwischen p und w überlappen, da dies aufgrund der Position von w mit 180 Grad einen Spezialfall bildet. Hierbei befinden sich benachbarte Knoten von p u, v, w bei 36, 108 und 180 Grad. Für 36 Grad ergibt sich eine Tangente mit 36 Grad, bei 108 Grad hat die Tangente 63 Grad und bei 180 Grad hat die Tangente den Winkel 90 Grad. Mithilfe dieser Tangente lässt sich nun der Mittelpunkt für den Kreisbogen berechnen. Dieser liegt genau auf dem Schnittpunkt der Normalen der Tangente an Knoten p und der Normalen der Geraden up an deren

Mittelpunkt $\left(\frac{u.x+p.x}{2}, \frac{u.y+p.y}{2}\right)$.

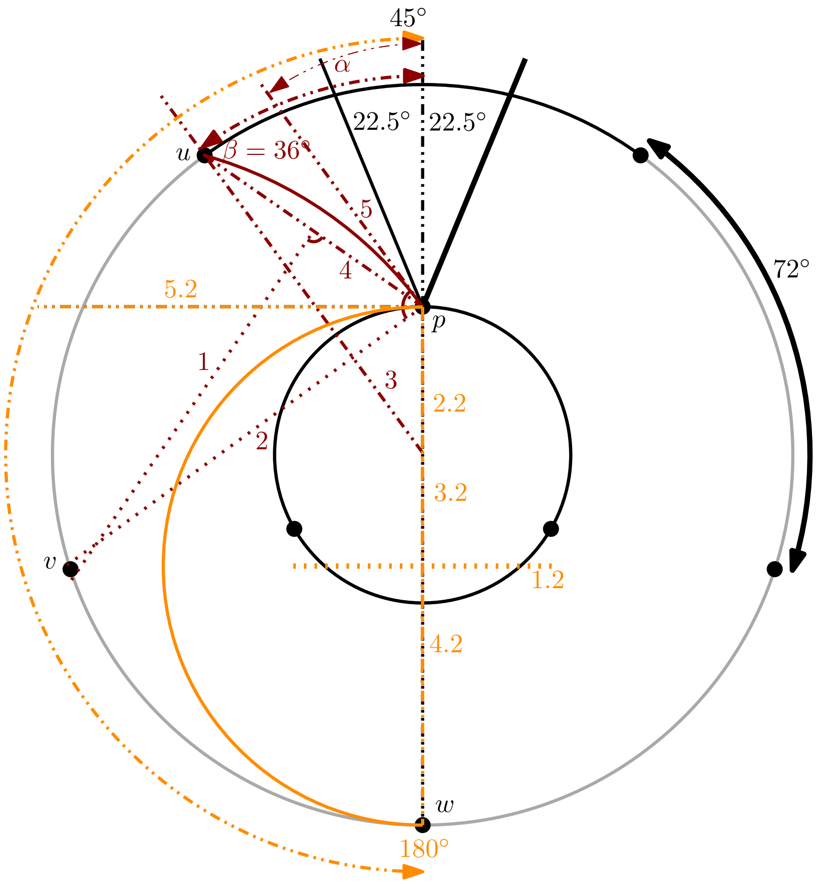


Abb. 4: Berechnung der Kreisbögen zwischen den zwei Kreisen

Kreisbögen der dritten Art sind Kreisbögen, die außerhalb des äußeren Kreises liegen. Diese sind dafür gedacht, Knoten, die beide auf dem äußeren Kreis liegen, aber nicht direkt nebeneinander, möglichst schön und mit möglichst wenigen Kreuzungen zu verbinden. Diese Kreisbögen überspringen mindestens immer einen Knoten, wobei zu beachten ist, dass Kreisbögen, die die Knoten kleinerer Kreisbögen überspringen, sich nicht kreuzen dürfen, abgesehen von gemeinsamen Endpunkten. Daraus folgt, dass kürzere Kreisbögen flacher sein müssen, als längere Kreisbögen, da es sonst zwangsweise zu Schnittpunkten kommt. Daher muss der Mittelpunkt des jeweiligen Kreisbogens in Abhängigkeit von der Winkelentfernung der beiden Endpunkte bestimmt werden. Um die Kreisbögen nicht zu groß werden zu lassen, habe ich mich für dafür entschieden, die Entfernung des Kreisbogenmittelpunktes zum Mittelpunkt der beiden Kreise zu begrenzen. Die Begrenzung liegt bei dem halben äußeren Radius. Diese Entfernung d wurde anschließend mit der Winkelentfernung α der beiden Knoten in Bezug auf die maximal mögliche Winkelentfernung von 180 Grad gewichtet, wodurch sich folgende Formel ergibt:

$$d = 0.5 \cdot outerRadius \cdot \frac{\alpha}{180°} \tag{3}$$

Abbildung 5 stellt diese Berechnung für drei Kreisbögen dar. Die Winkelentfernung zwischen Knoten 1 und 3 beträgt 90 Grad, wodurch sich der Mittelpunkt bei einer Distanz von $0.25 \cdot outerRadius$ befindet und somit den roten Kreisbogen bildet. Für den blauen Kreisbogen beträgt der Winkelabstand 135 Grad und somit die Entfernung des Mittelpunktes $0.375 \cdot outerRadius$. Da die Knoten des grünen Kreisbogens genau 180 Grad auseinander liegen, ist es hier möglich, den Kreisbogen auf der linken oder auf der rechten Graphseite zu zeichnen. Dessen Mittelpunkt liegt genau bei der maximal möglichen Entfernung von $0.5 \cdot outerRadius$. Die lilafarbenen Kreisbögen stellen die Kreisbögen für die Knoten 2 und 4 beziehungsweise 2 und 5 dar. Wie hier zu sehen ist, schneiden sich Kreisbögen nur, wenn genau ein Knoten zwischen den zwei Knoten des anderen Kreisbogens liegt. Liegen beide Knoten von Kreisbogen 1 zwischen beziehungsweise auf den Knoten von Kreisbogen 2, verläuft Kreisbogen 2 um Kreisbogen 1 herum und schneidet diesen nicht.

