

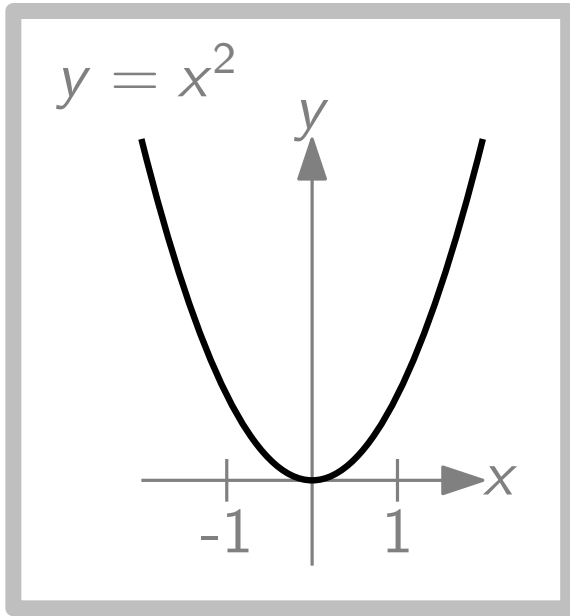
Winkelschematisierung im Graphenzeichnen

Angular Schematization
in Graph Drawing

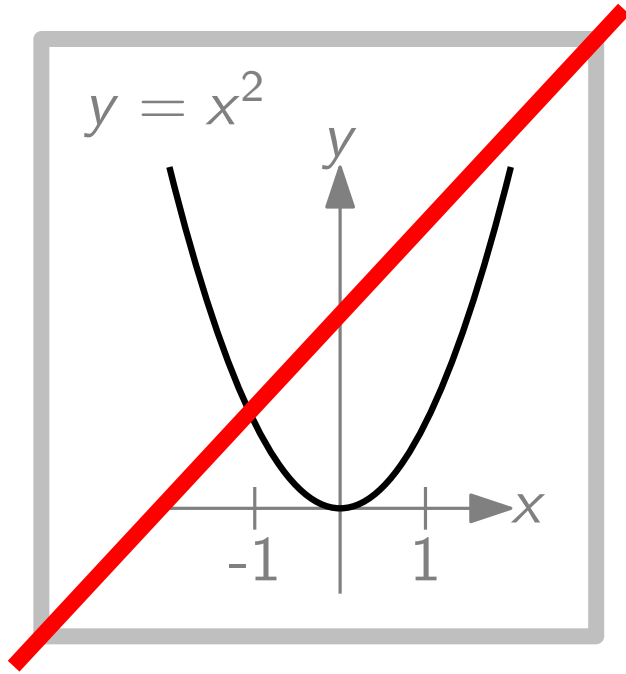
Philipp Kindermann
Lehrstuhl für Informatik I
Universität Würzburg

Größtenteils finanziert durch das ERC/DFG-Projekt
„Graph Drawing and Geometric Representations“ (Wo 758/5-1)

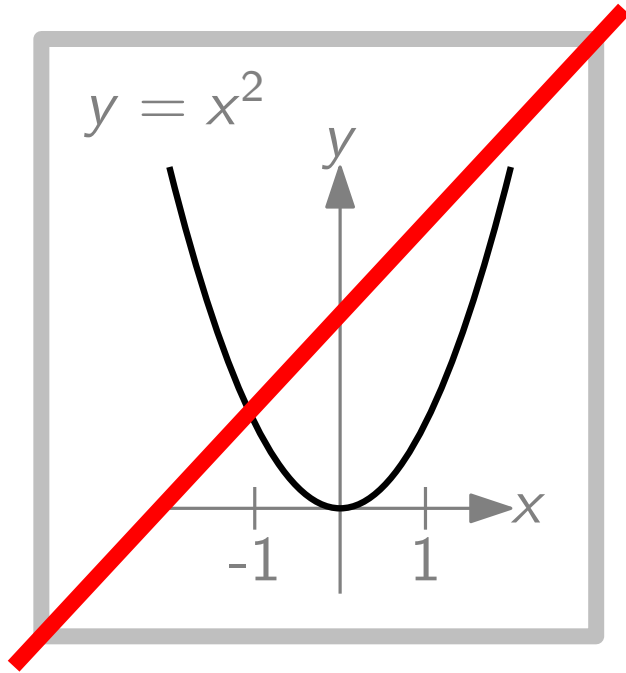
Graphenzeichnen?



Graphenzeichnen?



Graphenzeichnen?

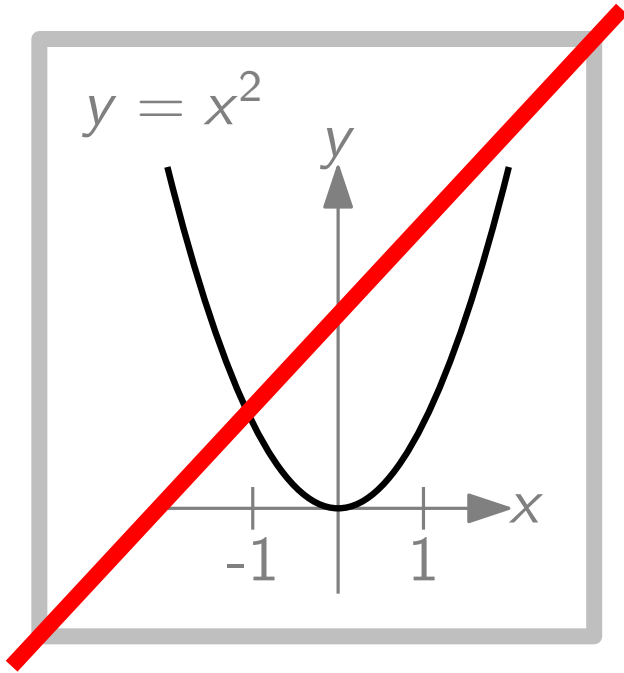


Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$

– V *Knotenmenge* und

– $E \subseteq \binom{V}{2}$ *Kantenmenge*

Graphenzeichnen?

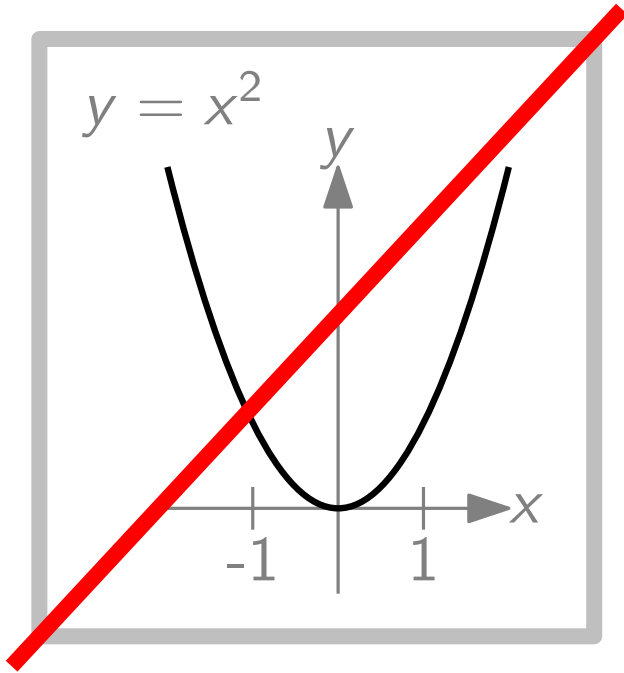


Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$

- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ *Kantenmenge*

Bsp. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $E = \{ \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\} \}$

Graphenzeichnen?



Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$

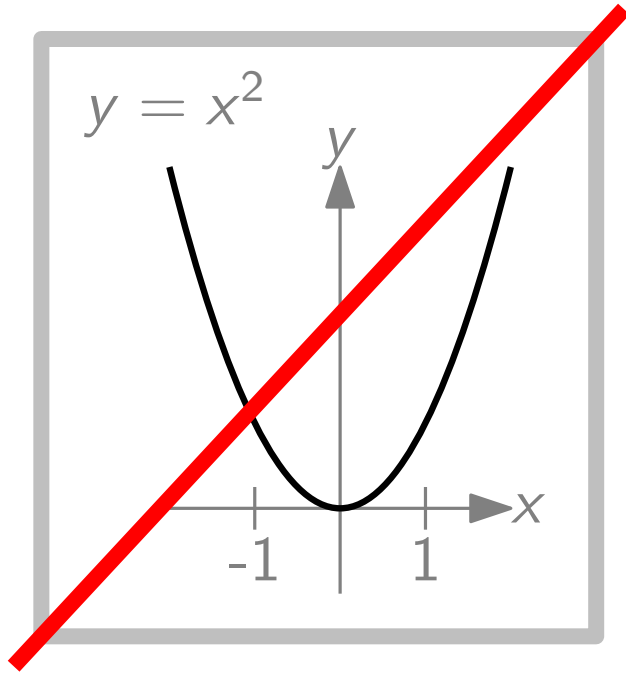
- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ *Kantenmenge*

Bsp. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{ \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\} \}$



Graphenzeichnen?



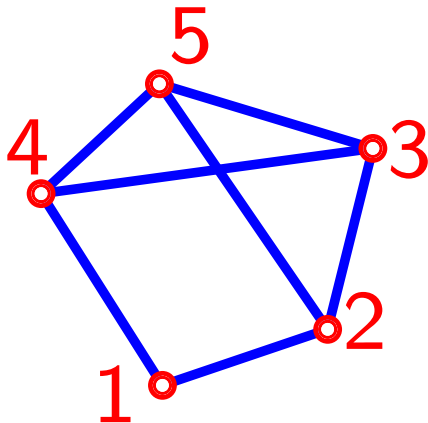
Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$

– V *Knotenmenge* und

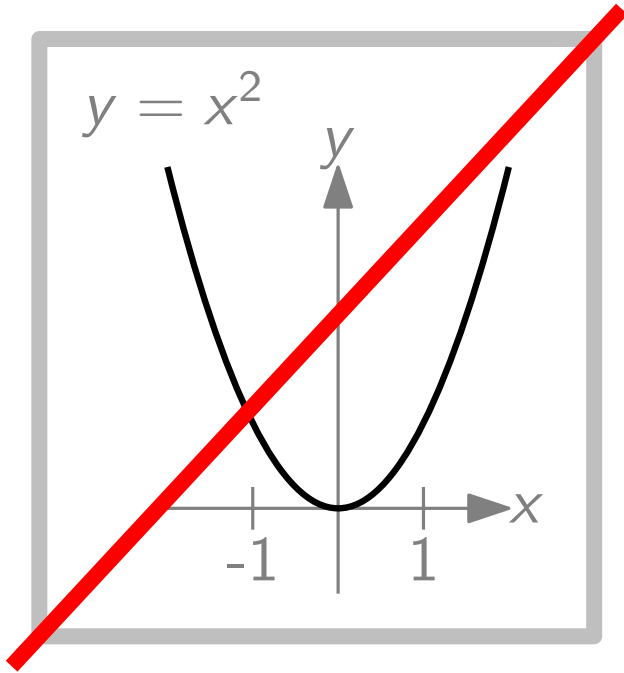
– $E \subseteq \binom{V}{2}$ *Kantenmenge*

Bsp. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{ \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\} \}$



Graphenzeichnen?



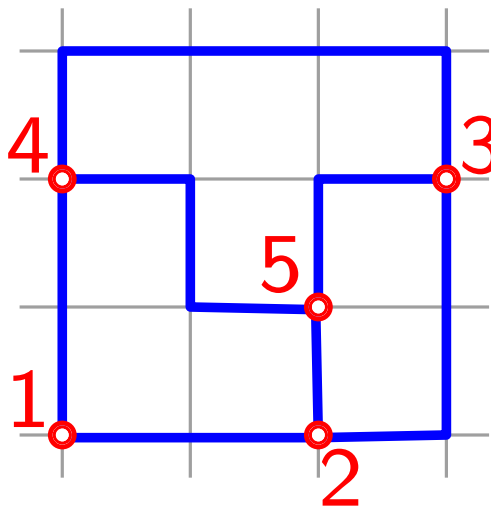
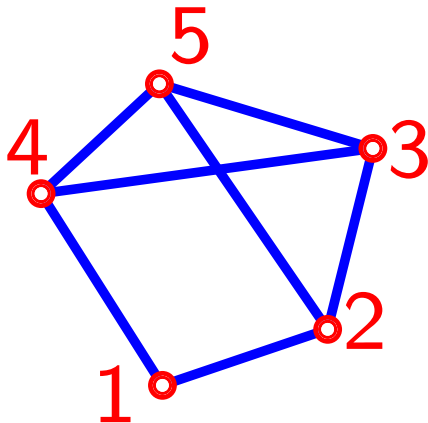
Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$

– V *Knotenmenge* und

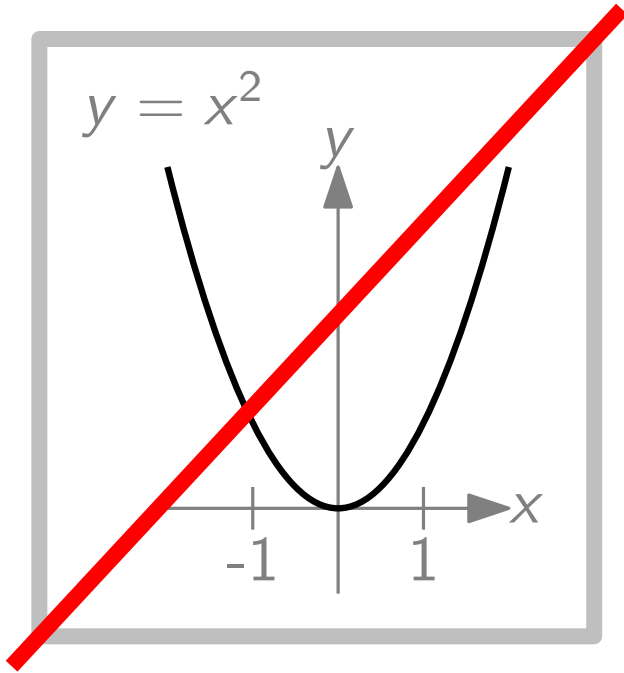
– $E \subseteq \binom{V}{2}$ *Kantenmenge*

Bsp. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{ \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\} \}$



Graphenzeichnen?



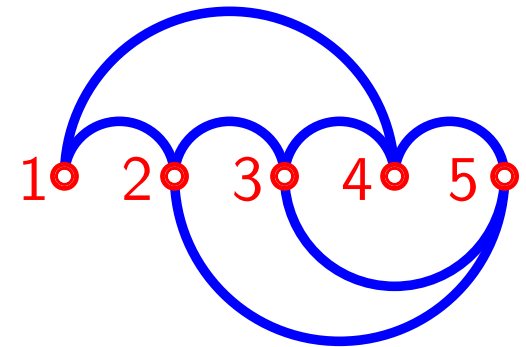
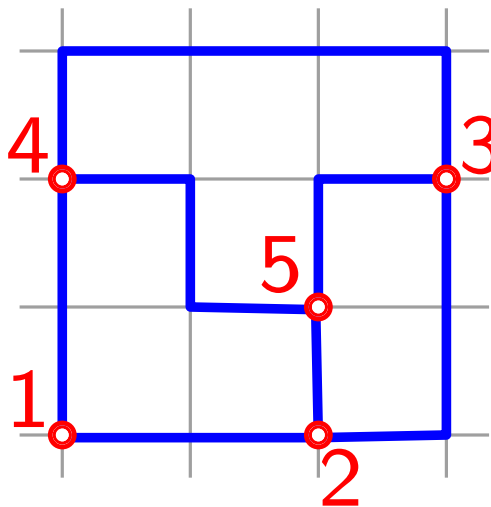
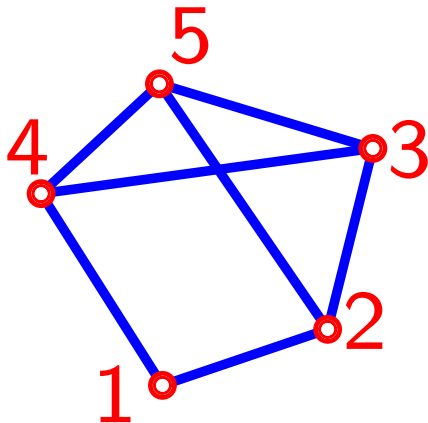
Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$

– V *Knotenmenge* und

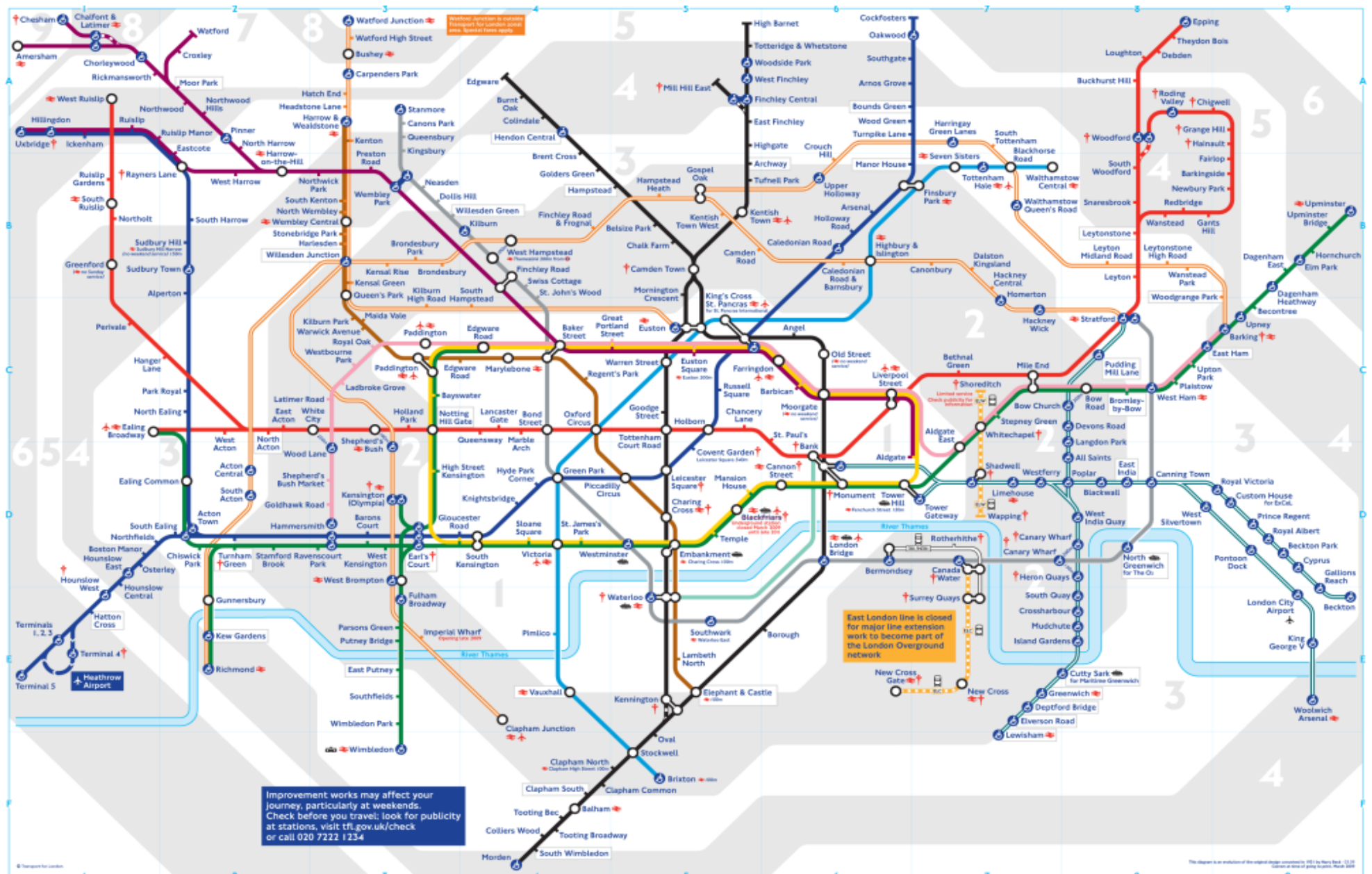
– $E \subseteq \binom{V}{2}$ *Kantenmenge*

Bsp. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{ \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\} \}$



Graphenzeichnen?

