Konjunktive Grammatiken mit eingeschränkter Disjunktion

Alexander Okhotin   Christian Reitwießner

1. Oktober 2008
18. Theorietag, Gießen

Konjunktive Grammatiken (CCFL)

Definition (Konjunktive Grammatik)

- Kontextfreie Grammatiken mit zusätzlicher Duchschnittsoperation:
- $G = (\Sigma, N, S, R)$ ist konjunktive Grammatik mit
  - Σ: endl. Alphabet (Terminalsymbole)
  - N: endl. Menge (Nichtterminalsymbole), zu Σ disjunkt
  - $S \in N$: Startsymbol
  - R: endl. Menge von Regeln der Form
    $A \to w \quad$ mit $A \in N$, $w \in \Sigma^*$ oder
    $A \to \varphi_1 \& \varphi_2 \& \ldots \& \varphi_n \quad$ mit $A \in N$, $n \geq 1$, $\varphi_i \in N^+$.

Konjunktive Grammatiken (CCFL), Erzeugung

Definition (Konjunktive Grammatik, Erzeugung)

Definition der von $A \in N$ erzeugten Sprache:

- $L_G^0(A) := \{w \in \Sigma^* \mid A \to w \in R\}$
- $L_G^{i+1}(A) := L_G^i(A) \cup \bigcup_{A \to \varphi_1 \& \ldots \& \varphi_n \in R} \bigcap_{k=1}^n L_G^i(\varphi_k(1)) \cdot \ldots \cdot L_G^i(\varphi_k(|\varphi_k|))$
- $L_G(A) := \bigcup_{i=0}^\infty L_G^i(A)$

Von der Grammatik G erzeugte Sprache:
$L(G) := L_G(S)$

Beispiel

Beispiel ($\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$)

$$
\begin{array}{ll}
S \to AB \,\&\, DC & \\
A \to aA & A \to \epsilon \\
B \to bBc & B \to \epsilon \\
C \to Cc & C \to \epsilon \\
D \to aDb & D \to \epsilon
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
L_G(S) &= L_G(A)L_G(B) \cap L_G(D)L_G(C) \\
&= a^*\{b^n c^n \mid n \geq 0\} \cap \{a^n b^n \mid n \geq 0\}c^* \\
&= \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Beispiel ($\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$)

$$L_G(S) = L_G(A)L_G(B) \cap L_G(D)L_G(C) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

- $L_G(S)$ nicht kontext-frei, Durchschnitt also essentiell.
- Allerdings: $L_G(S)$ ist „nur“ Durchschnitt zweier kontext-freier Sprachen, dies geht offensichtlich mit konjunktiven Grammatiken.

Es geht noch mehr

Satz (Okhotin, 2000)

$\{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\} \in \mathrm{CCFL}$

Bemerkung: Diese Sprache kann nicht als endlicher Durchschnitt von kontext-freien Sprachen dargestellt werden (Wotschke, 1973).

Auf dem Weg zu eingeschränkter Disjunktion

Bemerkung

- Iterierter Durchschnitt ist also mächtiger als endlicher Durchschnitt.
- Wie sieht es jedoch mit iterierter Vereinigung aus?
- Problem: Komplett ohne Vereinigung (genau eine Regel pro Nichtterminal) bekommt man nur endliche Mengen.

Zur Erinnerung

- $L_G^0(A) := \{w \in \Sigma^* \mid A \to w \in R\}$
- $L_G^{i+1}(A) := L_G^i(A) \cup \bigcup_{A \to \varphi_1 \& \dots \& \varphi_n \in R} \bigcap_{k=1}^{n} L_G^i(\varphi_k(1)) \cdot \dots \cdot L_G^i(\varphi_k(|\varphi_k|))$
- $L_G(A) := \bigcup_{i=0}^{\infty} L_G^i(A)$

Eingeschränkte Disjunktion

Definition

Eine konjunktive Grammatik $G = (\Sigma, N, S, R)$ hat (nur) eingeschränkte Disjunktionen, wenn es für jedes Nichtterminal $A \in N$ maximal eine Regel der Form $A \to \varphi_1 \& \ldots \& \varphi_n$ mit $n \geq 1$, $\varphi_i \in N^+$, $i = 1, \ldots, n$ gibt.