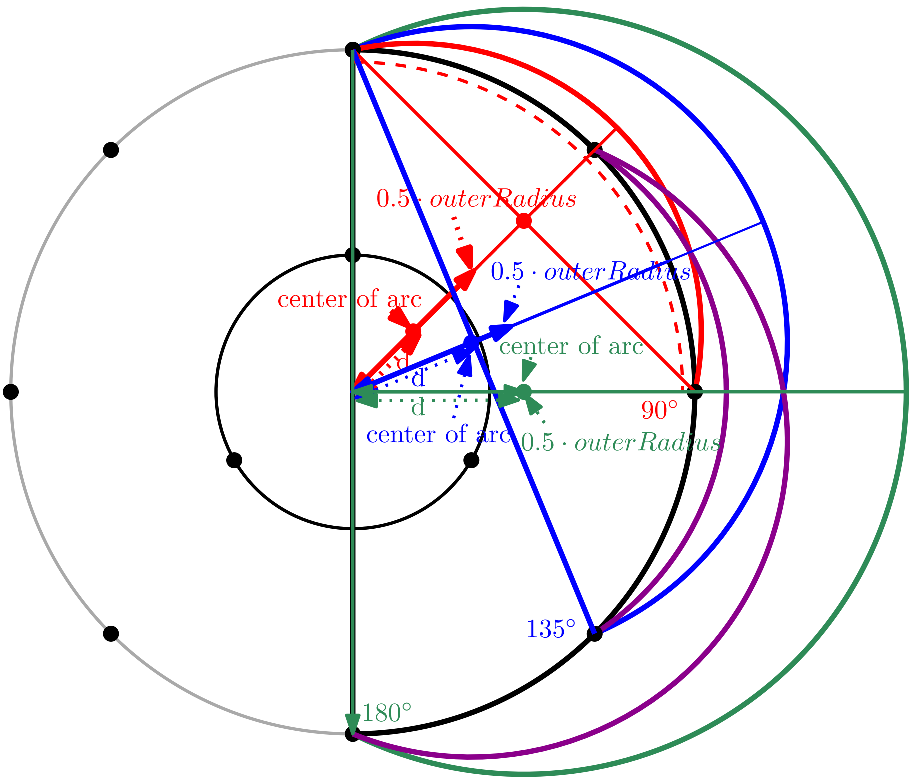


Abb. 5: Berechnung der Kreisbögen außerhalb des äußeren Kreises

4.5.2 Bewertung der Graphzeichnung

Die Bewertung von Graphzeichnungen mit Kreisbögen folgt demselben Schema wie zuvor bei geradlinigen Graphzeichnungen. Als Hauptbewertungskriterium gilt die Kreuzungsanzahl, je geringer, desto besser. Für die Berechnung der Kantenkreuzungen wurden zwei verschiedene Ansätze verwendet. Der erste Ansatz berechnet den Kreuzungspunkt genau. Dabei wird zwischen zwei Arten von Kreuzungen unterschieden, Kreisbogen mit Kreisbogen und Kreisbogen mit Gerade. Für den Schnitt zwischen zwei Kreisbögen werden zuerst die Schnittpunkte der beiden kompletten Kreise berechnet, falls vorhanden. Ob sich zwei Kreise schneiden, lässt sich relativ einfach über die Entfernung der beiden Mittelpunkte und die Radien bestimmen. Die genauen Schnittpunkte lassen sich nun mittels Trigonometrie bestimmen. Für diese Schnittpunkte muss noch überprüft werden, ob diese innerhalb des durch den Kreisbogen dargestellten Teilkreises liegen, da Schnittpunkte ohne diese Eigenschaft nicht durch die Kreisbögen entstehen können. Dafür wird jedem Schnittpunkt bei beiden Kreisbögen ein Winkel, anhand der Position auf dem Vollkreis für den jeweiligen Kreisbogen, zugewiesen und überprüft ob dieser Winkel zwischen dem Start- und Endwinkel des jeweiligen Kreisbogens liegt. Ist dies der Fall, entsteht dieser Schnittpunkt nicht nur durch die beiden Vollkreise, sondern auch durch die beiden Kreisbögen. Zusätzlich muss noch überprüft werden, ob die beiden Kreisbögen einen gemeinsamen Endpunkt haben, da dies dann nicht als Schnitt gewertet wird. Für Schnittpunkte zwischen Kreisbögen und geradlinigen Kanten wird ähnlich verfahren. Zuerst werden die Schnittpunkte berechnet, falls vorhanden. Danach wird überprüft, ob sich die Schnittpunkte auf dem Kreisbogen und auf der Kante befinden, um zu überprüfen, ob durch diese auch Schnitte entstehen und nicht nur durch den Vollkreis und die unbegrenzte Gerade der Kante. Zusätzlich muss auch überprüft werden, ob beide einen gemeinsamen Endpunkt haben, da diese Schnitte nicht gewertet werden.
Haben zwei Graphzeichnungen die gleiche Kreuzungszahl, werden für beide die Winkelabstände zwischen Kreisbögen und geraden Kanten mit demselben Endknoten bewertet. Um die Winkelabstände zwischen Kreisbögen (und Kanten) zu bestimmen, wird der Winkel des Kreisbogens direkt am Endpunkt verwendet. Dieser entspricht dem Winkel der Tangente des Kreisbogens an genau diesem Endpunkt, siehe Abbildung 15. Dabei gilt zu beachten, dass nur der Teil der Tangente in Richtung Kreisbogen verwendet wird, da sonst auf der gegenüberliegenden Seite ein anderer Winkel aufgeteilt würde. Für zwei Kreisbögen mit einem Winkel kleiner 180 Grad kann dies einfach sichergestellt werden. Hierbei reicht es aus, den Schnittpunkt der zwei Tangenten zu berechnen und die Kanten von den Endpunkten des Kreisbogens zum Schnittpunkt für die Berechnung zu verwenden. Bei Kreisbögen mit 180 Grad oder mehr (vor allem Kreisbögen außerhalb des äußeren Kreises), muss sichergestellt werden, dass die Referenzkante auf der Tangente auf der richtigen Seite liegt. Nun werden für jeden Knoten der Graphzeichnung alle anliegenden geraden Kanten und Kreisbögen betrachtet und die einzelnen Winkelabstände zwischen zwei aufeinander folgenden Kanten berechnet. Diese Winkel werden wie zuvor bei geradlinigen Zeichnungen anhand der Differenz zur optimalen Winkelaufteilung des aktuell betrachteten Knotens bewertet. Dazu wird Formel 1 verwendet und wie in Abbildung 1 verfahren.