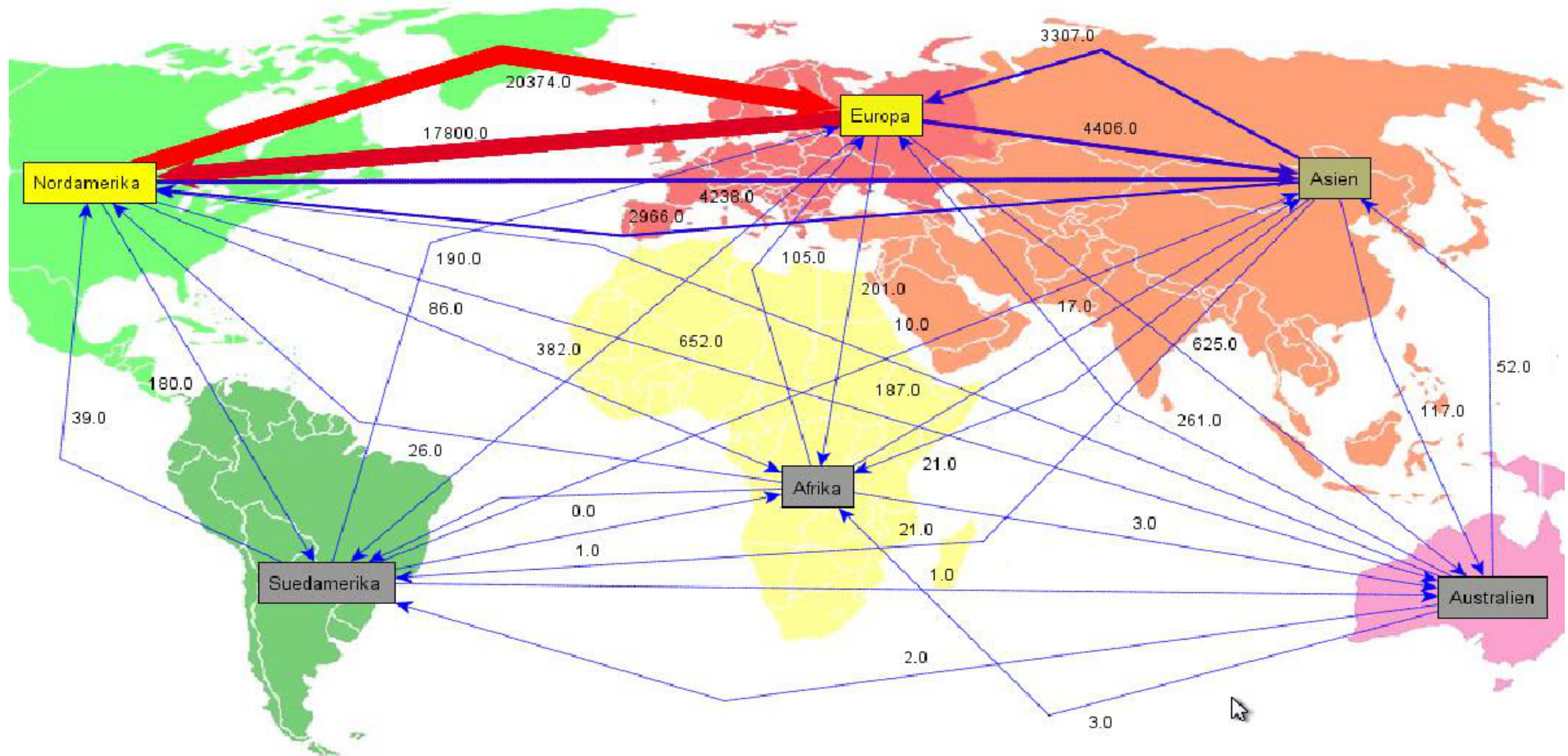


Londoner U-Bahn Liniennetzplan von Transport for London

Graphenzeichnen?

Kontinentale Aufteilung

2001 - 2005



Legende:

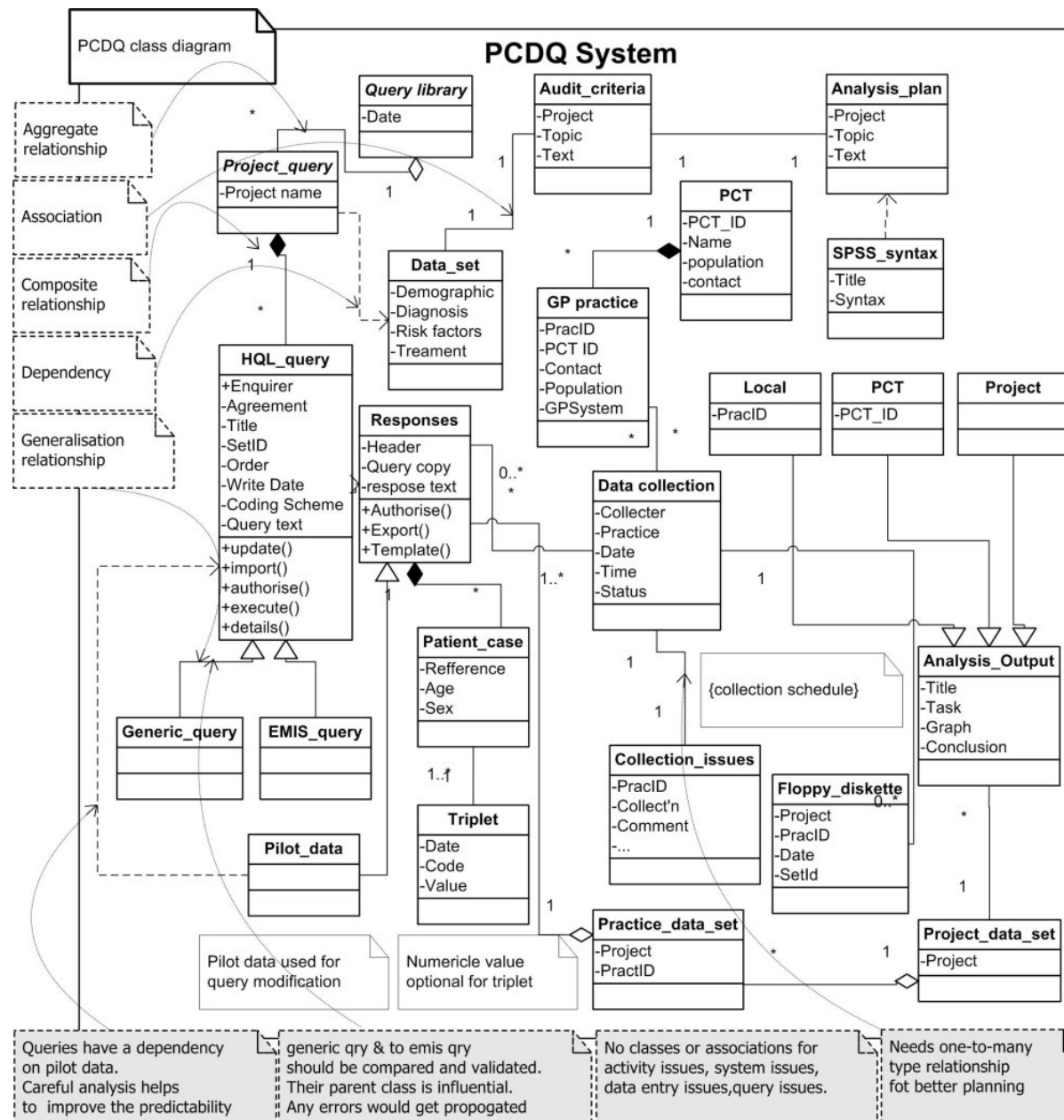
Kantengewicht:

█ Maximum
█ Minimum

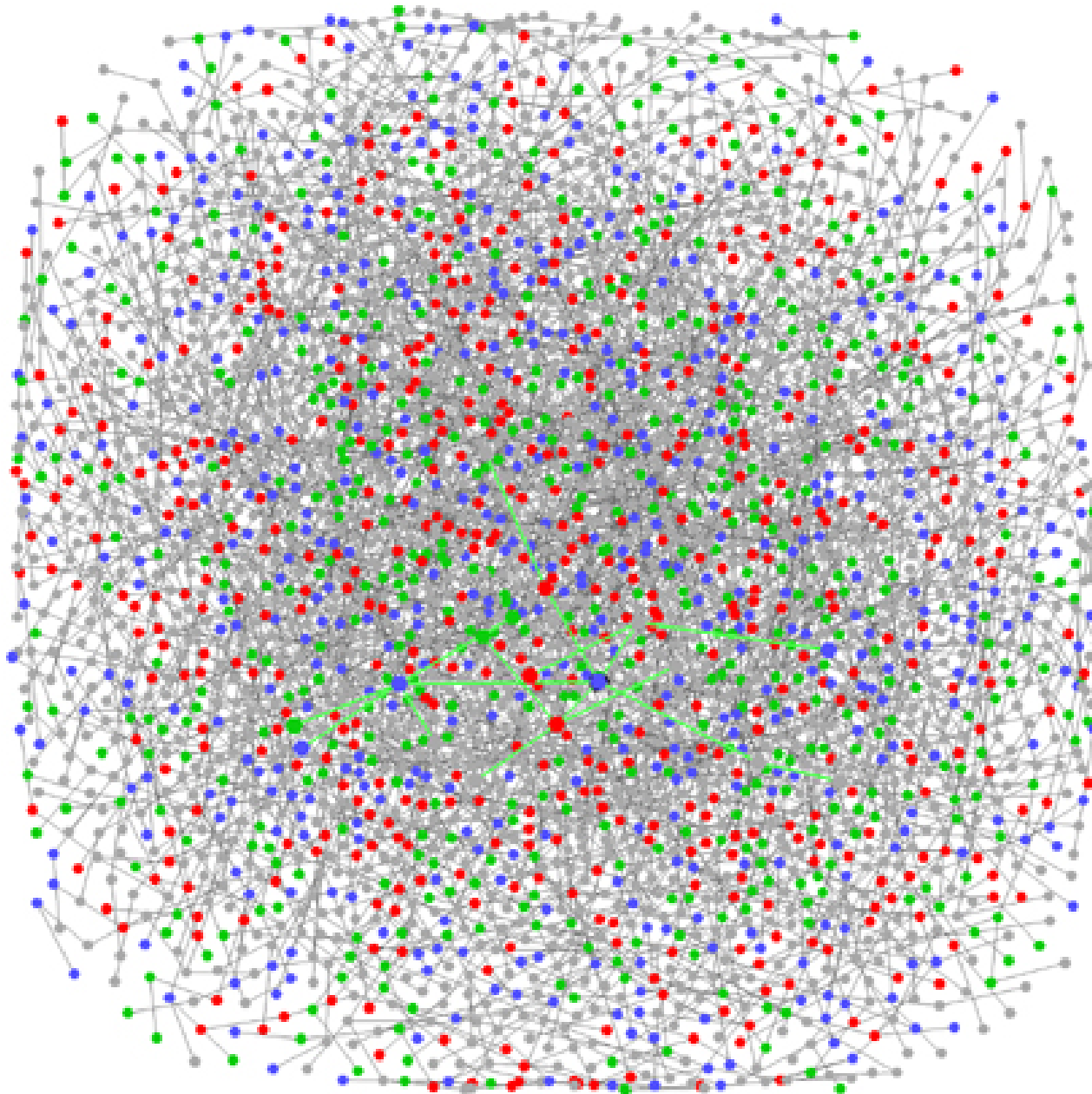
Ausgangsgrad:

█ Maximum
█ Minimum

Graphenzeichnen?



Graphenzeichnen?



[Wave & Bobrow, InfoVis 2005]

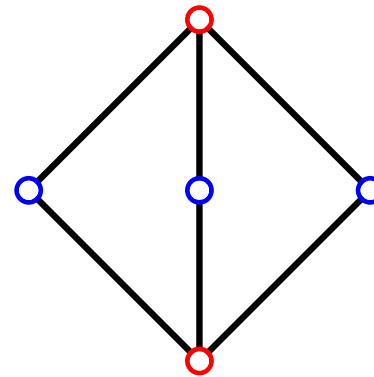
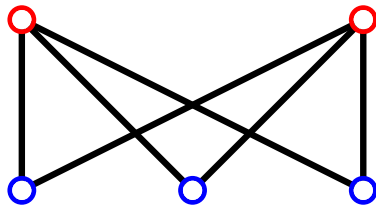
Winkelschematisierung

Schöne Zeichnungen?

Winkelschematisierung

Schöne Zeichnungen?

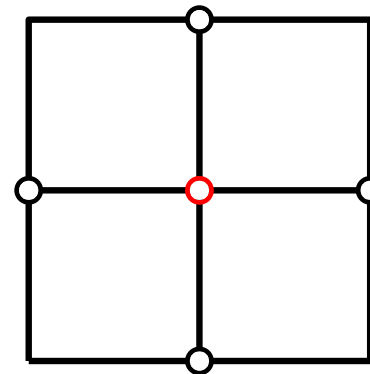
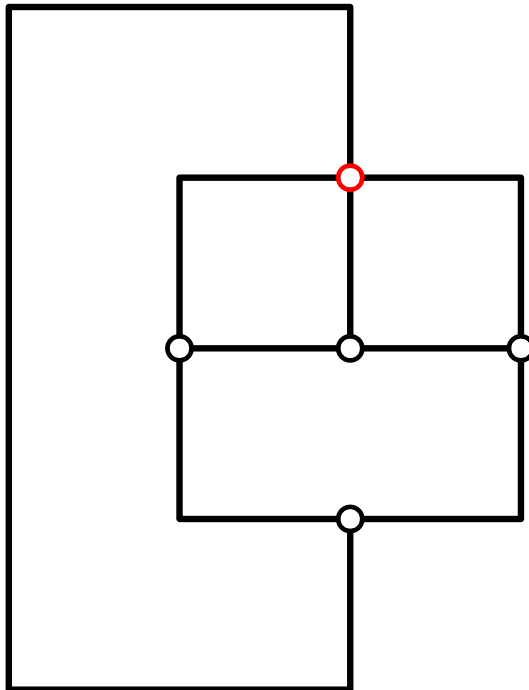
– Kreuzungsminimierung



Winkelschematisierung

Schöne Zeichnungen?

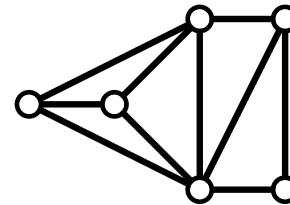
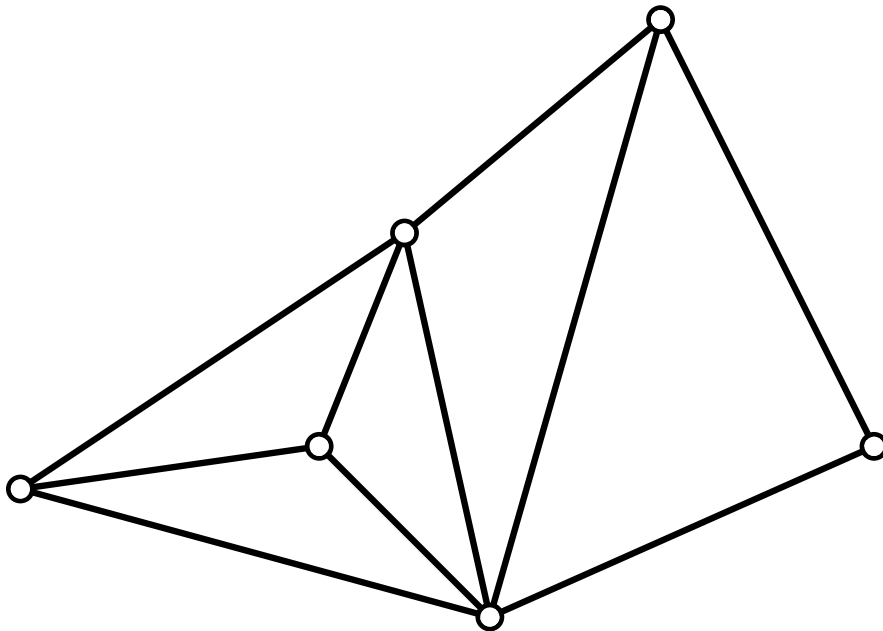
- Kreuzungsminimierung
- Knickminimierung



Winkelschematisierung

Schöne Zeichnungen?

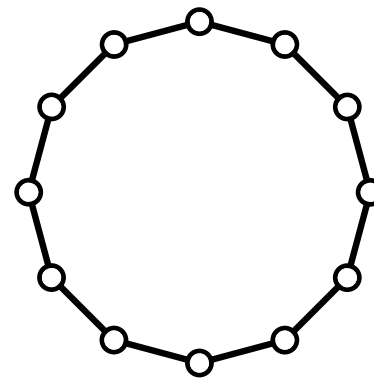
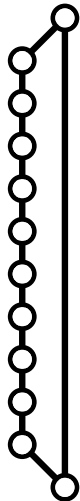
- Kreuzungsminimierung
- Knickminimierung
- minimale Fläche



Winkelschematisierung

Schöne Zeichnungen?

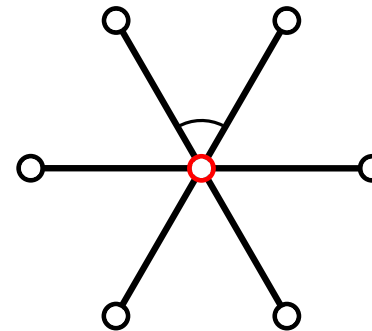
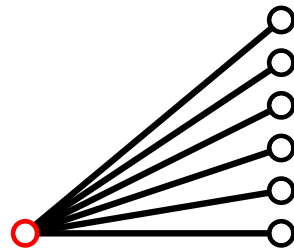
- Kreuzungsminimierung
- Knickminimierung
- minimale Fläche
- gleichmäßige Kantenlängen



Winkelschematisierung

Schöne Zeichnungen?

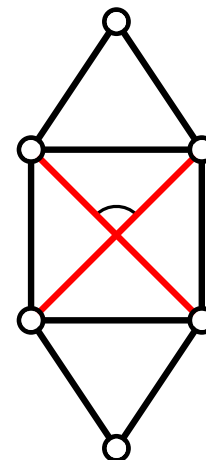
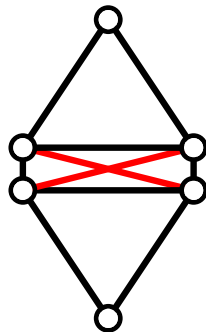
- Kreuzungsminimierung
- Knickminimierung
- minimale Fläche
- gleichmäßige Kantenlängen
- große Winkel
 - an Knoten



Winkelschematisierung

Schöne Zeichnungen?