Beispiel für eingeschränkte Grammatik

Beispiel (Palindrome ungerader Länge)

Ursprüngliche Grammatik:

$$S \to aSa \qquad S \to bSb \qquad S \to a \qquad S \to b$$

Eingeschränkte Grammatik:

$$\begin{array}{llll}
A \to aSa & A \to \epsilon & B \to bSb & B \to \epsilon \\
O \to OOO & O \to a & O \to b & \\
S \to AB \,\&\, O & S \to a & S \to b &
\end{array}$$

Beobachtung

Für $X, Y \subseteq \text{ODD} := \{w \mid |w| \text{ ungerade}\}$ gilt
$(X \cup \epsilon)(Y \cup \epsilon) \cap \text{ODD} = (XY \cup X \cup Y \cup \epsilon) \cap \text{ODD} = X \cup Y$.

Gleiche Technik, nur allgemeiner

Satz

Eine Sprache kann genau dann von einer konjunktiven Grammatik mit eingeschränkter Disjunktion erzeugt werden, wenn sie von einer konjunktiven Grammatik erzeugt werden kann.

Auf den nächsten zwei Folien: Beweishäppchen

Ungerade Normalform

Definition (Ungerade Normalform)

Eine konjunktive Grammatik $G = (\Sigma, N, S, R)$ ist in ungerader Normalform, wenn alle Regeln in R von der Form

$$\begin{array}{ll} A \to a & \text{mit } A \in N, a \in \Sigma \text{ oder} \\ A \to B_1 a_1 C_1 \,\&\, \ldots \,\&\, B_n a_n C_n & \text{mit } n \geq 1, A, B_i, C_i \in N, a_i \in \Sigma \end{array}$$

sind.

Wie hilft uns diese Normalform?

Lemma

Für jede konjunktive Grammatik $G = (\Sigma, N, S, R)$, die eine Teilmenge von ODD *erzeugt, gibt es eine konjunktive Grammatik mit eingeschränkten Disjunktionen, die diese Sprache erzeugt.*

Konstruktionsidee.

Benutze ungerade Normalform, transformiere Regeln $A \to B$, $A \to C$ zu $A \to (B \cup \{\epsilon\})(C \cup \{\epsilon\}) \cap \text{ODD}$. □

Weitere Einschränkung

Bemerkung

- Konstruktion hat Regeln der Form $A \longrightarrow \epsilon$ stark ausgenutzt
- Kann man zusätzlich noch ohne diese Regeln auskommen?

Mächtigkeit von eingeschränkte Grammatiken ohne ϵ-Regeln

Bemerkung

Eingeschränkte Grammatiken ohne ϵ-Regeln können erzeugen:

- jede reguläre Sprache
- die Palindrome
- $\{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- viele weitere Sprachen

Fazit

Fazit

Für konjunktive Grammatiken gilt:

- Iterierter Durchschnitt ist wesentlich.
- Sowohl iterierte Vereinigung als auch endliche Vereinigung am Ende können (gleichzeitig) durch iterierte Vereinigung mit endlichen Mengen ersetzt werden.
- Bei vielen Sprachen kann man dabei sogar noch auf ϵ verzichten.

Wie geht es weiter?

Offene Fragen

- Können eingeschränkte Grammatiken ohne ϵ-Regeln alle konjunktiven Sprachen erzeugen?
- Unabhängig von dieser Frage: Kann man zeigen, dass eine (z.B. kontextsensitive) Sprache von solchen Grammatiken nicht erzeugt werden kann?
- Ist CCFL $\subsetneq$ CSL?