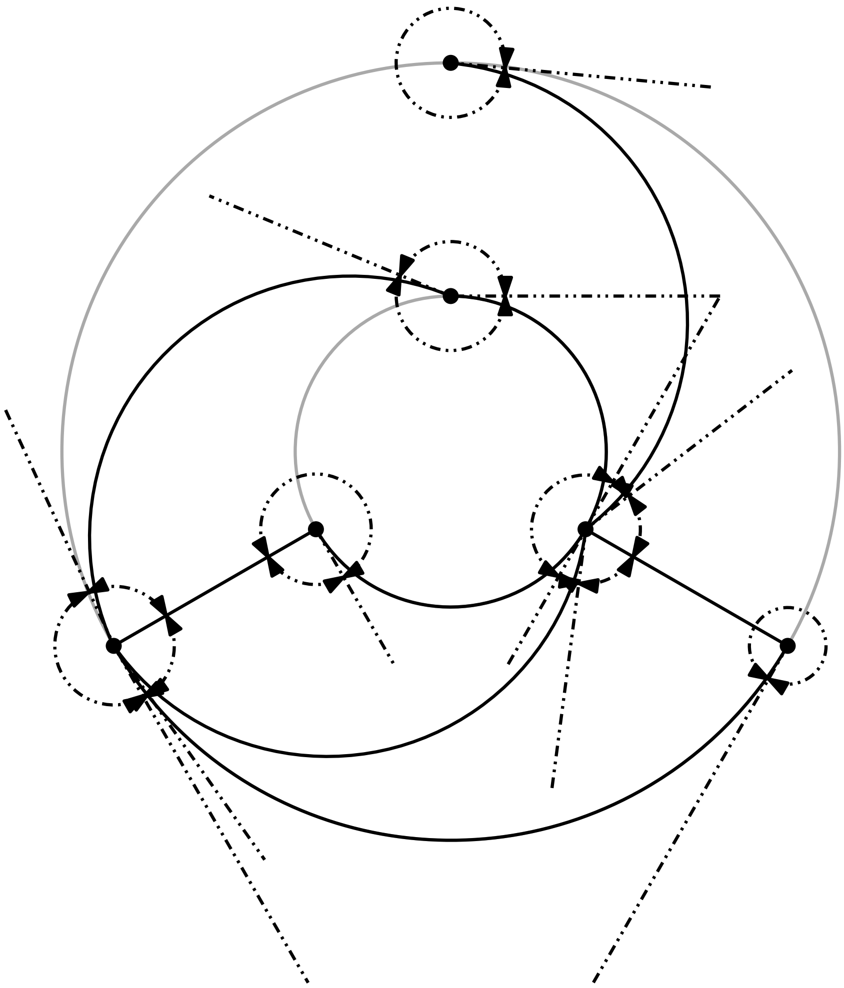


Abb. 6: Berechnung der Winkelabstände zwischen Kreisbögen und geraden Kanten

Abbildung 15 veranschaulicht, wie die Winkelabstände zwischen Kanten und Kreisbögen mit dem selben Endpunkt bestimmt werden. Die gestrichelten Geraden stellen die Referenzkanten (Teil der Tangenten) dar. Die gestrichelten (Teil-)Kreise stellen die Winkelabstände zwischen den aufeinander folgenden Kanten und Kreisbögen dar.

4.6 Generierung von ipe-Dateien

Aus der generierten Graphzeichnung wird anschließend eine Zeichnung des Graphens als ipe-Datei generiert. Als erstes werden die beiden Kreise, auf denen sich die einzelnen Knoten befinden, in grau eingezeichnet, um die Zugehörigkeit zu der jeweiligen Klasse besser erkennen zu können. Als nächstes wird für jeden Knoten eine schwarze `disk-mark` an dem Knoten zugewiesenen Koordinaten eingezeichnet. Die wenigen vorhandenen geraden Kanten werden als direkte Linie zwischen den zwei Endpunkten eingezeichnet.

Anschließend werden alle Kreisbögen als `circular arcs` hinzugefügt. Die entstandene ipe-Datei wird entsprechend der als Eingabe verwendeten json-Datei benannt und gespeichert.

5 Auswertung

5.1 Anzahl der Kreuzungen: nur geradlinige Kanten oder geradlinige Kanten und Kreisbögen

Da für die hier generierten Graphzeichnungen das Hauptkriterium für „schöne“Graphzeichnungen die Anzahl der Kantenkreuzungen ist, ist es wichtig, zu betrachten, wie sich diese Anzahl durch Verwendung von Kreisbögen verändert. Dazu wurden für alle vorgegebenen Märchengraphen die jeweils beste geradlinige Zeichnung und die jeweils beste Zeichnung mit Kreisbögen berechnet und für beide die jeweilige Kreuzungszahl berechnet. Für 32 der 45 Märchengraphen bliebt die Kreuzungszahl für beide Zeichenvarianten gleich, wobei 28 dieser Graphen bereits als geradlinige Zeichnung keine Kreuzungen enthielten. Für 12 der verbleibenden 13 Graphen konnte die Kreuzungszahl durch Kreisbögen reduziert werden. Bei geradliniger Zeichnung hatten insgesamt 28 Graphen Kreuzungszahl 0 und mit Kreisbögen hatten insgesamt 35 Graphen Kreuzungszahl 0. Daraus folgt, dass durch Verwendung von Kreisbögen bei 7 Graphen die Kreuzungszahl nicht nur reduziert wurde, sondern alle Kreuzungen eliminiert wurden. Das Märchen mit der größten Kreuzungsreduktion war Herr Korbes. Dieses hatte als geradlinige Zeichnung 78 Kreuzungen und mit Kreisbögen nur noch 36. Lediglich bei dem Märchen „Die zwei Brüder“wurde die Kreuzungszahl durch Verwendung von Kreisbögen von 4 auf 9 erhöht. Abbildung 7 zeigt diese Märchen. Dies hat den Grund, dass der innere Kreis nicht komplett durch Kanten geschlossen ist und gerade Kanten durch den inneren Kreis zum äußeren Kreis keine anderen Kanten schneiden würden. Als Kreisbögen verlaufen diese aber ausschließlich im Zwischenraum der beiden Kreise und schneiden somit andere Kreisbögen. Genauer gesagt würde der lilafarbene Kreisbogen bei geradliniger Zeichnung keine statt einer Kreuzung erzeugen. Der rote Kreisbogen erzeugt zwei Kreuzungen, während eine Gerade nur eine Kreuzung erzeugen würden. Der blaue Kreisbogen erzeugt zwei Kreuzungen, bei einer geradlinige Zeichnung würde keine Kreuzung entstehen.