- Kreuzungsminimierung
- Knickminimierung
- minimale Fläche
- gleichmäßige Kantenlängen
- große Winkel
 - an Knoten
 - an Kreuzungen



Gliederung

I. Platzieren von Boxen

- 1) Mehrseitige Randbeschriftungen
- 2) Approximationsalgorithmen für Rechtecks-Kontakt-Repräsentationen

II. Visuelle Führung

- 3) Glatt-orthogonale Darstellungen planarer Graphen
- 4) Monotone Zeichnungen von Bäumen

II. Kreuzungen mit großen Winkeln

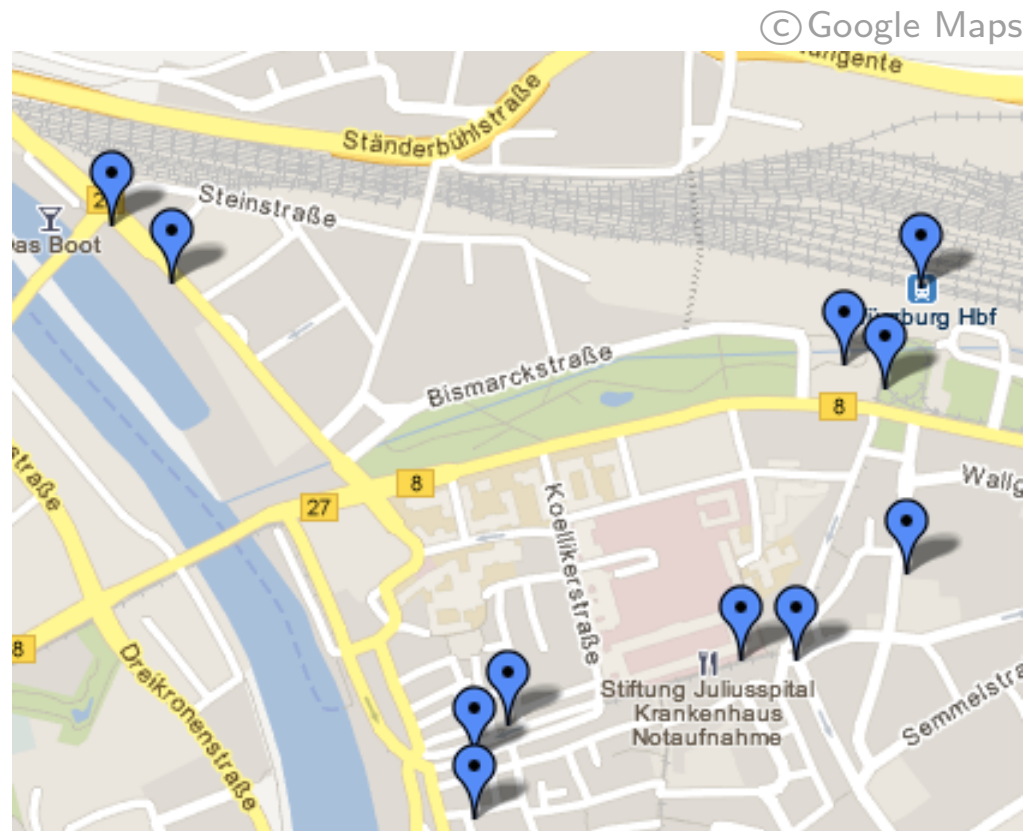
- 5) Gleichzeitiges Zeichnen planarer Graphen mit rechtwinkligen Kreuzungen und wenig Knicken
- 6) Erkennen und Zeichnen von Graphen mit unabhängigen Kreuzungen

Teil 1:

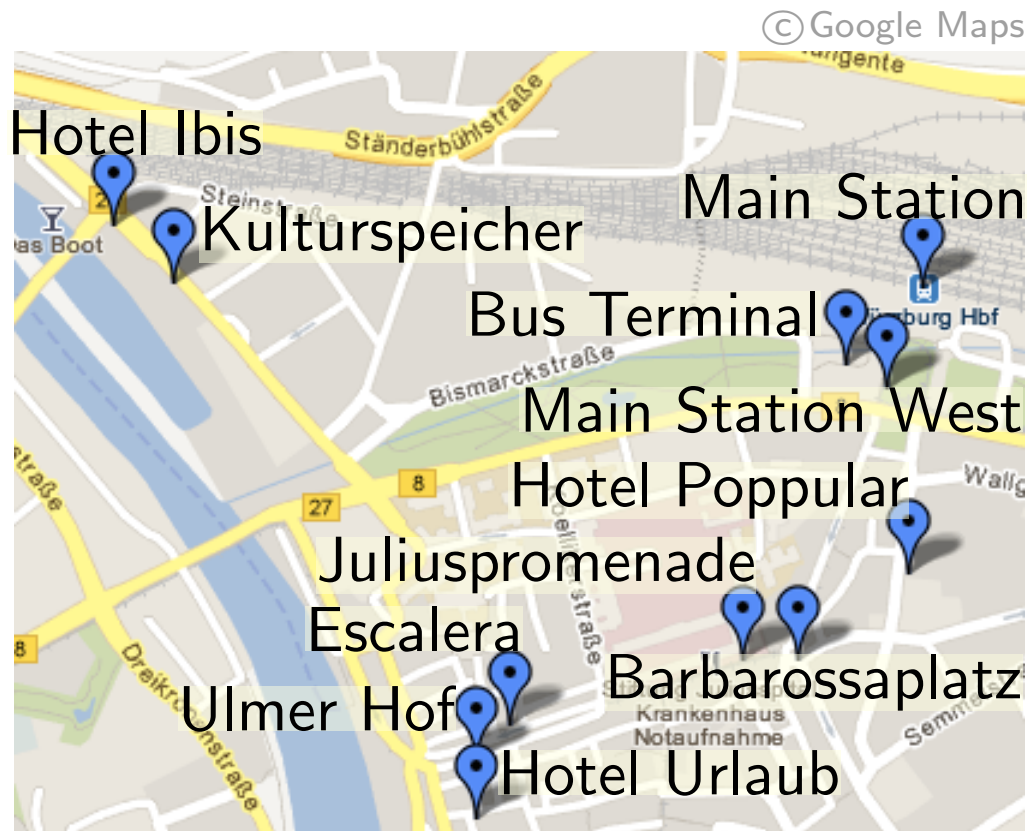
Mehrseitige

Randbeschriftungen

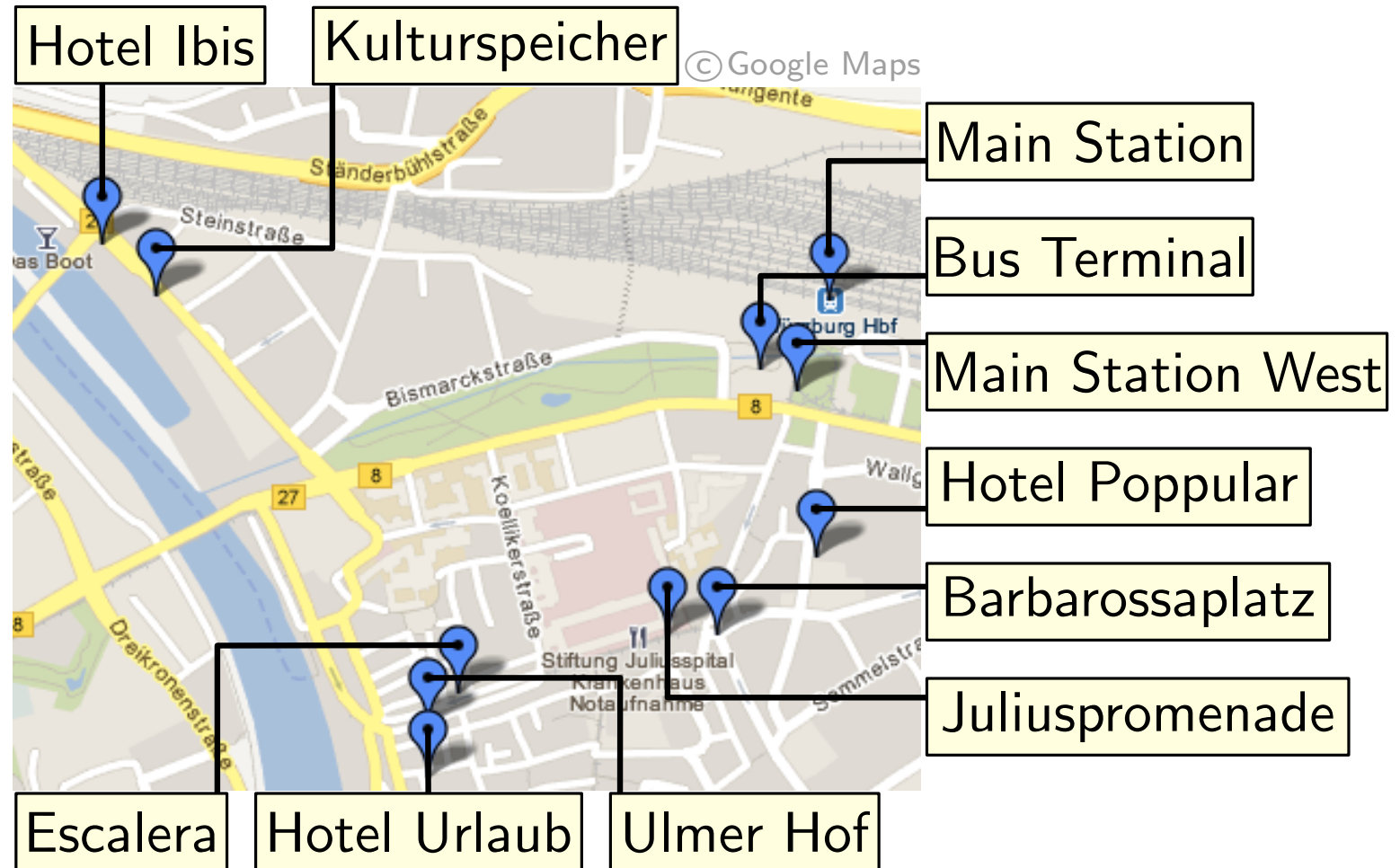
Randbeschriftungen



Randbeschriftungen



Randbeschriftungen



Randbeschriftungen

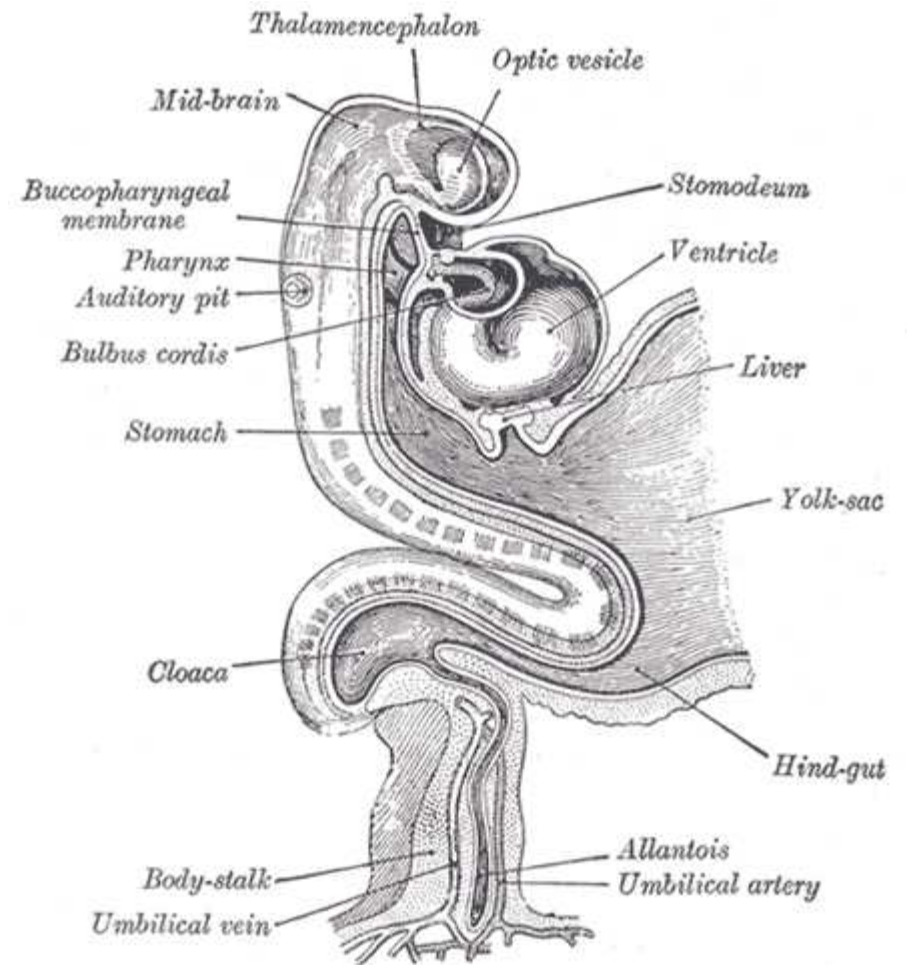


©DW-TV

Randbeschriftungen



©DW-TV

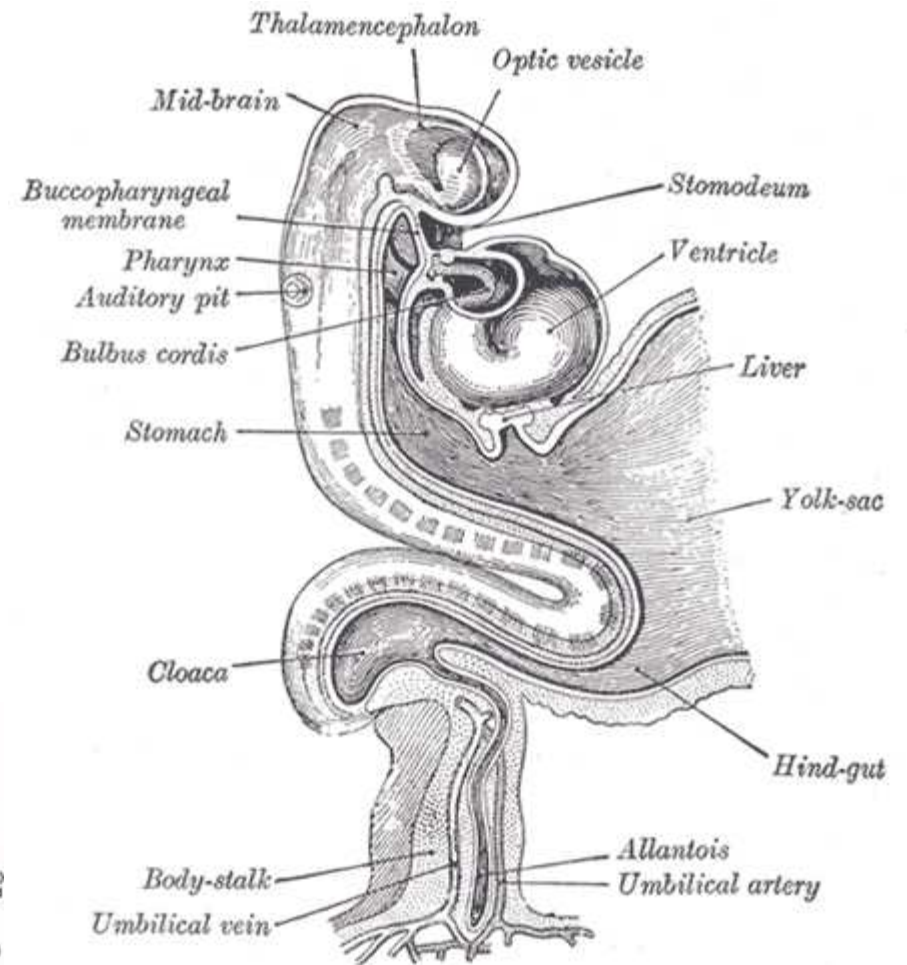
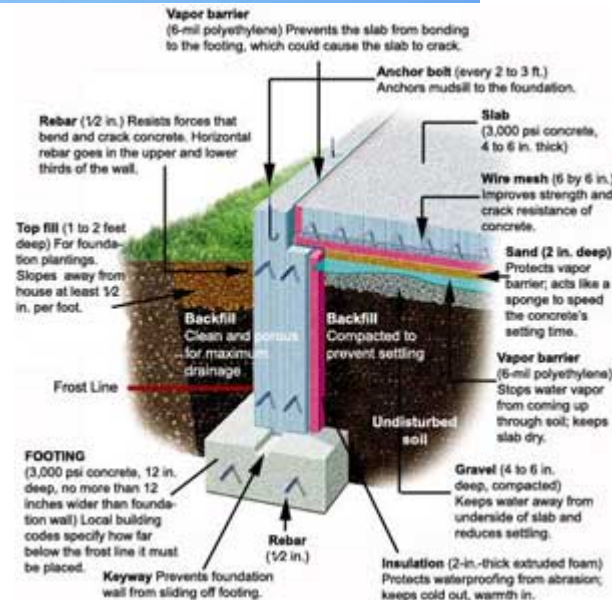


Henry Vandyke Carter, via Wikimedia Commons

Randbeschriftungen



©DW-TV



Henry Vandyke Carter, via Wikimedia Commons

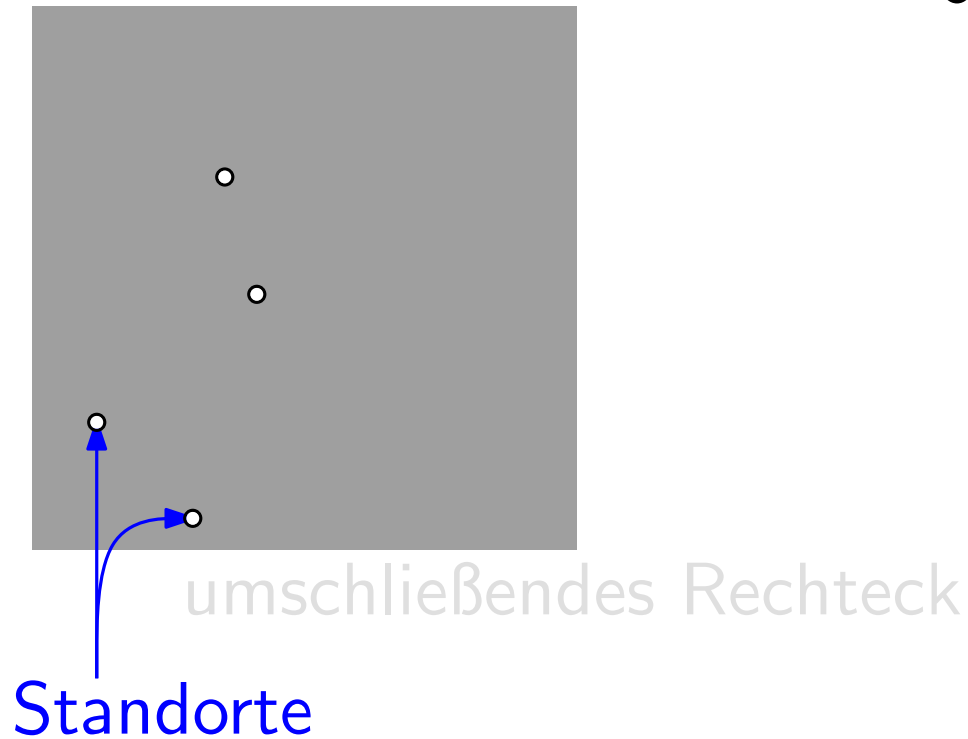
Randbeschriftungen – Problembeschreibung



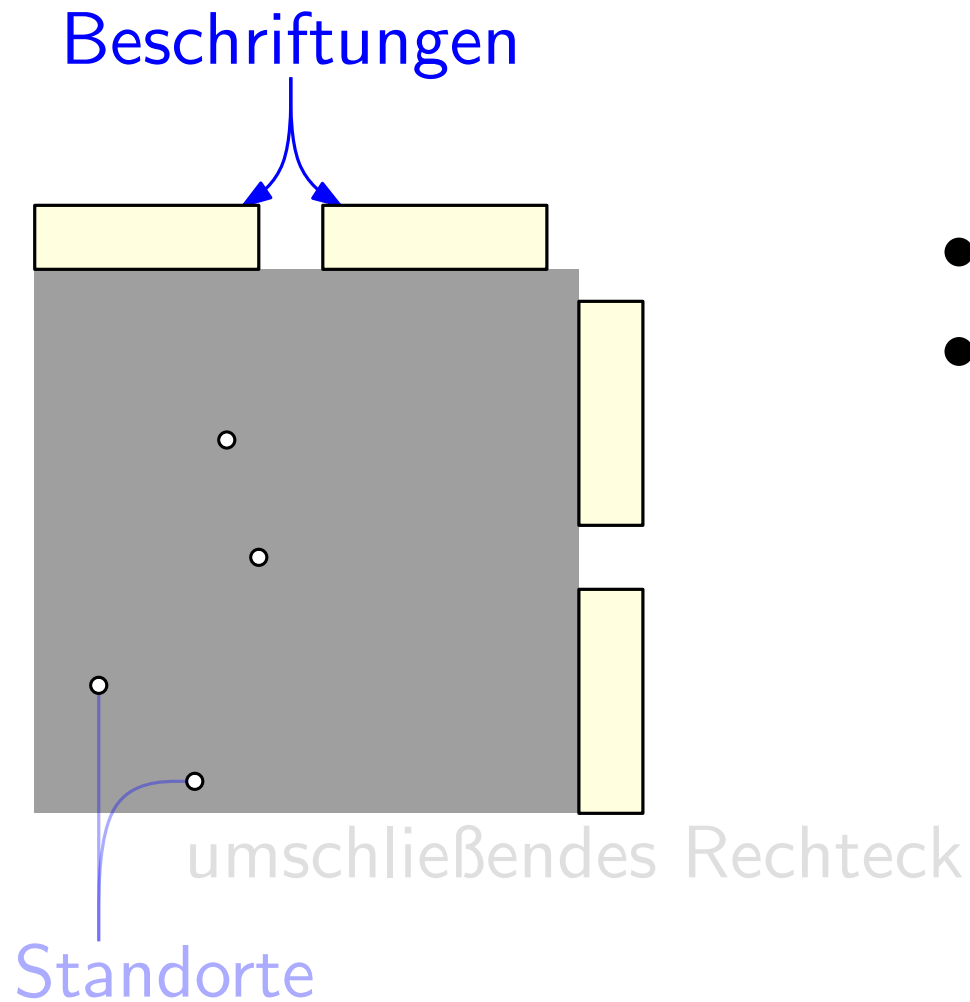
umschließendes Rechteck

Randbeschriftungen – Problembeschreibung

- *Standorte* im Rechteck

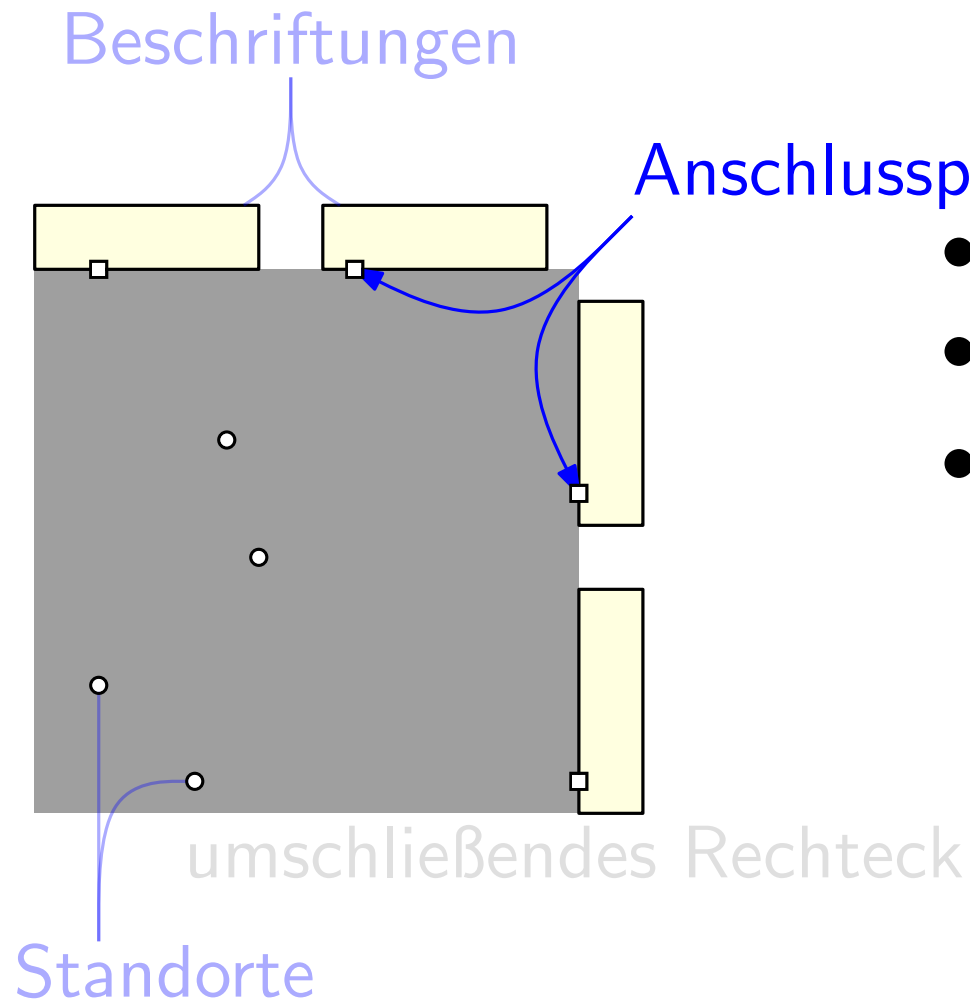


Randbeschriftungen – Problembeschreibung



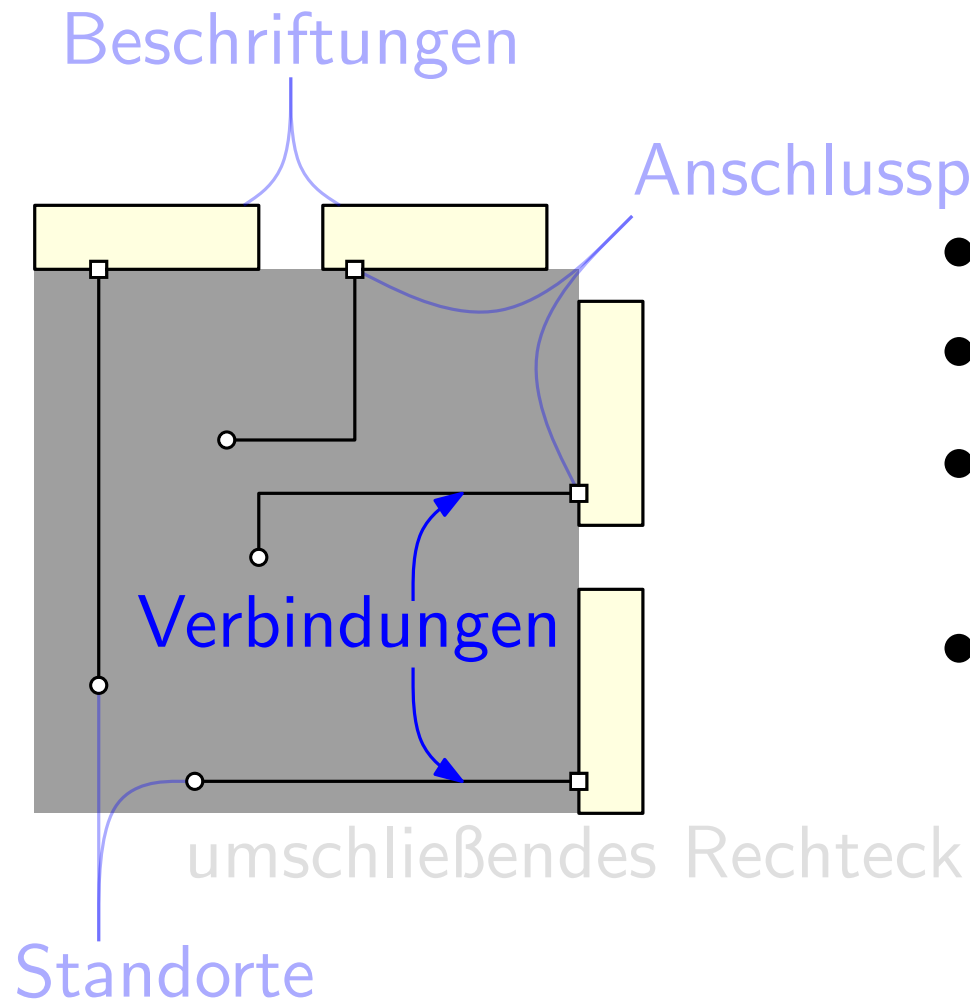
- *Standorte* im Rechteck
- *Beschriftungen* am Rand

Randbeschriftungen – Problembeschreibung



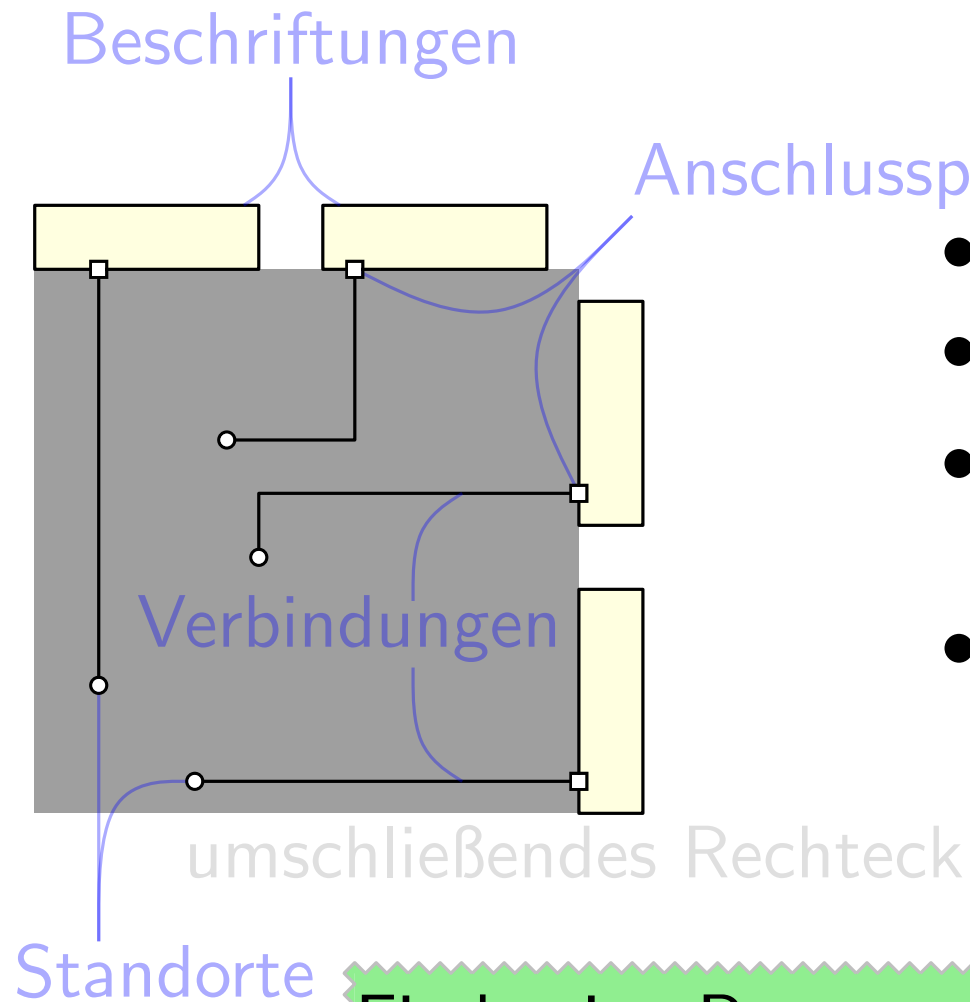
- *Standorte* im Rechteck
- *Beschriftungen* am Rand
- *Anschlusspunkte* sind fest oder verschiebbar

Randbeschriftungen – Problembeschreibung



- *Standorte* im Rechteck
- *Beschriftungen* am Rand
- *Anschlusspunkte* sind fest oder verschiebbar
- *Verbindungen* haben vorgeschriebenen Stil

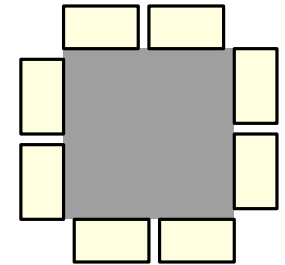
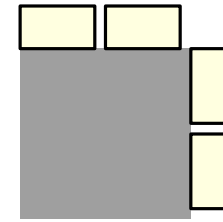
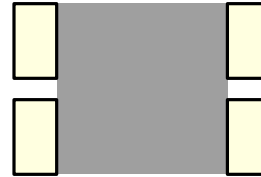
Randbeschriftungen – Problembeschreibung



- *Standorte* im Rechteck
- *Beschriftungen* am Rand
- *Anschlusspunkte* sind fest oder verschiebbar
- *Verbindungen* haben vorgeschriebenen Stil

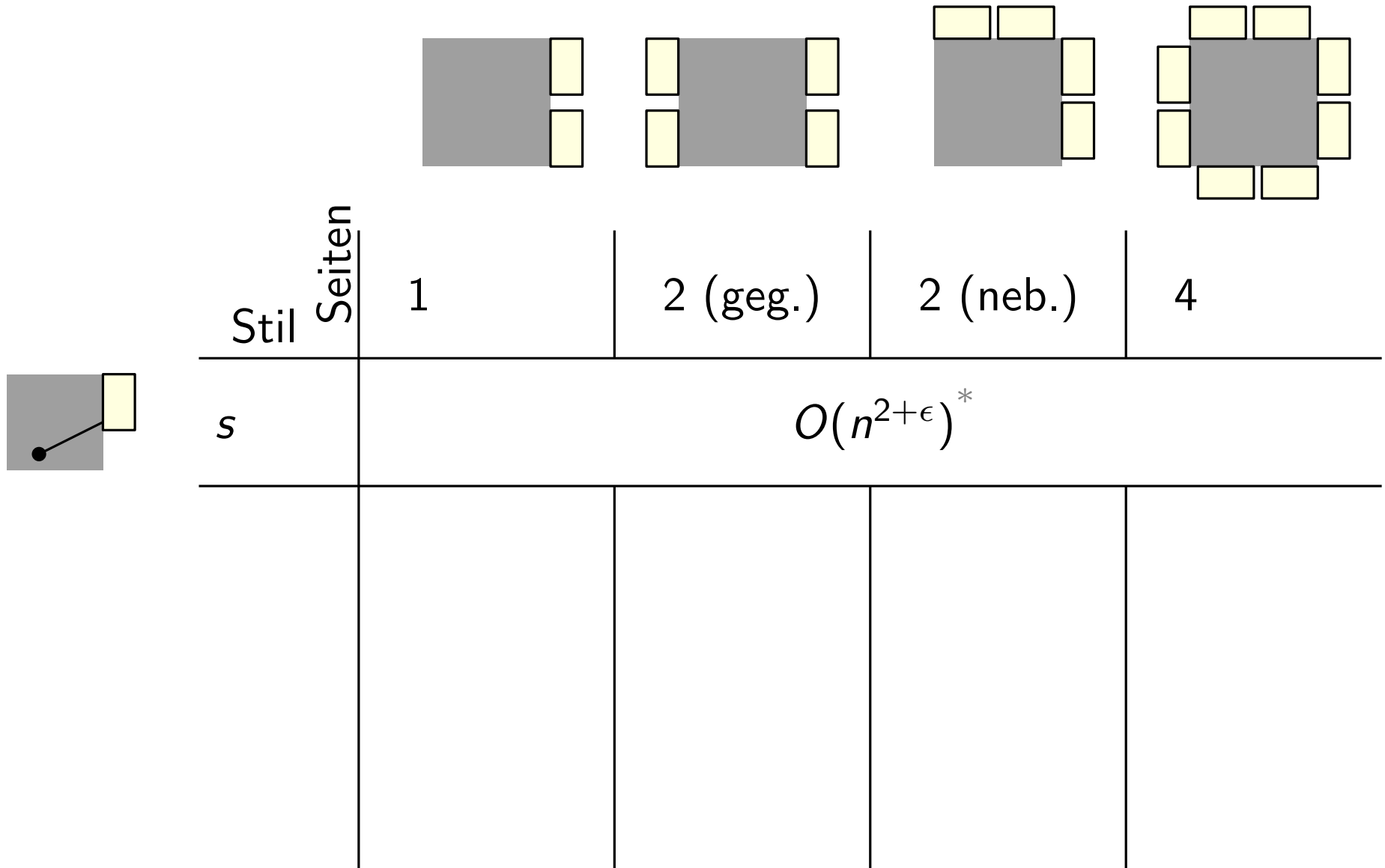
Finde eine Paarung von Standorten und Beschriftungen mit kreuzungsfreien Verbindungen

Randbeschriftungen – Bekannte Resultate



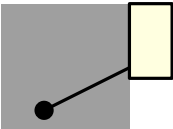
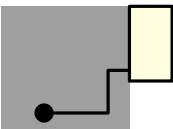
Stil	Seiten	1	2 (geg.)	2 (neb.)	4

Randbeschriftungen – Bekannte Resultate



* Bekos et al. [CGTA'07]

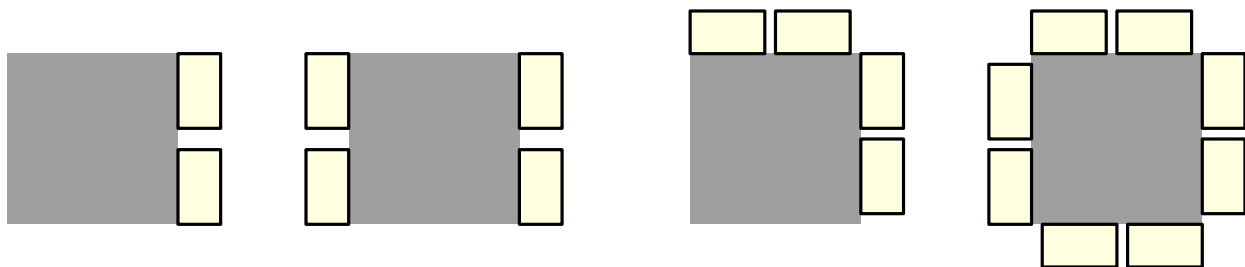
Randbeschriftungen – Bekannte Resultate

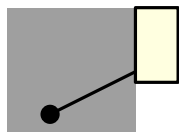
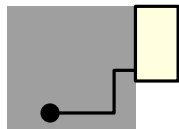
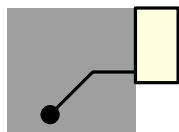