5.2 Laufzeitunterschied der beiden Kreuzungsberechnungen

Da in der zweiten Art Kreuzungen zwischen Kreisbögen zu berechnen nur überprüft wird, ob sich die gebildeten Intervalle überschneiden, anstelle die exakte Schnittpunkte zu berechnen, besteht die Erwartung, dass diese Variante schneller ist. Um dies zu überprüfen, wurden für beide Varianten zwei Tests ausgeführt. Für beide Tests wurden alle sinnvollen Märchengraphen verwendet, beispielsweise Graphen ohne Nebencharaktere wurden weggelassen. Für all diese wurde die am besten bewertete Zeichnung generiert und als ipe-Datei gespeichert. Dieser Vorgang wurde 100 Mal wiederholt. Die beiden Tests unterscheiden sich dadurch, dass im ersten Test die Knoten auf dem inneren Kreis eine feste Position haben und im zweiten Test die verschiedenen Permutationen für den

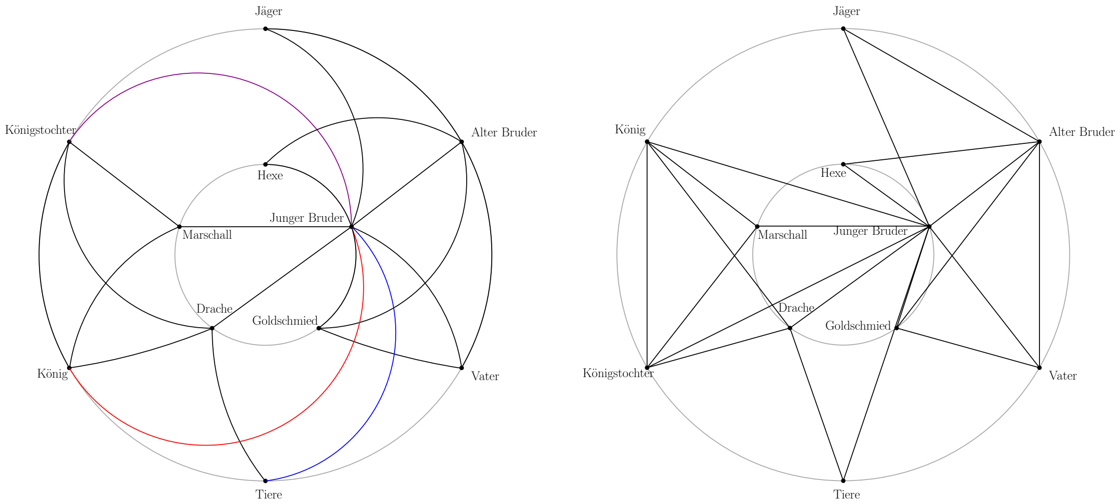


Abb. 7: 060 - Die zwei Brürder

inneren Kreis zusätzlich betrachtet wurden.
Für den ersten Test benötigte die genaue Schnittpunktberechnung 4 Minuten und 16 Sekunden. Die Schnittberechnung mittels Intervallen benötigte lediglich 3 Minuten und 58 Sekunden und entspricht somit der Erwartung, weniger Rechenzeit zu benötigen.
Für den zweiten Test benötigte die genaue Schnittpunktberechnung 6 Minuten und 51 Sekunden, wobei die Main-Methode 275.921 ms CPU-Time benötigte. Die Schnittberechnung mittels Intervallen benötigte erneut weniger Zeit. Die 100 Durchläufe dauerten lediglich 6 Minuten und 19 Sekunden, wobei die CPU-Time für die Main-Methode bei 258.638 ms lag.
Beide Tests bestätigen die Ausgangsvermutung, dass die Schnittberechnung mittels Intervallen schneller ist, als die genaue Schnittpunktberechnung.

5.3 Laufzeitkomplexität

Um eine möglichst schöne Graphzeichnung zu erhalten, werden für die verschiedenen Knotenpositionen fast alle möglichen Permutationen betrachtet. Hierbei kann einem Knoten eine feste Position zugewiesen werden, da die dadurch wegfallenden Permutationen lediglich gedrehte Varianten bereits betrachteter Permutationen sind. Bei n Hauptcharakteren und m Nebencharakteren werden $(n-1)! \cdot m!$ Permutationen betrachtet, dies liegt in $\mathcal{O}(n! \cdot m!)$. Für jede Permutation wird eine Punktzahl berechnet. Für die Kreuzungsanzahl werden paarweise Kanten/Kreisbögen miteinander verglichen, ob diese sich schneiden, was zu einer Laufzeit von $\mathcal{O}(|E|^2)$ führt. Bei gleicher Punktzahl wird zusätzlich noch eine Winkelpunktzahl berechnet. Dafür wird für jeden Knoten alle anliegenden Kanten betrachtet, welche zuerst sortiert werden. Das Sortieren benötigt $\mathcal{O}(deg_v \log deg_v)$ Laufzeit, wobei deg_v der Knotengrad des aktuell betrachteten Knotens v ist. Da jede Kante, jeder Kreisbogen nur an zwei Knoten anliegt, wird jede Kante genau zweimal betrachtet, dies führt zu folgender Laufzeit $\mathcal{O}(|E|)$. Somit liegt die Laufzeit für das Berechnen der Winkelpunktzahl in $\mathcal{O}((n+m)^2 \log(n+m))$. Daraus folgt eine Gesamtlaufzeit zur Berechnung der Graphzeichnung von $\mathcal{O}(((n-1)! \cdot m!) \cdot (n+m)((n+m) \log(n+m))$. Für das Erstellen einer IPE-Datei werden zuerst alle Knoten und danach alle Kanten und Kreisbögen hinzugefügt. Dies benötigt $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ Zeit.