Stil		Seiten			
		1	2 (geg.)	2 (neb.)	4
<i>s</i>		$O(n^{2+\epsilon})^*$			
<i>opo</i>		$O(n \log n)^*$	$O(n^2)^*$	$O(n^2 \log^3 n)^*$	

* Bekos et al. [CGTA'07]

Randbeschriftungen – Bekannte Resultate



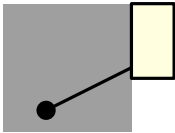
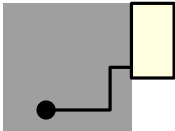
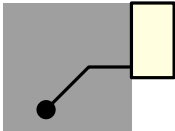
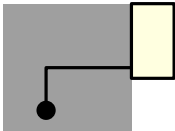
Stil	Seiten	1	2 (geg.)	2 (neb.)	4
	<i>s</i>	$O(n^{2+\epsilon})^*$			
	<i>opo</i>	$O(n \log n)^*$	$O(n^2)^*$	$O(n^2 \log^3 n)^*$	
	<i>do/pd</i>	$O(n^2)^\dagger$	$O(n^3)^\P$		

* Bekos et al. [CGTA'07]

† Benkert et al. [JGAA'09]

¶ Bekos et al. [Algorithmica'10]

Randbeschriftungen – Bekannte Resultate



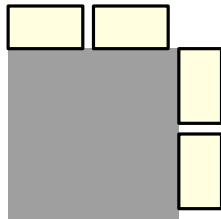
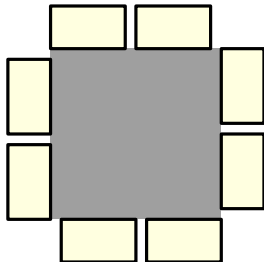
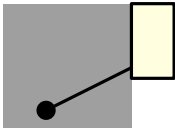
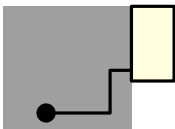
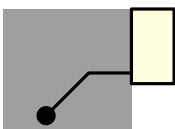
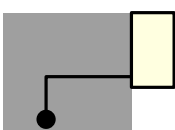
	Stil	Seiten	1	2 (geg.)	2 (neb.)	4
<i>s</i>	$O(n^{2+\epsilon})^*$					
<i>opo</i>	$O(n \log n)^*$	$O(n^2)^*$	$O(n^2 \log^3 n)^*$			
<i>do/pd</i>	$O(n^2)^\dagger$	$O(n^3)^\P$				
<i>po</i>	$O(n \log n)^\dagger$	$O(n^2)^*$				

* Bekos et al. [CGTA'07]

† Benkert et al. [JGAA'09]

¶ Bekos et al. [Algorithmica'10]

Randbeschriftungen – Bekannte Resultate

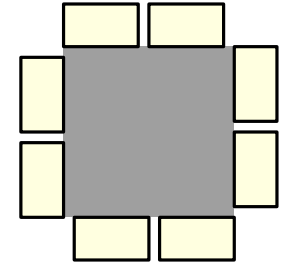
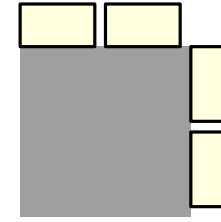
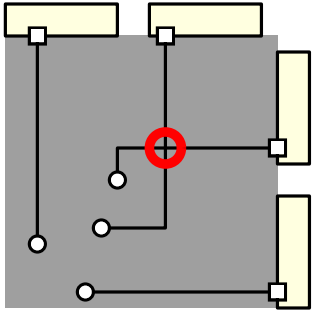
					
	Stil	1	2 (geg.)	2 (neb.)	4
	<i>s</i>	$O(n^{2+\epsilon})^*$			
	<i>opo</i>	$O(n \log n)^*$	$O(n^2)^*$	$O(n^2 \log^3 n)^*$	
	<i>do/pd</i>	$O(n^2)^\dagger$	$O(n^3)^\P$		
	<i>po</i>	$O(n \log n)^\dagger$	$O(n^2)^*$?	?

* Bekos et al. [CGTA'07]

† Benkert et al. [JGAA'09]

¶ Bekos et al. [Algorithmica'10]

Randbeschriftungen – Bekannte Resultate



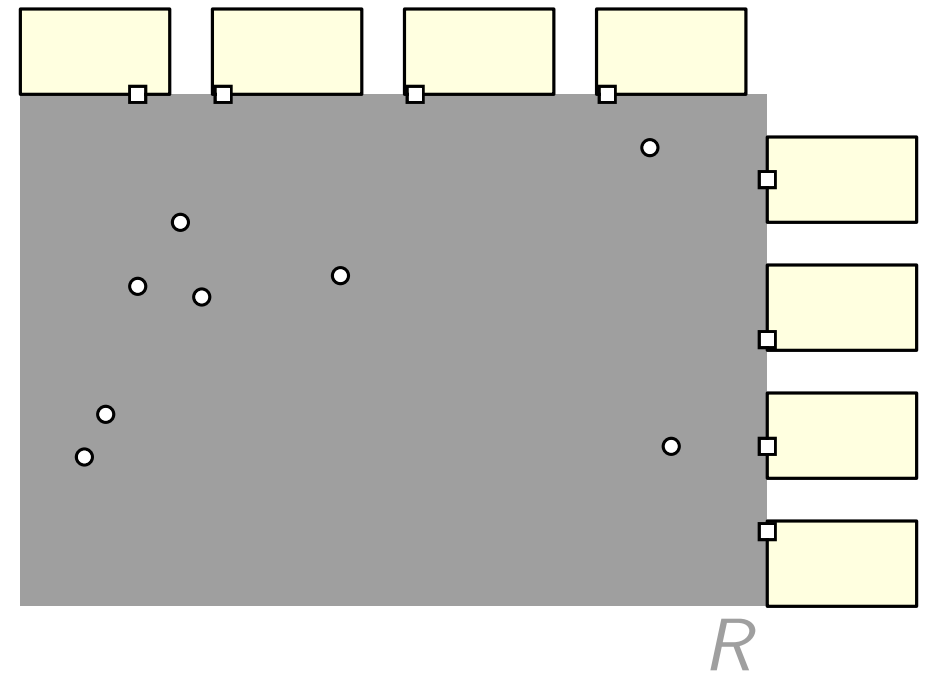
Stil	Seiten	1	2 (geg.)	2 (neb.)	4
<i>s</i>		$O(n^{2+\epsilon})^*$			
<i>opo</i>		$O(n \log n)^*$	$O(n^2)^*$	$O(n^2 \log^3 n)^*$	
<i>do/pd</i>		$O(n^2)^\dagger$	$O(n^3)^\P$		
<i>po</i>		$O(n \log n)^\dagger$	$O(n^2)^*$?	?

* Bekos et al. [CGTA'07]

† Benkert et al. [JGAA'09]

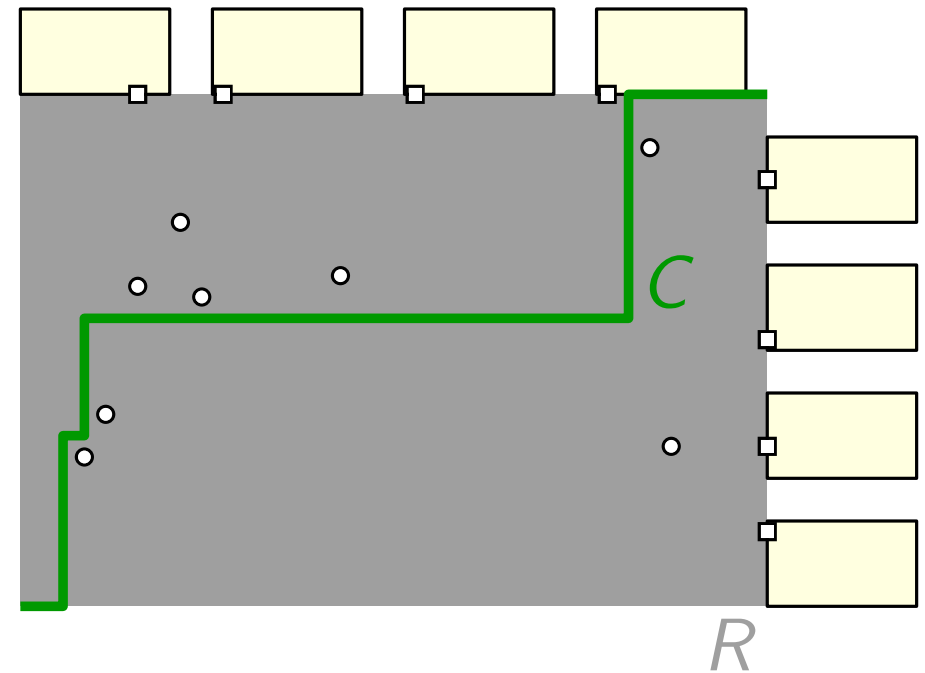
¶ Bekos et al. [Algorithmica'10]

Randbeschriftungen – Struktur



Randbeschriftungen – Struktur

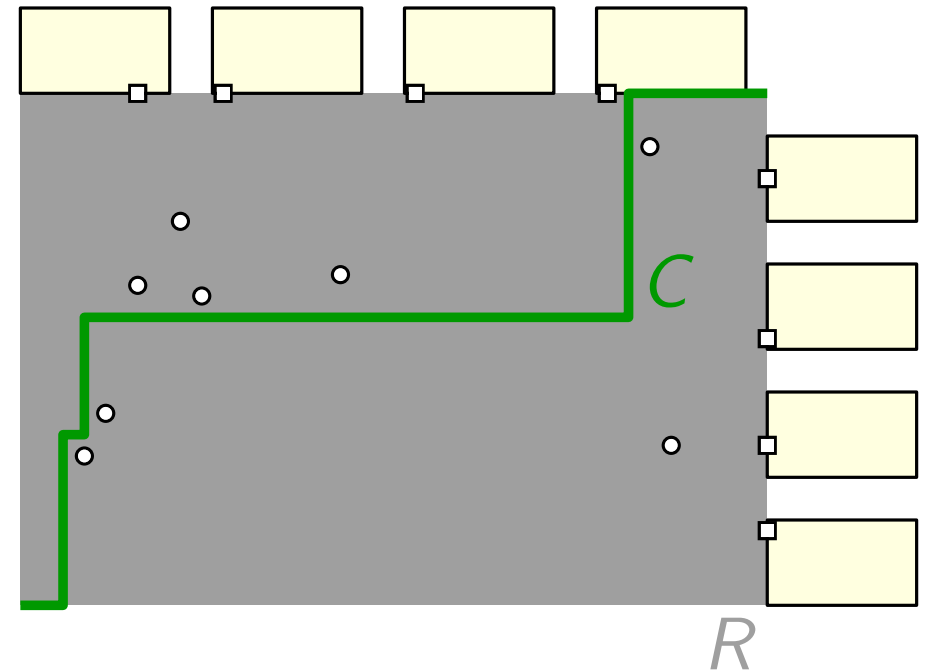
xy -teilende Kurve C



Randbeschriftungen – Struktur

xy -teilende Kurve C

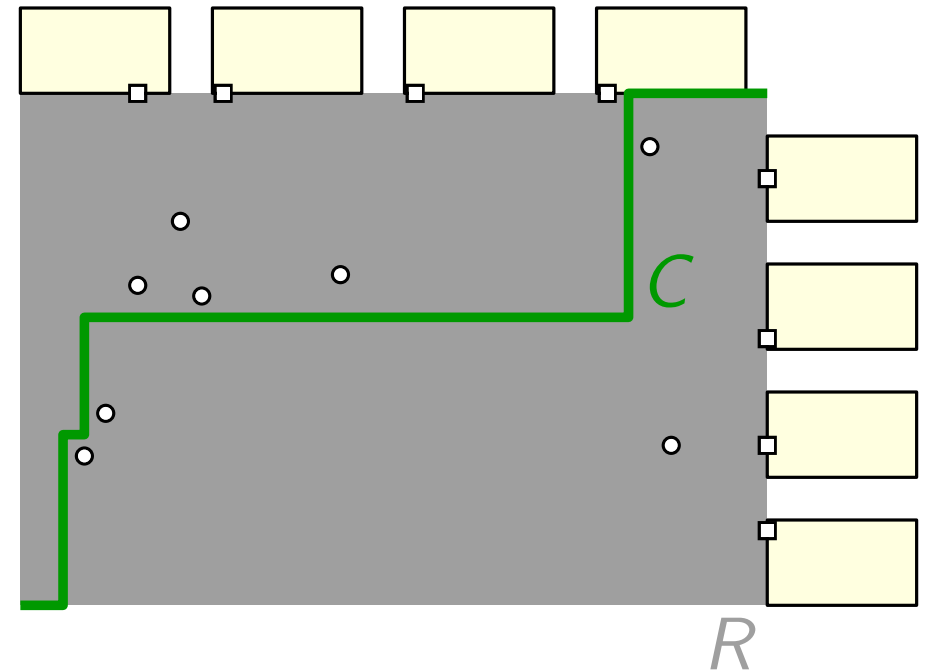
- xy -monoton



Randbeschriftungen – Struktur

xy -teilende Kurve C

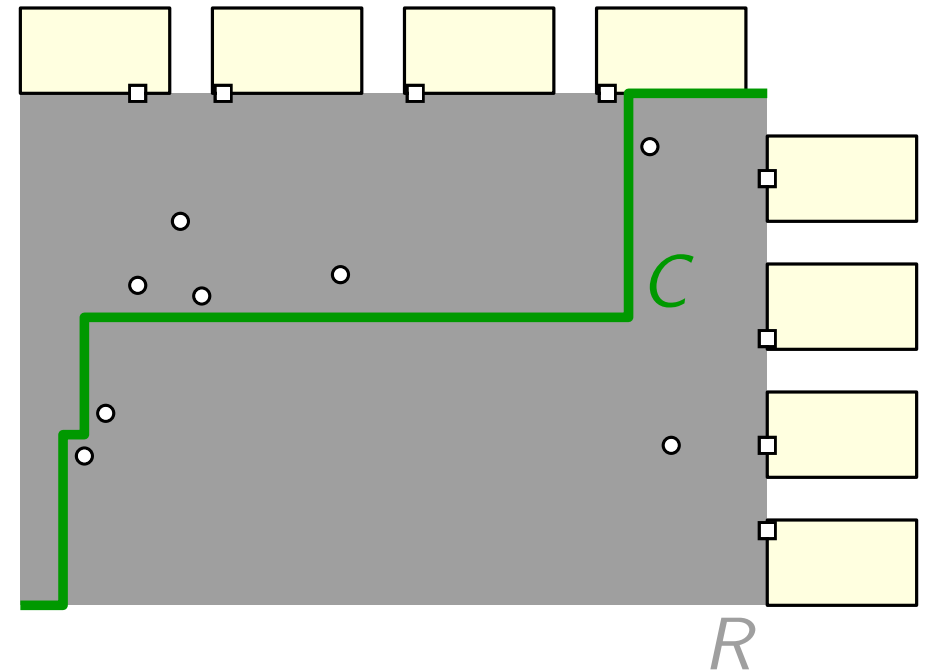
- xy -monoton
- rektilinear



Randbeschriftungen – Struktur

xy -teilende Kurve C

- xy -monoton
- rektilinear
- Verbindet obere rechte mit unterer linker Ecke von R

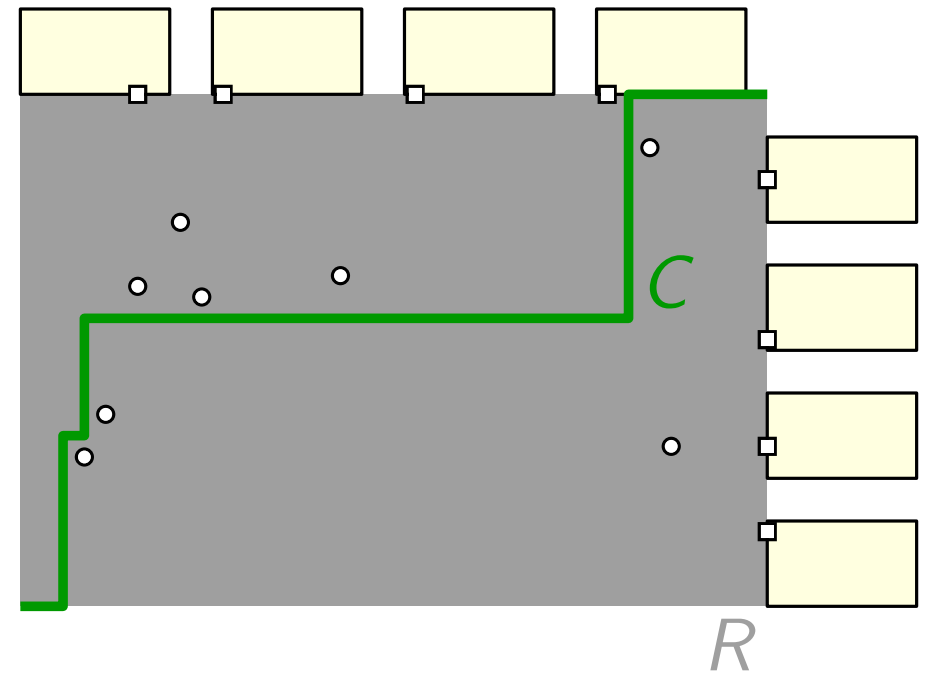


Randbeschriftungen – Struktur

xy -teilende Kurve C

- xy -monoton
- rektilinear
- Verbindet obere rechte mit unterer linker Ecke von R

xy -geteilte Lösung



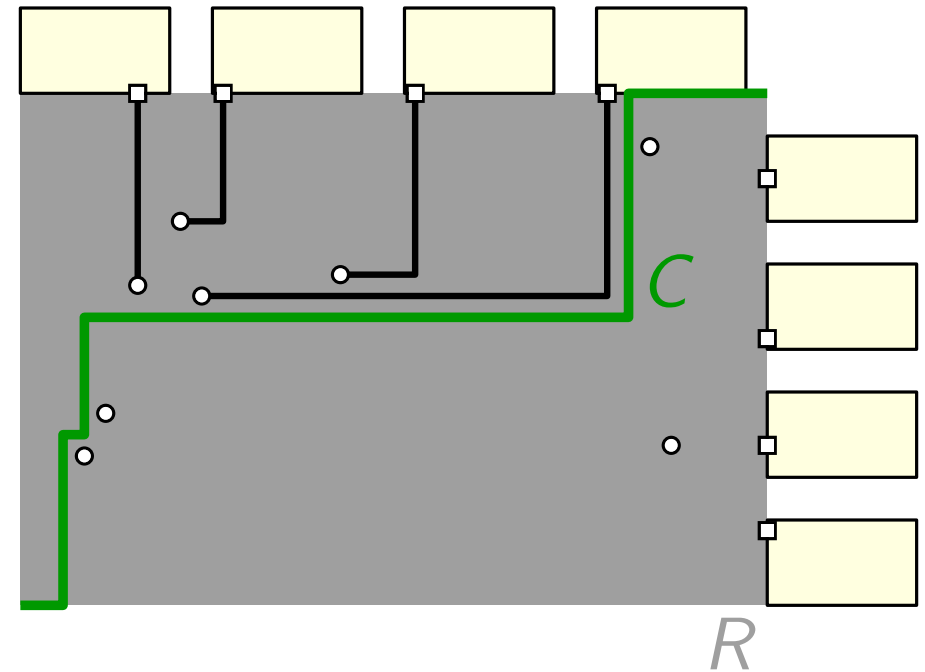
Randbeschriftungen – Struktur

xy -teilende Kurve C

- xy -monoton
- rektilinear
- Verbindet obere rechte mit unterer linker Ecke von R

xy -geteilte Lösung

- Obere Standorte und Verbindungen liegen über C



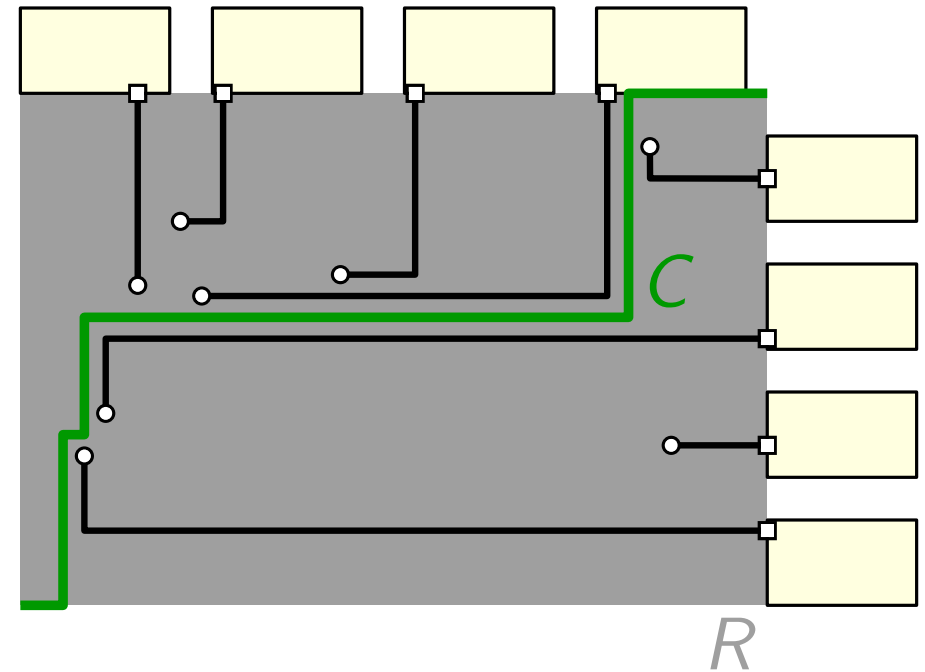
Randbeschriftungen – Struktur

xy -teilende Kurve C

- xy -monoton
- rektilinear
- Verbindet obere rechte mit unterer linker Ecke von R

xy -geteilte Lösung

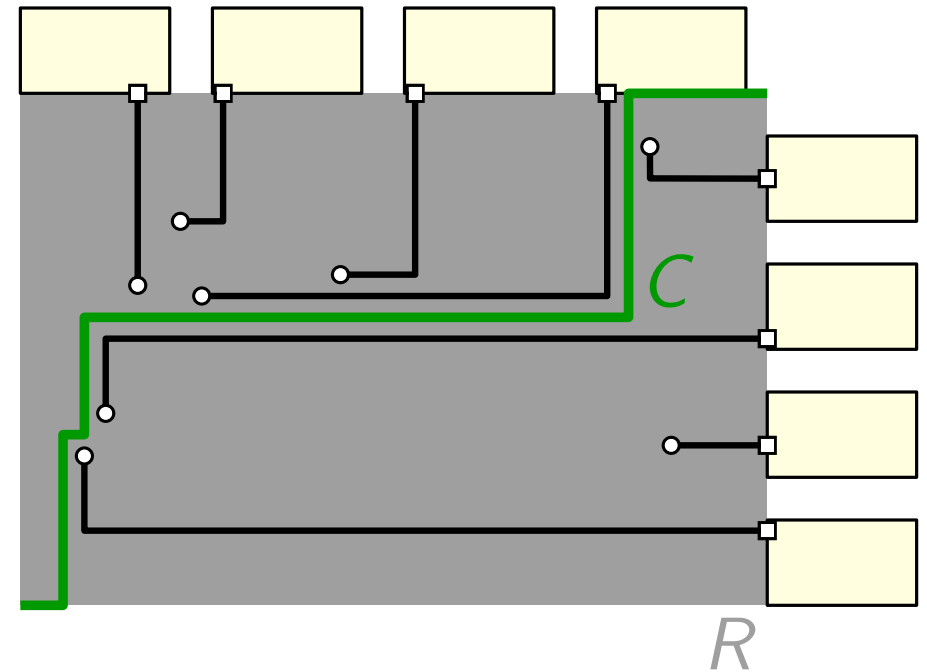
- Obere Standorte und Verbindungen liegen über C
- Rechte Standorte und Verbindungen liegen unter C



Randbeschriftungen – Struktur

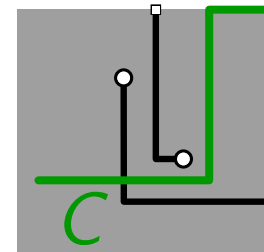
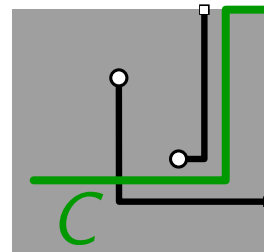
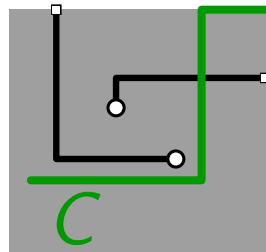
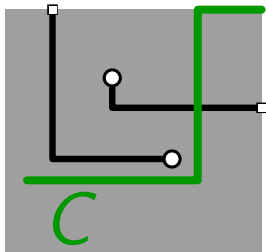
xy-teilende Kurve C

- xy -monoton
- rektilinear
- Verbindet obere rechte mit unterer linker Ecke von R



xy-geteilte Lösung

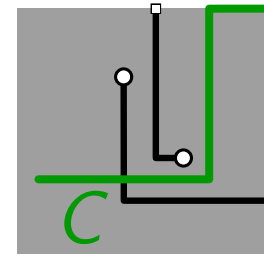
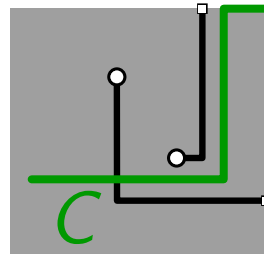
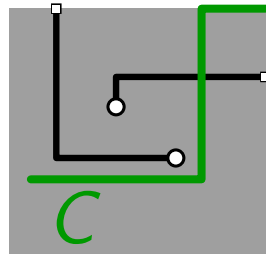
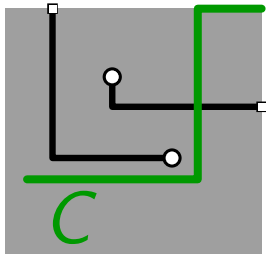
- Obere Standorte und Verbindungen liegen über C
- Rechte Standorte und Verbindungen liegen unter C
- Enthält keine der folgenden Muster



Randbeschriftungen – Struktur

xy-geteilte Lösung

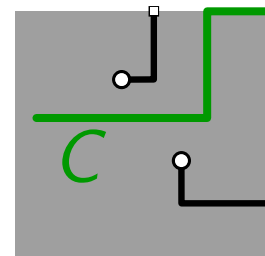
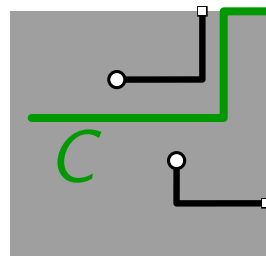
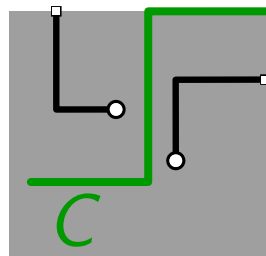
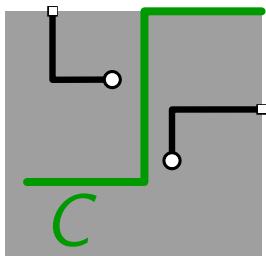
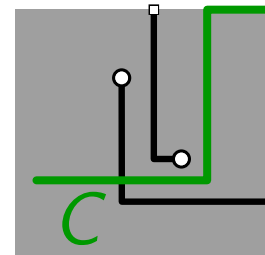
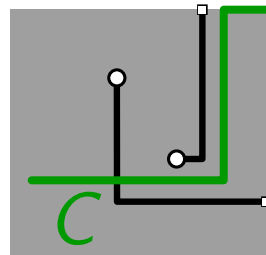
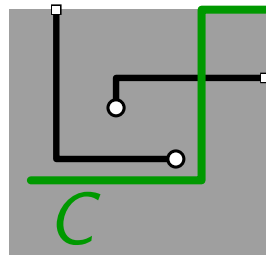
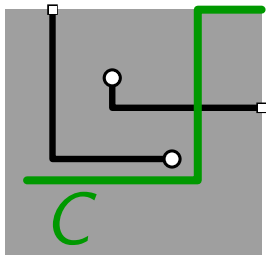
- Enthält keine der folgenden Muster



Randbeschriftungen – Struktur

xy-geteilte Lösung

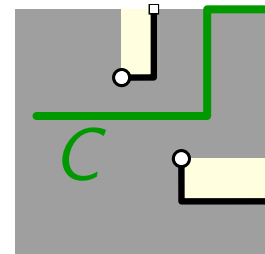
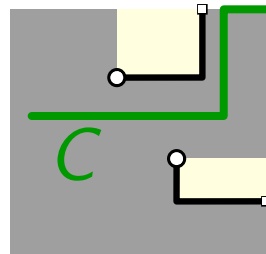
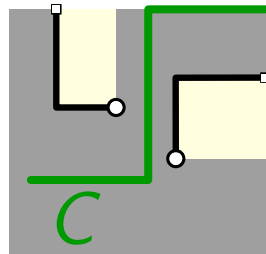
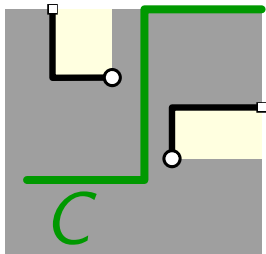
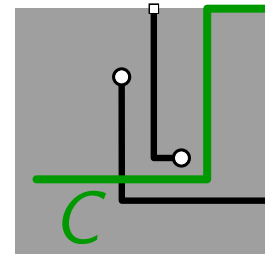
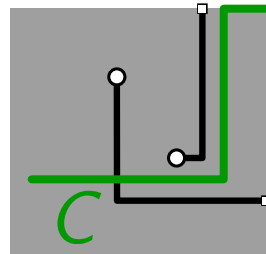
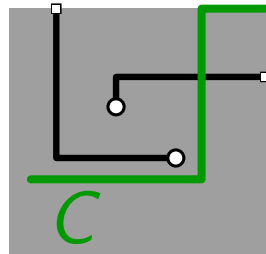
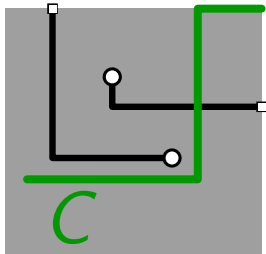
- Enthält keine der folgenden Muster



Randbeschriftungen – Struktur

xy-geteilte Lösung

- Enthält keine der folgenden Muster

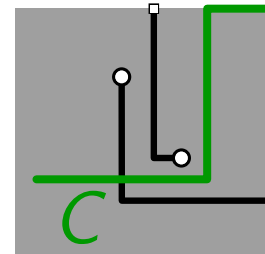
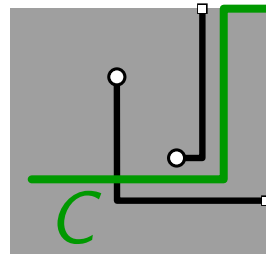
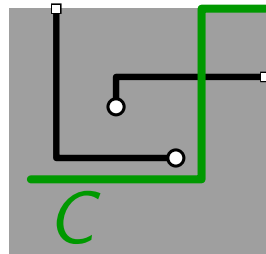
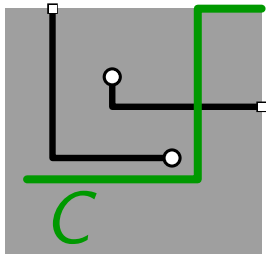


Eliminiere lokale Kreuzungen

Randbeschriftungen – Struktur

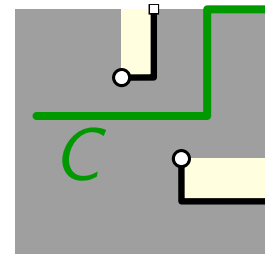
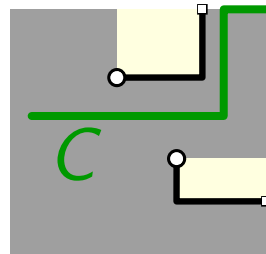
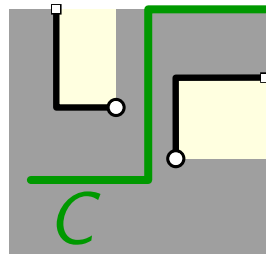
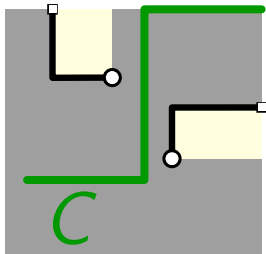
xy-geteilte Lösung

- Enthält keine der folgenden Muster



Charakterisierung: Planare Lösung

$\Rightarrow xy$ -geteilte planare Lösung

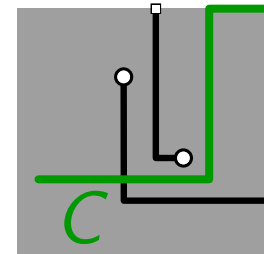
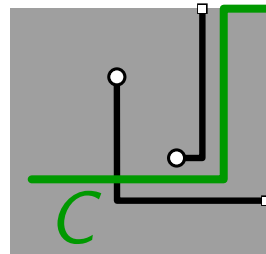
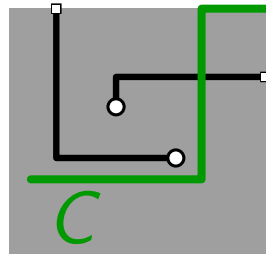
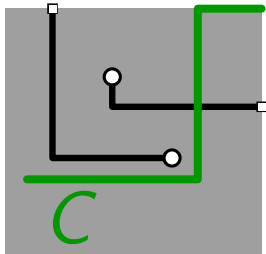


Eliminiere lokale Kreuzungen

Randbeschriftungen – Struktur

xy-geteilte Lösung

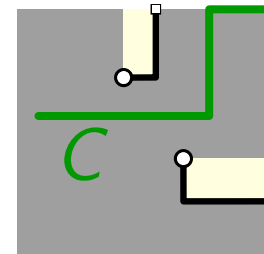
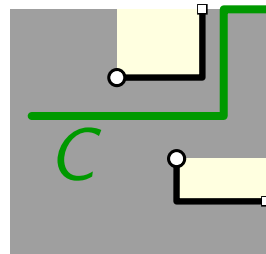
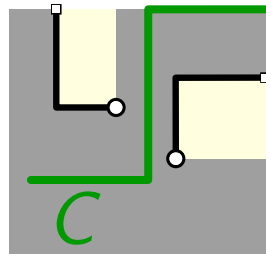
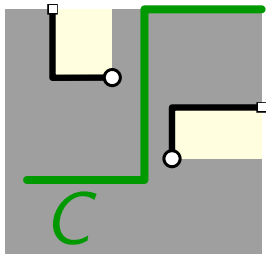
- Enthält keine der folgenden Muster



Charakterisierung: Planare Lösung

Dynamisches Programm!

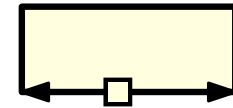
$\Rightarrow xy$ -geteilte planare Lösung



Eliminiere lokale Kreuzungen

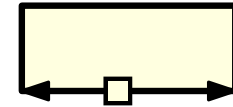
Randbeschriftungen – Ergebnisse

Zweiseitig, verschiebbare Anschlusspunkte:
 $O(n^2)$ Zeit, $O(n)$ Platz



Randbeschriftungen – Ergebnisse

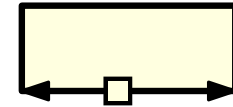
Zweiseitig, verschiebbare Anschlusspunkte:
 $O(n^2)$ Zeit, $O(n)$ Platz



Maximiere Anzahl der Beschriftungen:
 $O(n^3 \log n)$ Zeit, $O(n)$ Platz

Randbeschriftungen – Ergebnisse

Zweiseitig, verschiebbare Anschlusspunkte:
 $O(n^2)$ Zeit, $O(n)$ Platz

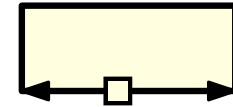


Maximiere Anzahl der Beschriftungen:
 $O(n^3 \log n)$ Zeit, $O(n)$ Platz

Minimiere Gesamtlänge der Verbindungen:
 $O(n^8 \log n)$ Zeit, $O(n^6)$ Platz

Randbeschriftungen – Ergebnisse

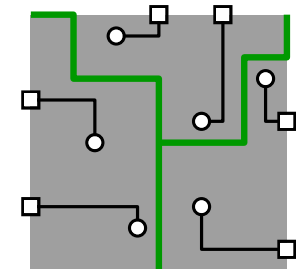
Zweiseitig, verschiebbare Anschlusspunkte:
 $O(n^2)$ Zeit, $O(n)$ Platz



Maximiere Anzahl der Beschriftungen:
 $O(n^3 \log n)$ Zeit, $O(n)$ Platz

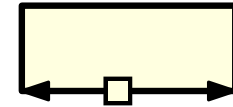
Minimiere Gesamtlänge der Verbindungen:
 $O(n^8 \log n)$ Zeit, $O(n^6)$ Platz

Dreiseitige Randbeschriftungen:
 $O(n^4)$ Zeit, $O(n)$ Platz



Randbeschriftungen – Ergebnisse

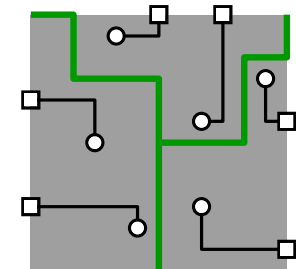
Zweiseitig, verschiebbare Anschlusspunkte:
 $O(n^2)$ Zeit, $O(n)$ Platz



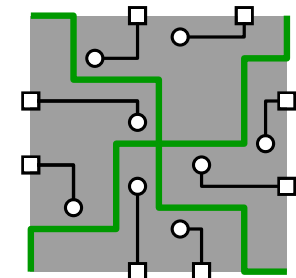
Maximiere Anzahl der Beschriftungen:
 $O(n^3 \log n)$ Zeit, $O(n)$ Platz

Minimiere Gesamtlänge der Verbindungen:
 $O(n^8 \log n)$ Zeit, $O(n^6)$ Platz

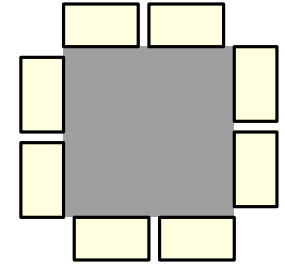
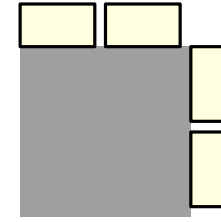
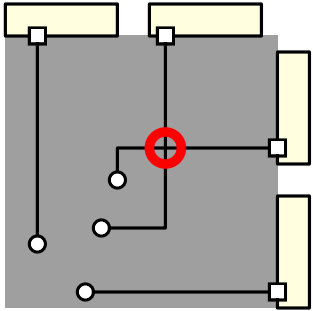
Dreiseitige Randbeschriftungen:
 $O(n^4)$ Zeit, $O(n)$ Platz