6 Ausblick und Schwachstellen

Die aktuell generierten Graphen bestehen lediglich aus Kanten, Knoten und Beschriftung der Knoten, wobei die Beschriftung beim Zeichnen der Graphen nicht berücksichtigt werden. Sie stellen folglich lediglich eine möglichst schöne Anordnung und Zeichnung der Knoten und Kanten dar. Es werden also wenige Informationen über die jeweiligen Knoten und die dazugehörigen Kanten vermittelt. Für Kanten liegt es nahe, in der Mitte der Kante oberhalb oder unterhalb mit den bereits vorhandenen Daten zur Art der Beziehung zu beschriften. Dabei gilt es aber zu beachten, dass der Text nicht von anderen Kanten oder Knoten geschnitten wird. Ein weiteres Problem, dass es dabei zu beachten gilt, sind gerichtete Kanten. Die Beziehungen in den Eingabedateien stellen gerichtete Kanten dar, auf deren Darstellung hier verzichtet wurde, da diese schnell zu unschönen und unübersichtlichen Graphzeichnungen führen würden. Eine Möglichkeit dafür wäre es, die Beschriftungen mit Pfeilen zu versehen, die die Richtung der Beziehung angibt, beziehungsweise die Beschriftung oberhalb/unterhalb der Kante zu platzieren, abhängig von der Richtung. Knoten werden aktuell als relativ kleine Punkte dargestellt und durch ein Textfeld neben den einzelnen Knoten beschriftet. Eine schönere Darstellung wären kleine ausgefüllte Kreise, die den Namen des Charakters als Beschriftung enthalten. Dabei müssen vor allem die Größe des Kreises und der Beschriftung beachtet werden, sodass diese sich nicht überlappen beziehungsweise, dass die Beschriftung nicht an der Seite aus dem Kreis heraus ragt. Zusätzlich muss der Abstand vom Kreismittelpunkt zu den vorbeilaufenden Kanten beachtet werden, ist dieser zu gering, schneidet die Kante den Kreis und erzeugt somit den Eindruck, es wären zwei Kanten, die beide an diesem Knoten enden.

Literatur

[BST00] Ulrik Brandes, Galina Shubina und Roberto Tamassia: Improving Angular Resolution in Visualizations of Geographic Networks. In: Willem Cornelis de Leeuw und Robert van Liere (Herausgeber): *Data Visualization 2000*, Seiten 23–32, Vienna, 2000. Springer Vienna, ISBN 978-3-7091-6783-0.

[DEG+10] Christian A. Duncan, David Eppstein, Michael T. Goodrich, Stephen G. Kobourov und Martin Nöllenburg: Lombardi Drawings of Graphs, 2010.

7 Appendix

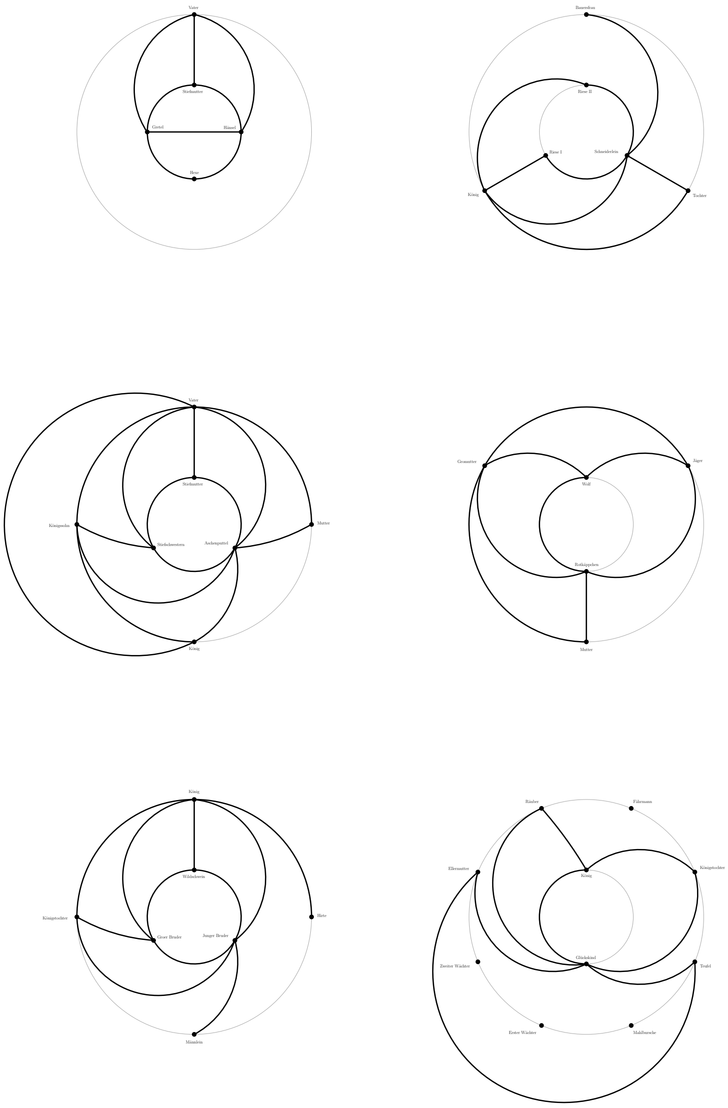


Abb. 8: 015 - Hänsel und Gretel, 020 - Das tapfere Schneiderlein, 021 - Aschenputtel, 026 - Rotkäppchen, 028 - Der singende Knochen, 029 - Der Teufel mit den drei goldenen Haaren