Vierseitige Randbeschriftungen:
 $O(n^9)$ Zeit, $O(n)$ Platz



Randbeschriftungen – Ergebnisse



Stil	Seiten	1	2 (geg.)	2 (neb.)	4
<i>s</i>		$O(n^{2+\epsilon})^*$			
<i>opo</i>		$O(n \log n)^*$	$O(n^2)^*$	$O(n^2 \log^3 n)^*$	
<i>do/pd</i>		$O(n^2)^\dagger$	$O(n^3)^\P$		
<i>po</i>		$O(n \log n)^\dagger$	$O(n^2)^*$	$O(n^2)$	$O(n^9)$

* Bekos et al. [CGTA'07]

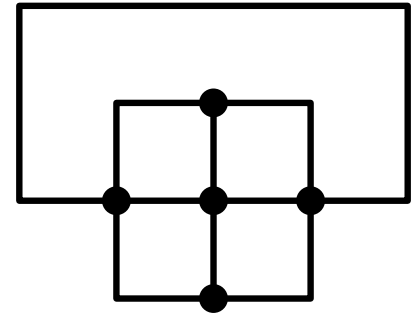
† Benkert et al. [JGAA'09]

¶ Bekos et al. [Algorithmica'10]

Teil 2:
Glatt-orthogonale
Darstellungen planarer
Graphen

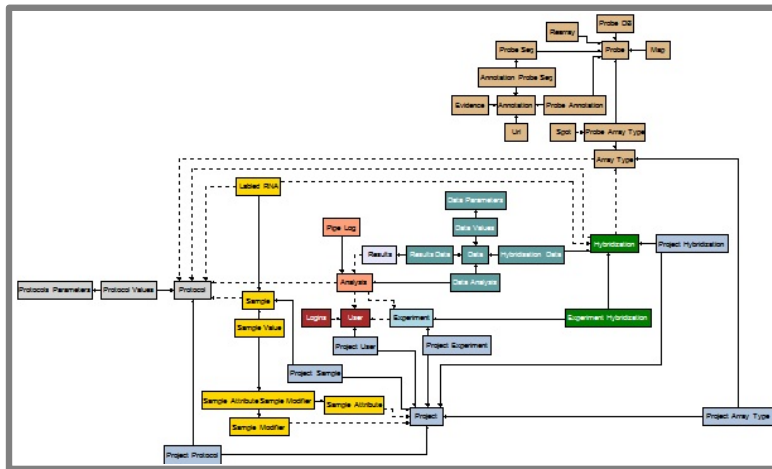
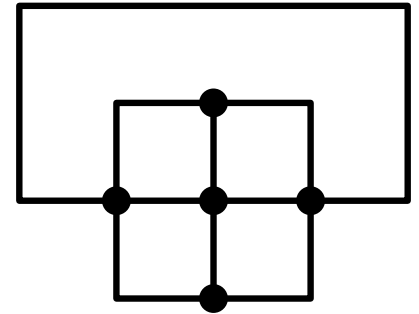
Orthogonale Darstellungen

- Alle Segmente sind horizontal oder vertikal
- Intensiv untersuchter Zeichenstil
- Viele Anwendungsbeispiele

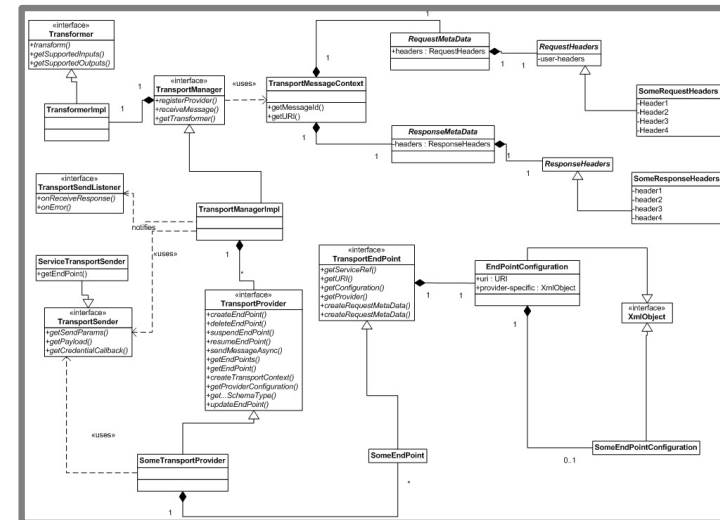


Orthogonale Darstellungen

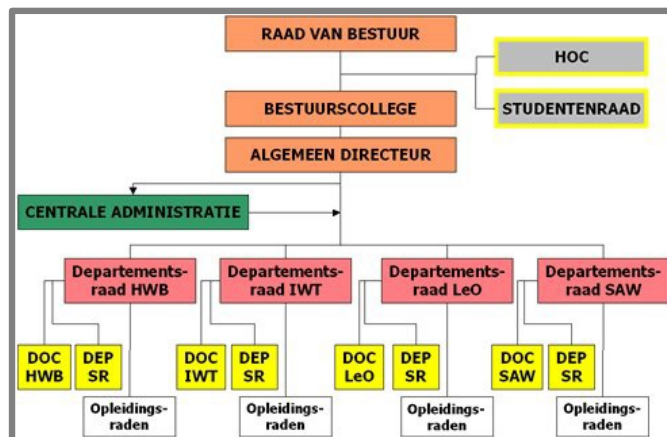
- Alle Segmente sind horizontal oder vertikal
- Intensiv untersuchter Zeichenstil
- Viele Anwendungsbeispiele



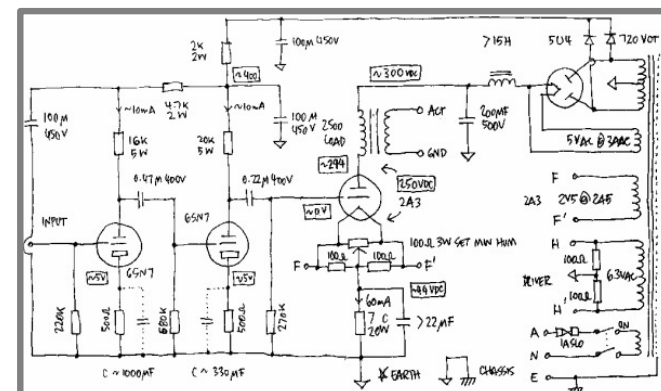
ER-Diagramm in OGDF



UML-Diagramm von Oracle



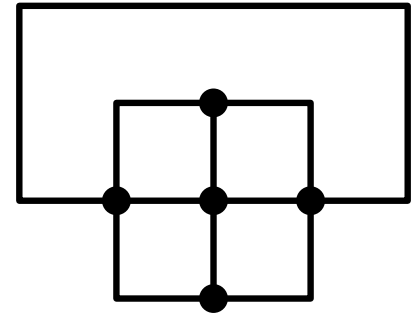
Organigramm von HS Limburg



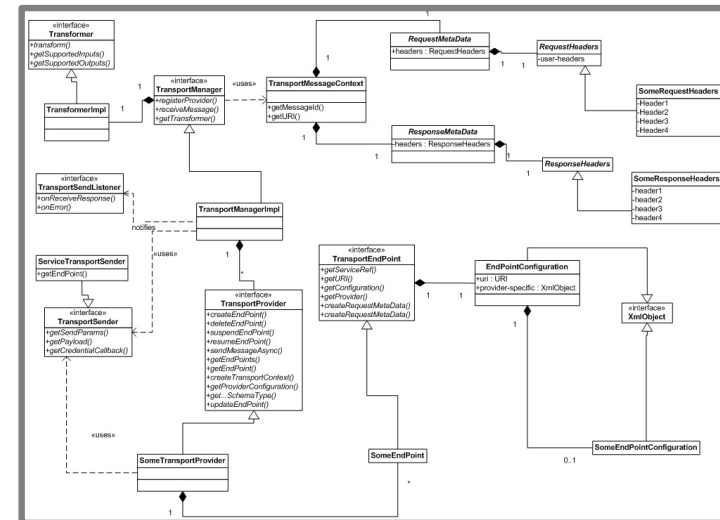
Schaltkreis-Diagramm von Jeff Atwood

Orthogonale Darstellungen

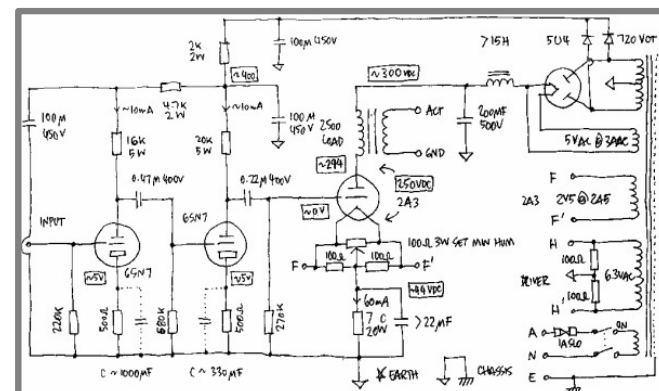
- Alle Segmente sind horizontal oder vertikal
- Intensiv untersuchter Zeichenstil
- Viele Anwendungsbeispiele



“Fused Grid” Stadtentwurf [Fgrammen, via Wikimedia Commons]



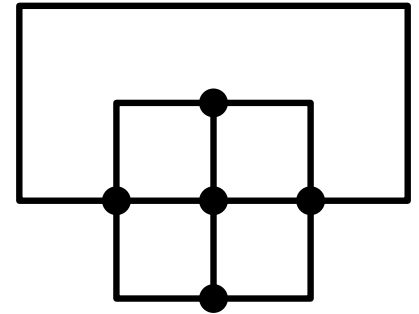
UML-Diagramm von Oracle



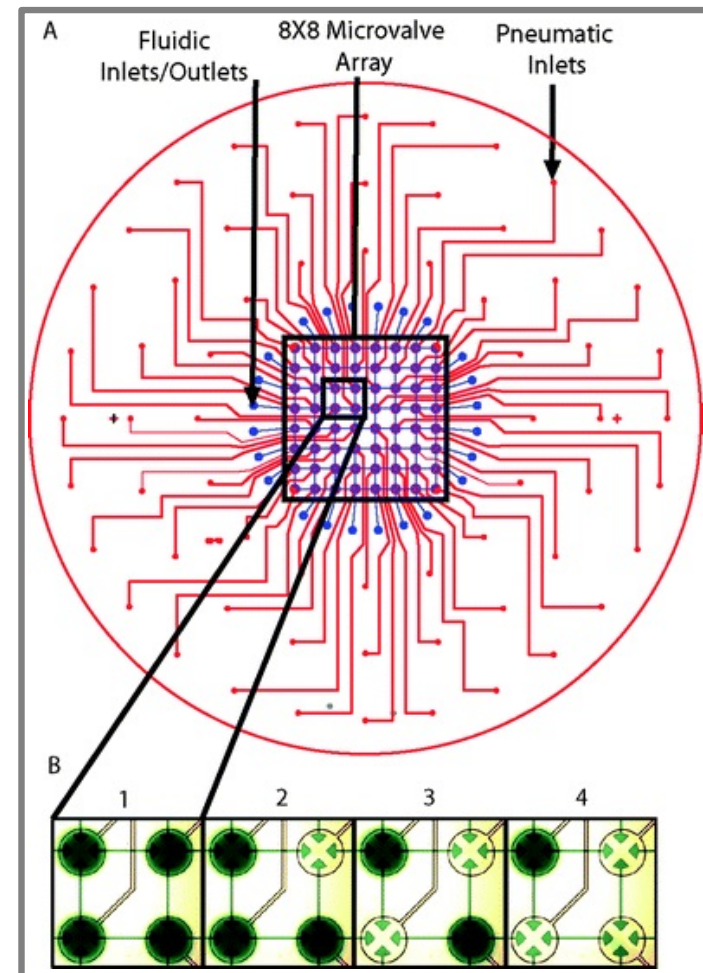
Schaltkreis-Diagramm von Jeff Atwood

Orthogonale Darstellungen

- Alle Segmente sind horizontal oder vertikal
- Intensiv untersuchter Zeichenstil
- Viele Anwendungsbeispiele



“Fused Grid” Stadtentwurf [Fgrammen, via Wikimedia Commons]



VLSI/PCI Chip Entwurf [Mora et al. 2013]

Glatte Zeichnungen



[Daduschu, via Wikimedia Commons]

Mercedes W 114, 1967



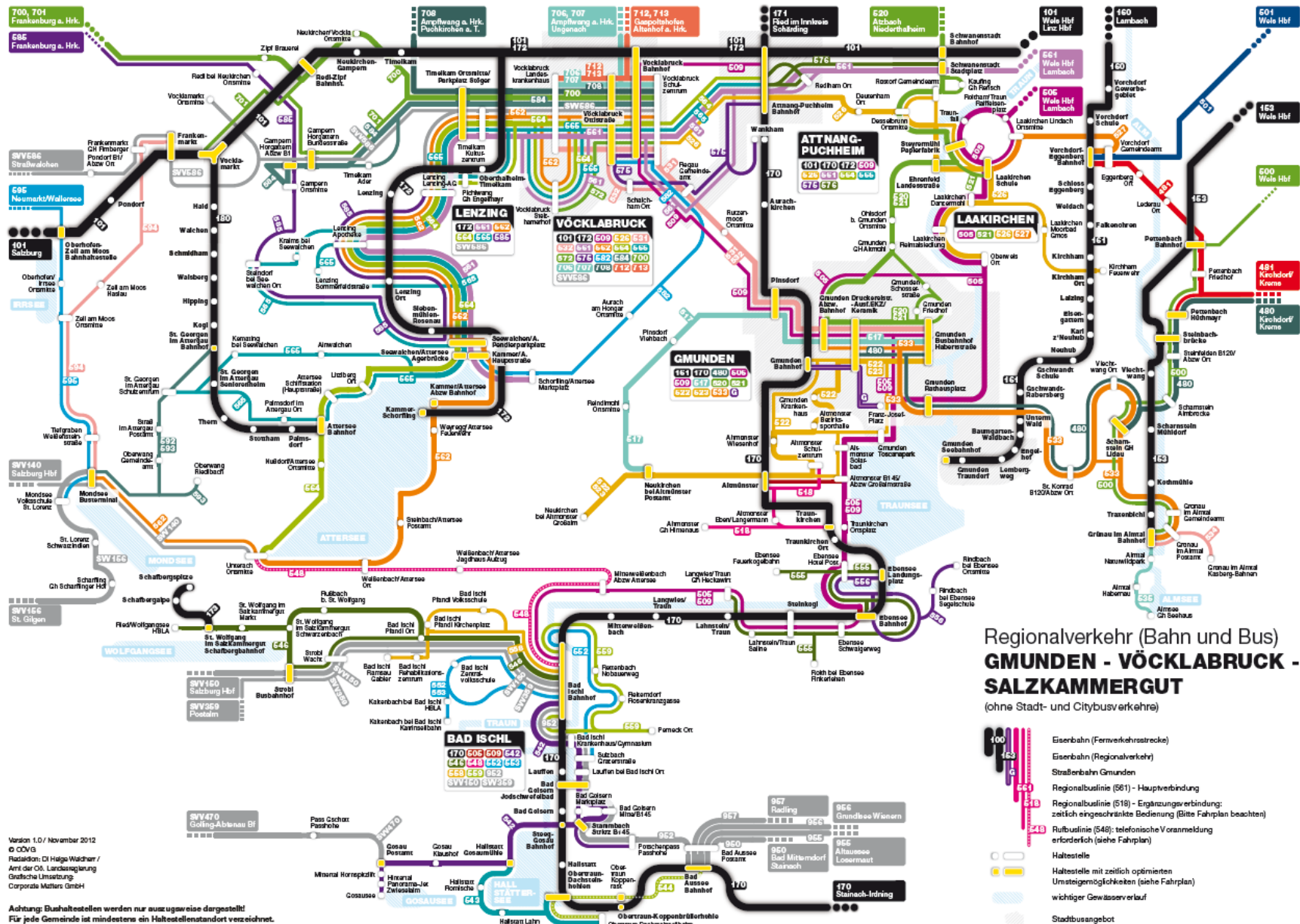
Nissan Friend-ME, 2013

Glatte Zeichnungen



Terra Nova - Design Overdrive von Carlos Barbosa

Glatte Zeichnungen



Regionalverkehrskarte von OÖVG

Mark Lombardi (1951–2000)

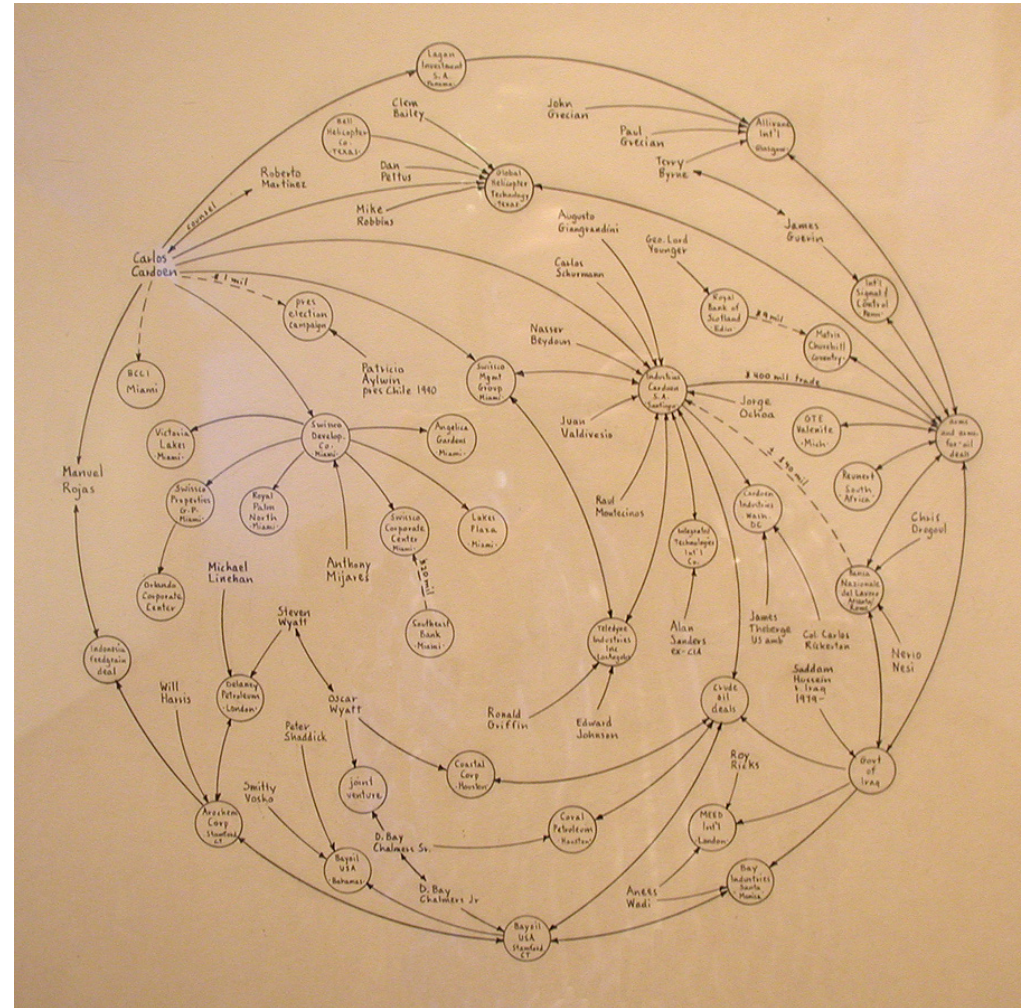
Glatte Zeichnungen

Lombardi-Zeichnungen

- Kreissegmente
- Perfekte Winkelauflösung

k -Lombardi-Zeichnungen

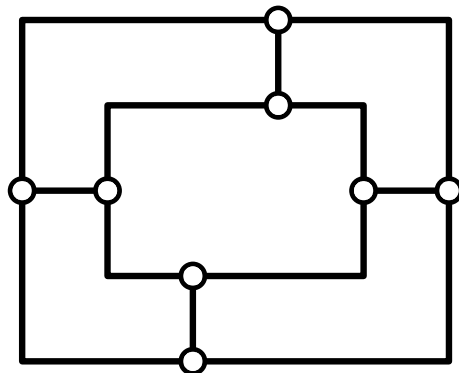
- Kanten bestehen aus k Kreissegmenten



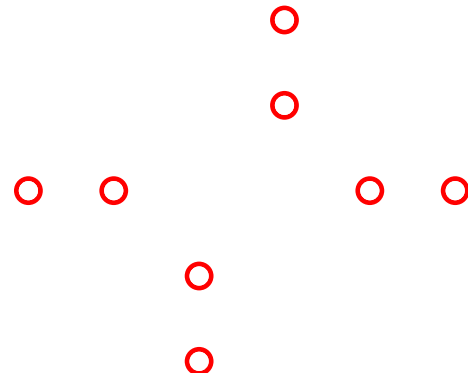
Mark Lombardi
(1951–2000)