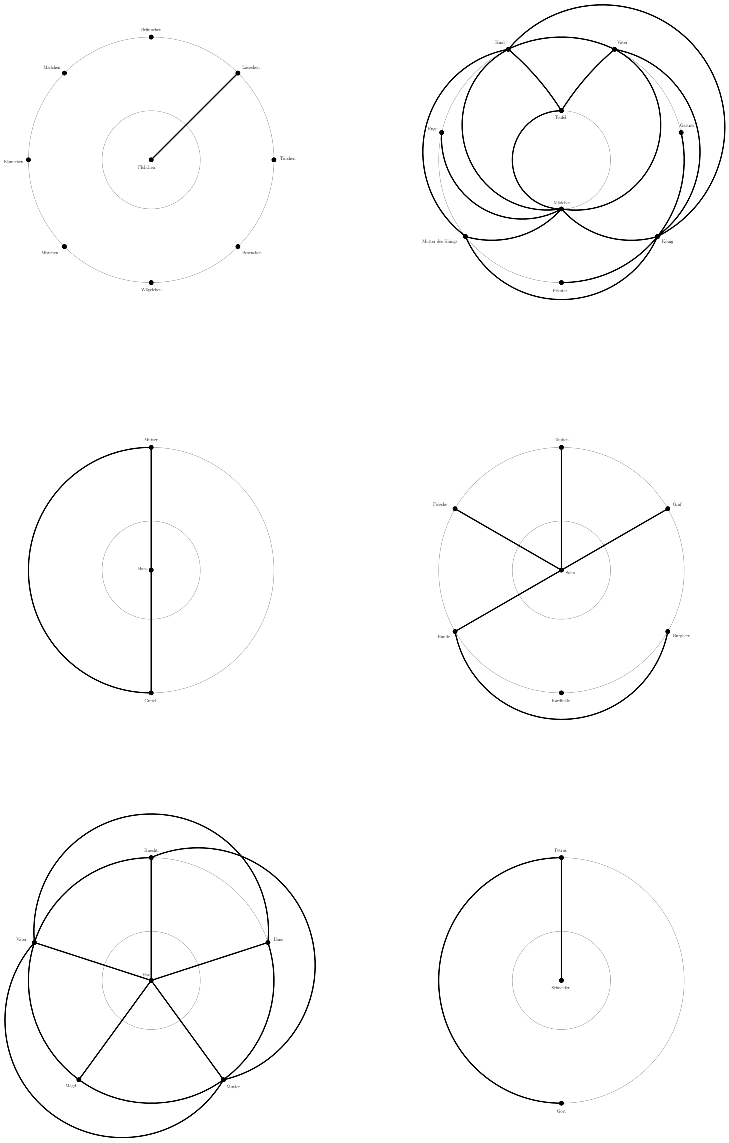


Abb. 9: 030 - Flöhchen und Läuschen, 031 - Das Mädchen ohne Hände, 032 - Der gescheite Hans, 033 - Die drei Sprachen, 034 - Die kluge Else , 035 - Der Schneider im Himmel

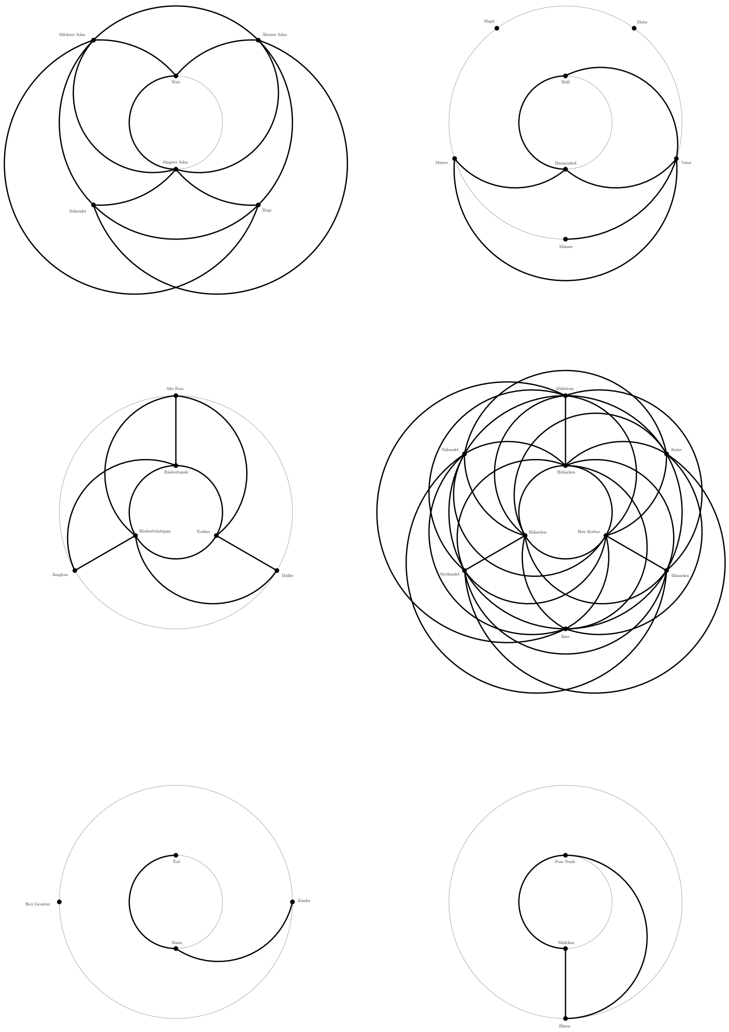


Abb. 10: 036 - Tischchen deck dich, Goldesek und Knüppel aus dem Sack, 037 - Daumesdick, 040 - Der Räuberbräutigam, 041 - Herr Korbes, 042 - Der Herr Gevatter, 043 - Frau Trude

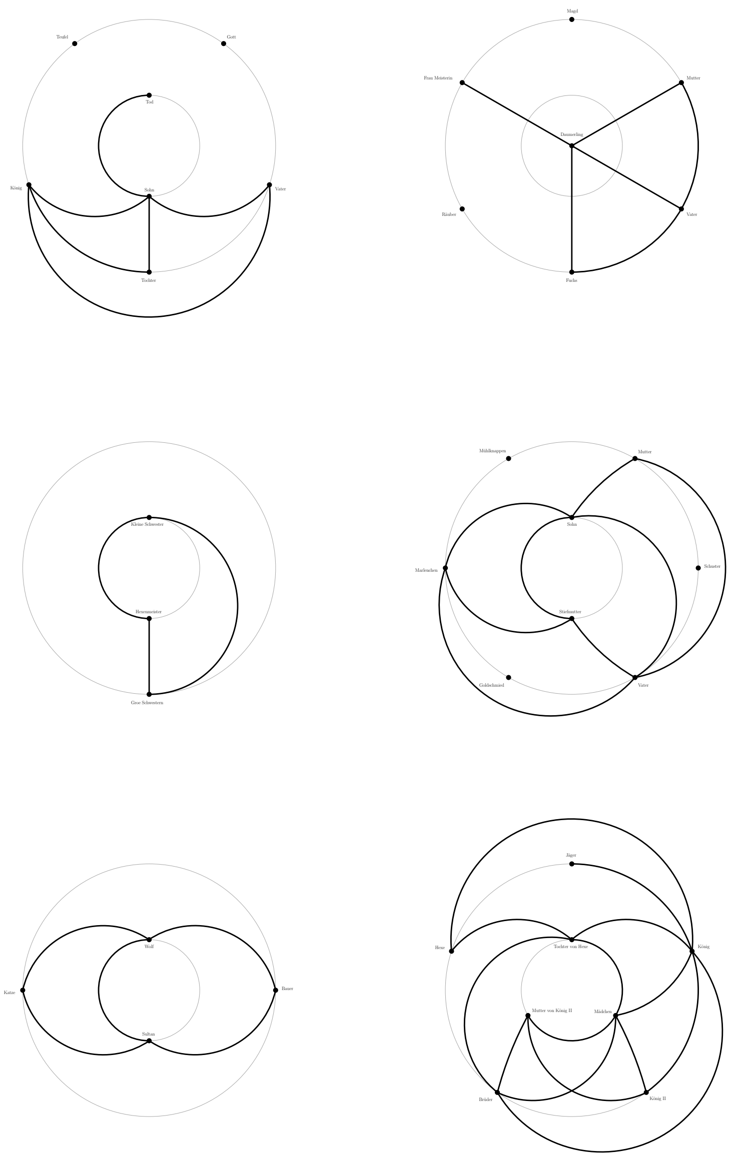


Abb. 11: 044 - Der Gevatter Tod, 045 - Daumerlings Wanderschaft, 046 - Fitchers Vogel, 047 - Von dem Mandelboom, 048 - Der alte Sultan, 049 - Die sechs Schwäne

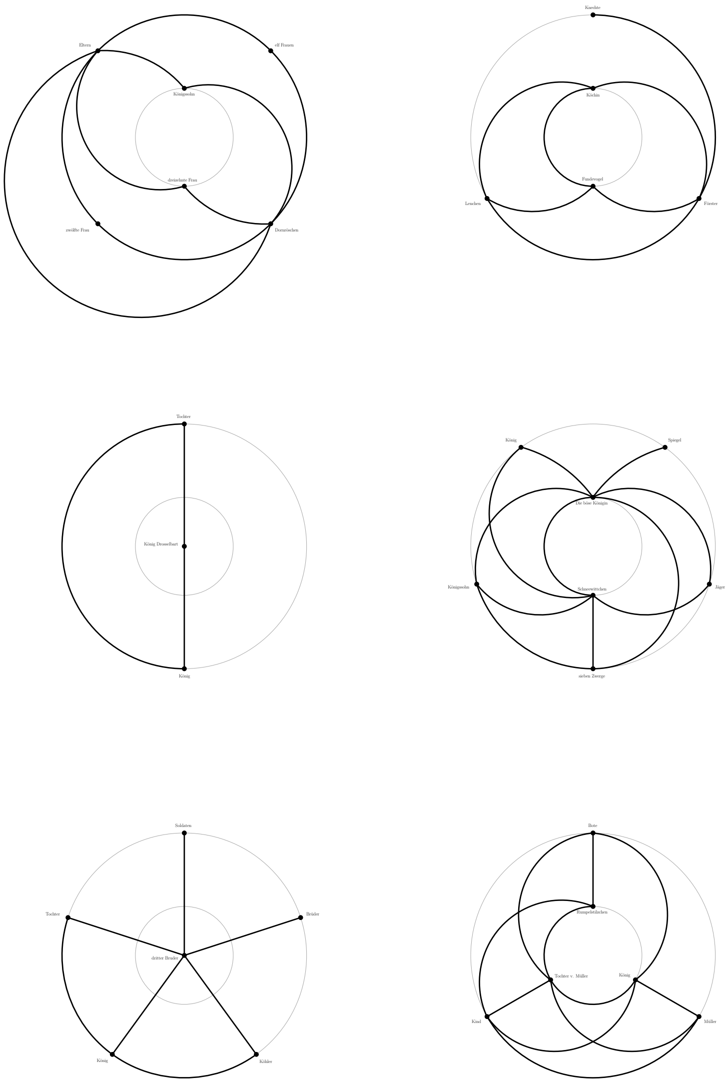


Abb. 12: 050 - Dornröschen, 051 - Fundevogel, 052 - König Drosselbart, 053 - Schneewittchen, 054 - Der Ranzen, das Hütlein und das Hörnlein, 055 - Rumpelstilzchen

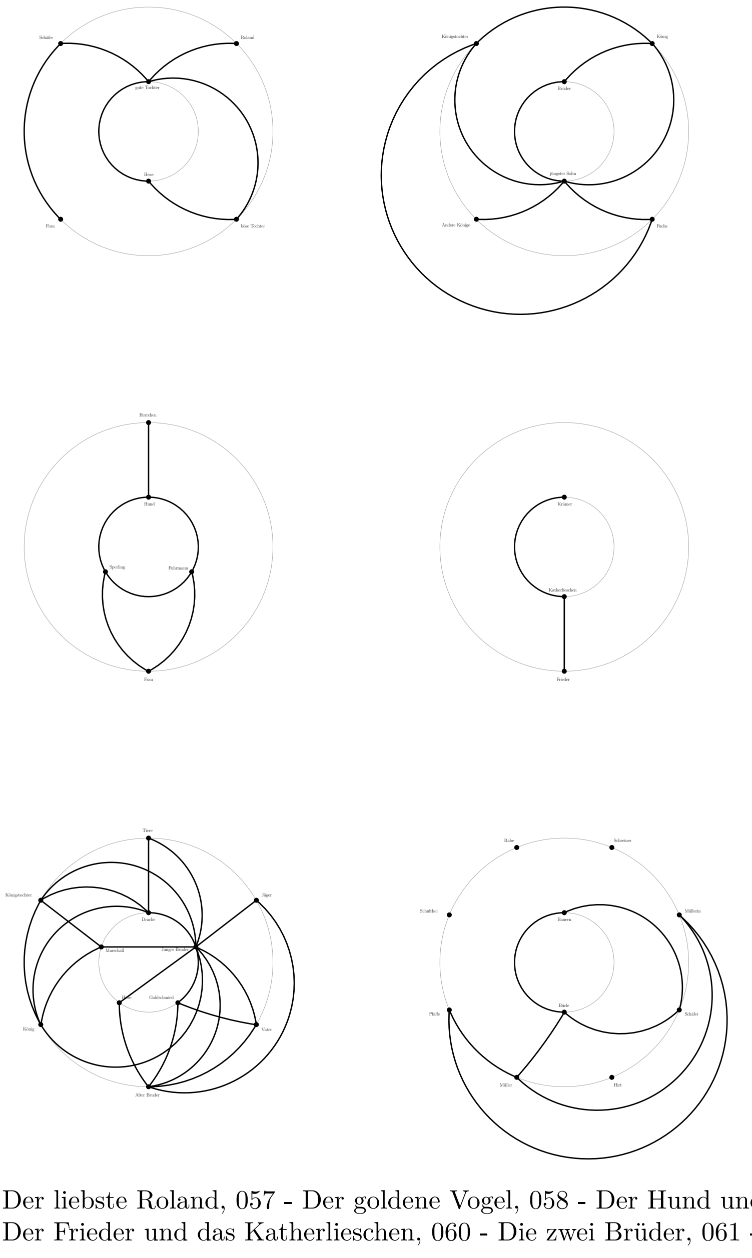


Abb. 13: 056 - Der liebste Roland, 057 - Der goldene Vogel, 058 - Der Hund und der Sperling, 059 - Der Frieder und das Katherlieschen, 060 - Die zwei Brüder, 061 - Das Bürle

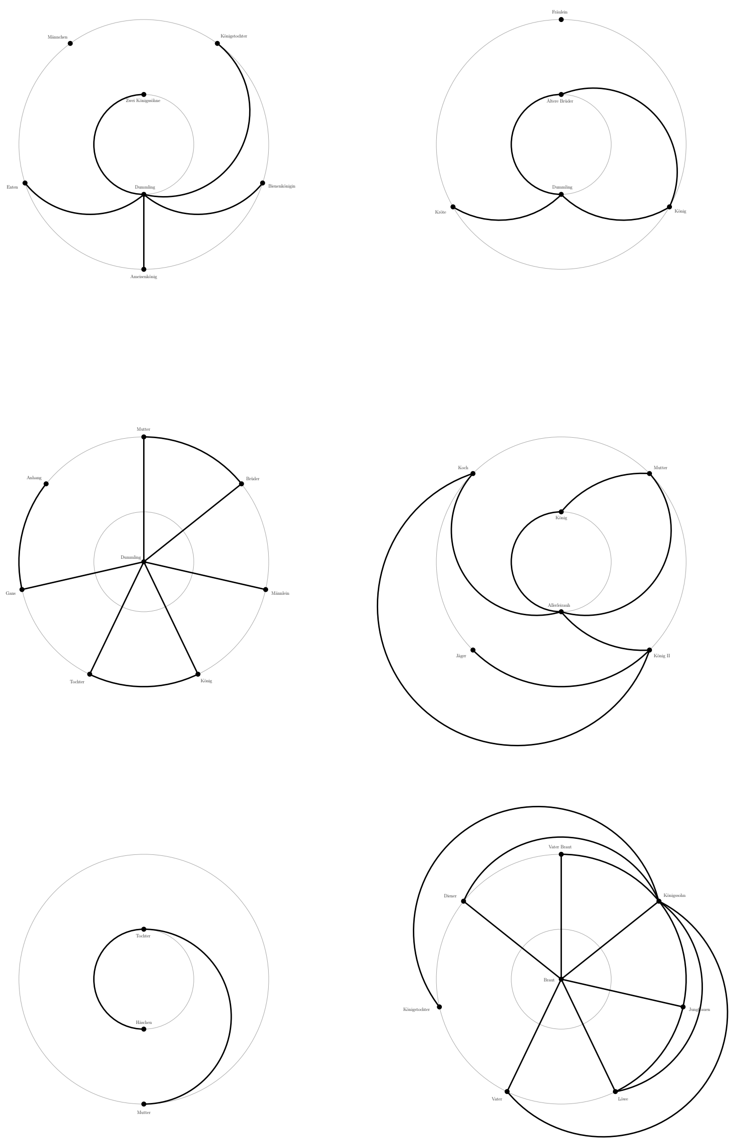


Abb. 14: 062 - Die Bienenkönigin, 063 - Die drei Federn, 064 - Die goldene Gans, 065 - Allerleirauh, 066 - Häsichenbraut , 067 - Die zwölf Jäger

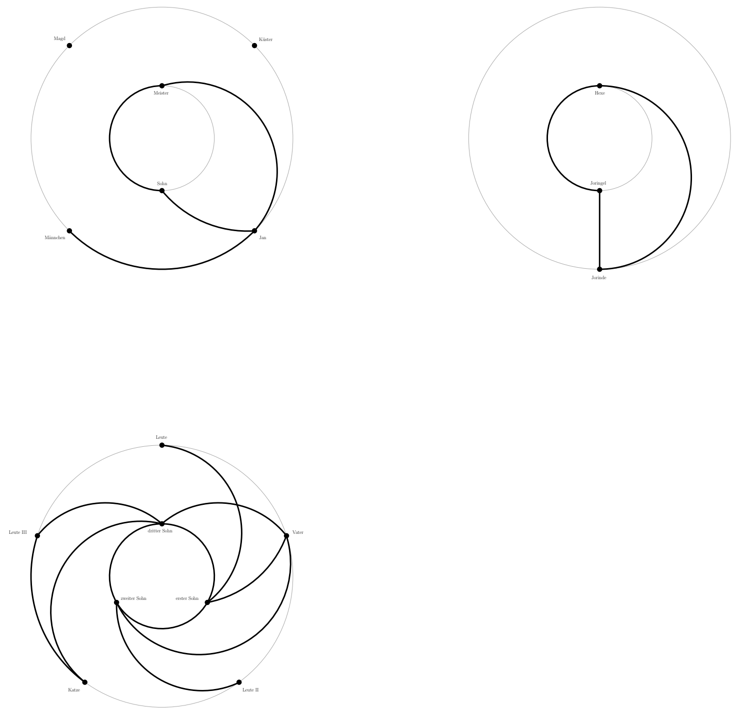


Abb. 15: 068 - Der Gaudieb und sein Meister, 069 - Jorinde und Joringel, 070 - Die drei Glückskinder