Glatt-orthogonale Darstellungen

Vereinige beide Welten:



orthogonal

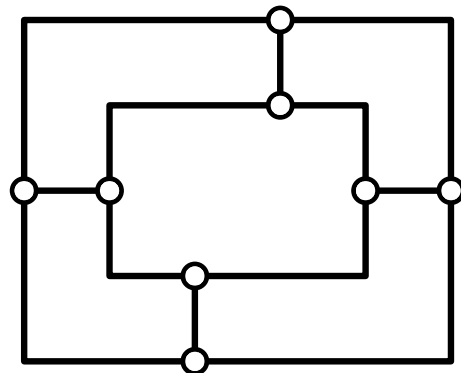


glatt-orthogonal

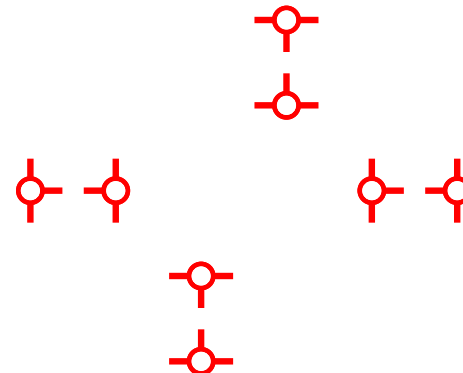
Glatt-orthogonale Darstellungen

Vereinige beide Welten:

- Kanten treffen horizontal oder vertikal auf Knoten



orthogonal

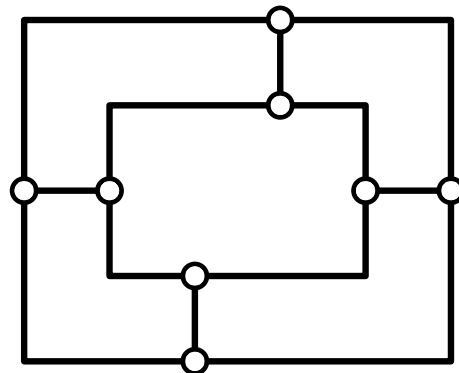


glatt-orthogonal

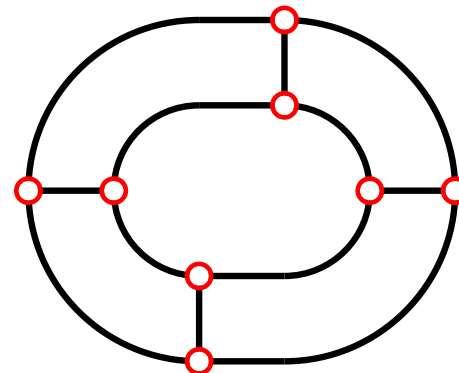
Glatt-orthogonale Darstellungen

Vereinige beide Welten:

- Kanten treffen horizontal oder vertikal auf Knoten
- Kanten bestehen aus achsen-parallelen Segmenten und Kreissegmenten ohne Knicke



orthogonal

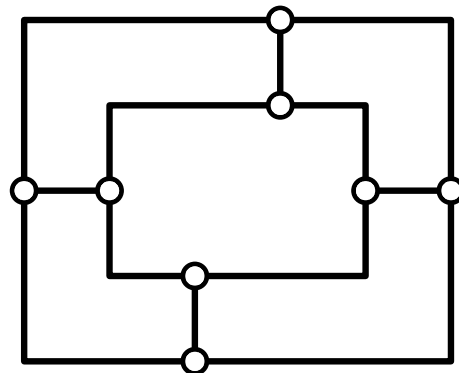


glatt-orthogonal

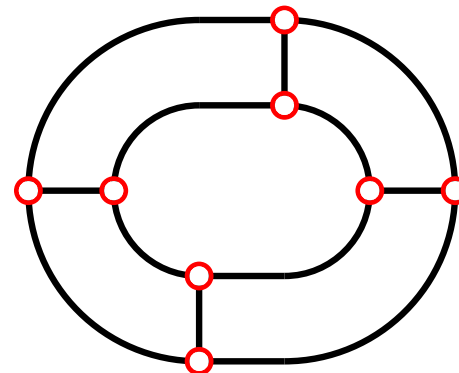
Glatt-orthogonale Darstellungen

Vereinige beide Welten:

- Kanten treffen horizontal oder vertikal auf Knoten
- Kanten bestehen aus achsen-parallelen Segmenten und Kreissegmenten ohne Knicke
- Es gibt keine Kantenkreuzungen (für planare Graphen)

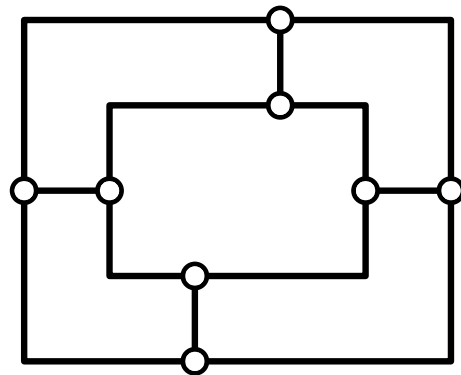


orthogonal

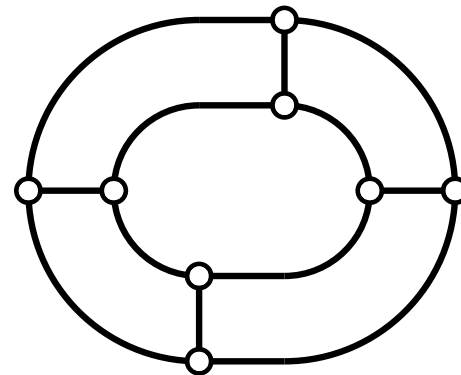


glatt-orthogonal

Kantenkomplexität



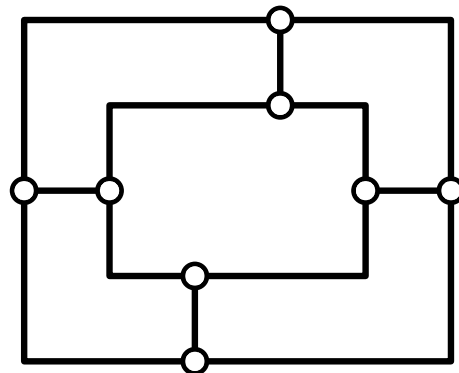
orthogonal



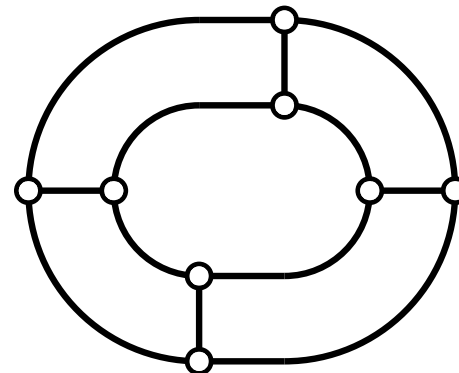
glatt-orthogonal

Kantenkomplexität

Komplexität einer Kante: Anzahl der Segmente



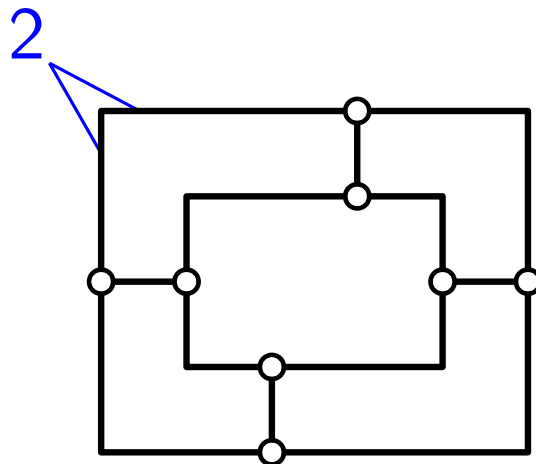
orthogonal



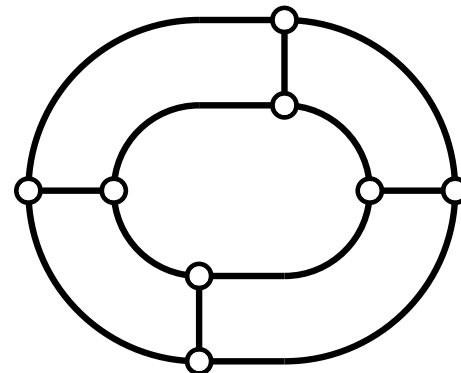
glatt-orthogonal

Kantenkomplexität

Komplexität einer Kante: Anzahl der Segmente



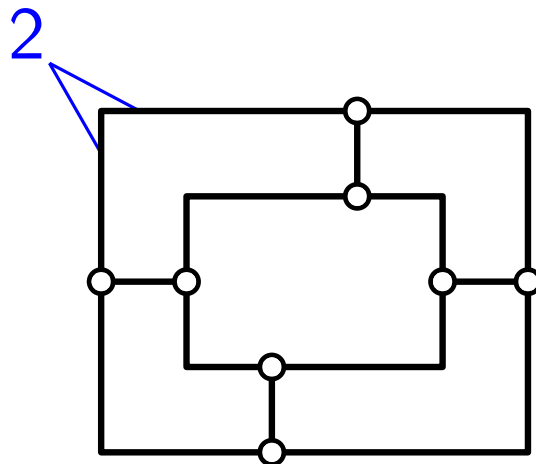
orthogonal



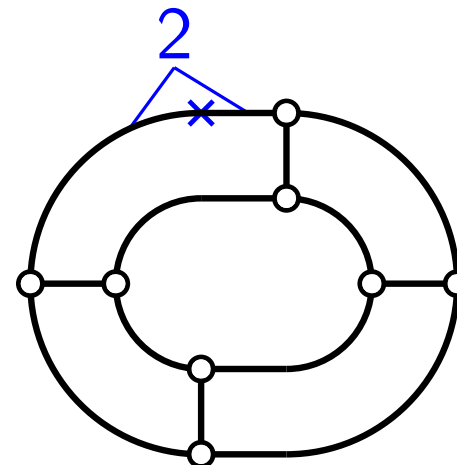
glatt-orthogonal

Kantenkomplexität

Komplexität einer Kante: Anzahl der Segmente



orthogonal

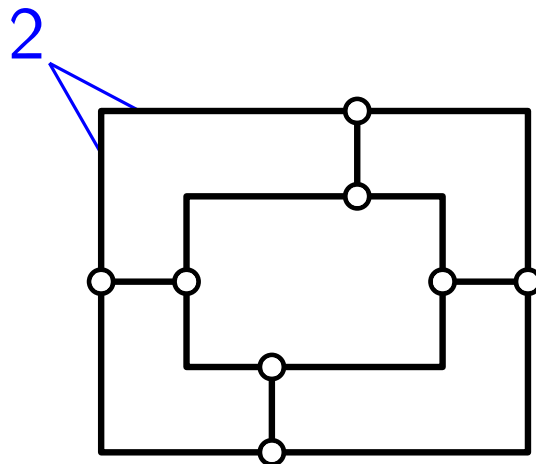


glatt-orthogonal

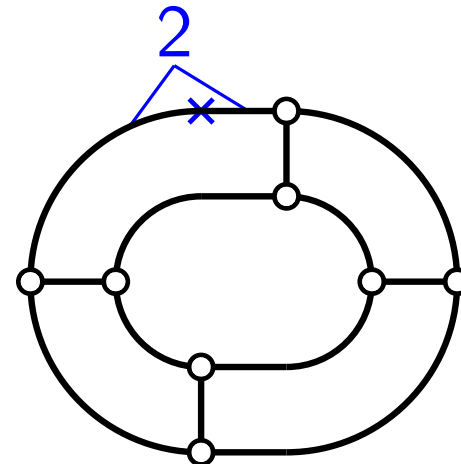
Kantenkomplexität

Komplexität einer Kante: Anzahl der Segmente

Komplexität einer Zeichnung: Größte Komplexität aller Kanten



orthogonal

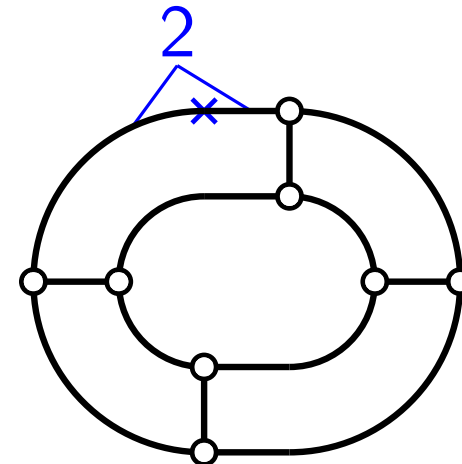
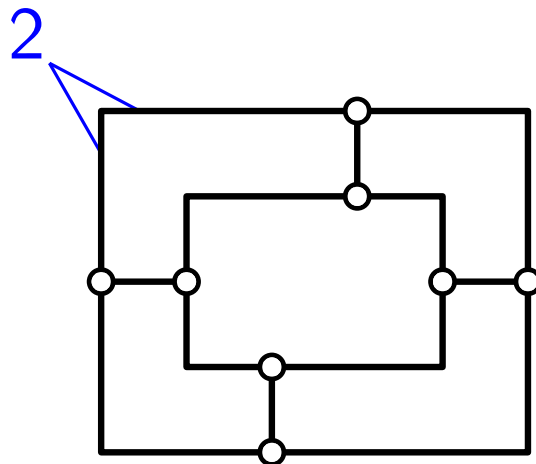
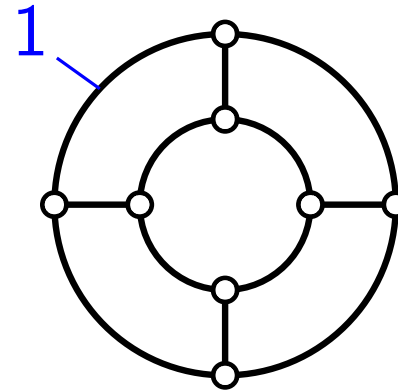
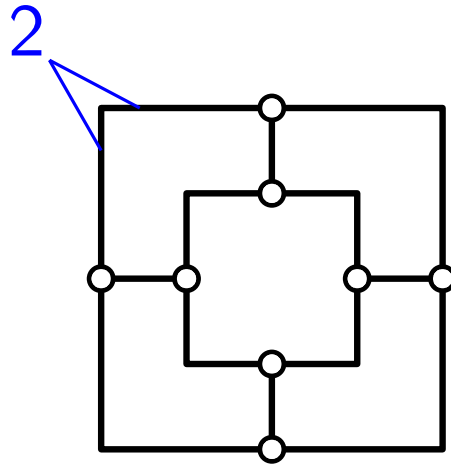


glatt-orthogonal

Kantenkomplexität

Komplexität einer Kante: Anzahl der Segmente

Komplexität einer Zeichnung: Größte Komplexität aller Kanten



orthogonal

glatt-orthogonal

Bekannte Resultate

Biedl & Kant [CGTA'98], Liu et al. [DAM'98]
4-planarer Graph \Rightarrow orth. Komplexität 3, $(n \times n)$ -Gitter

Bekannte Resultate

Biedl & Kant [CGTA'98],

Liu et al. [DAM'98]

4-planarer Graph \Rightarrow orth. Komplexität 3, $(n \times n)$ -Gitter

Bekos et al.

[GD'12]

- Zweifach zusammenhängender 4-planarer Graph \Rightarrow glatt-orth. Komplexität 3

Bekannte Resultate

Biedl & Kant [CGTA'98],

Liu et al. [DAM'98]

4-planarer Graph \Rightarrow orth. Komplexität 3, $(n \times n)$ -Gitter

Bekos et al.

[GD'12]

- Zweifach zusammenhängender 4-planarer Graph \Rightarrow glatt-orth. Komplexität 3
- 4-planarer Graph $\not\Rightarrow$ glatt-orth. Komplexität 1

Bekannte Resultate

Biedl & Kant [CGTA'98],

Liu et al. [DAM'98]

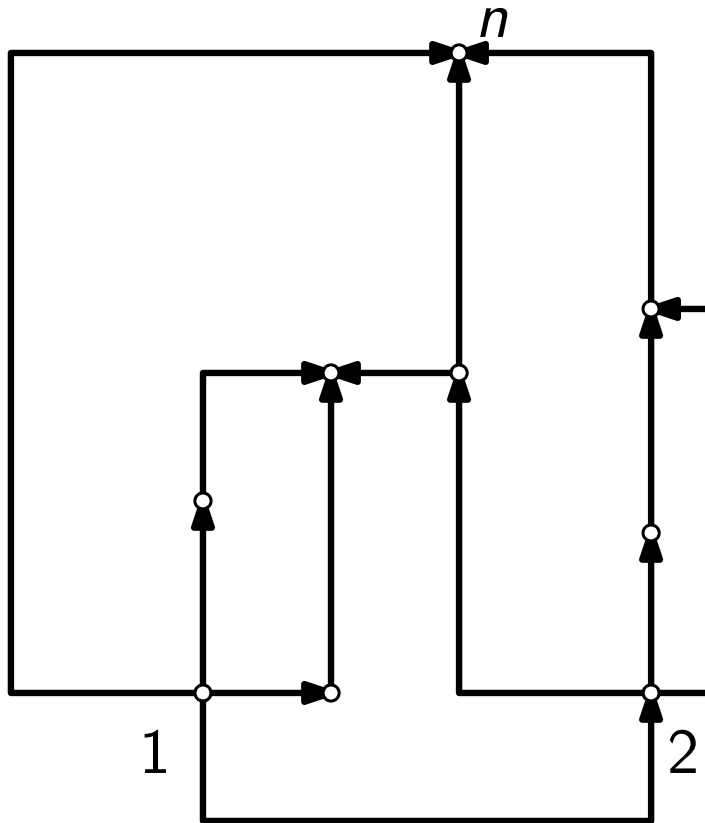
4-planarer Graph \Rightarrow orth. Komplexität 3, $(n \times n)$ -Gitter

Bekos et al.

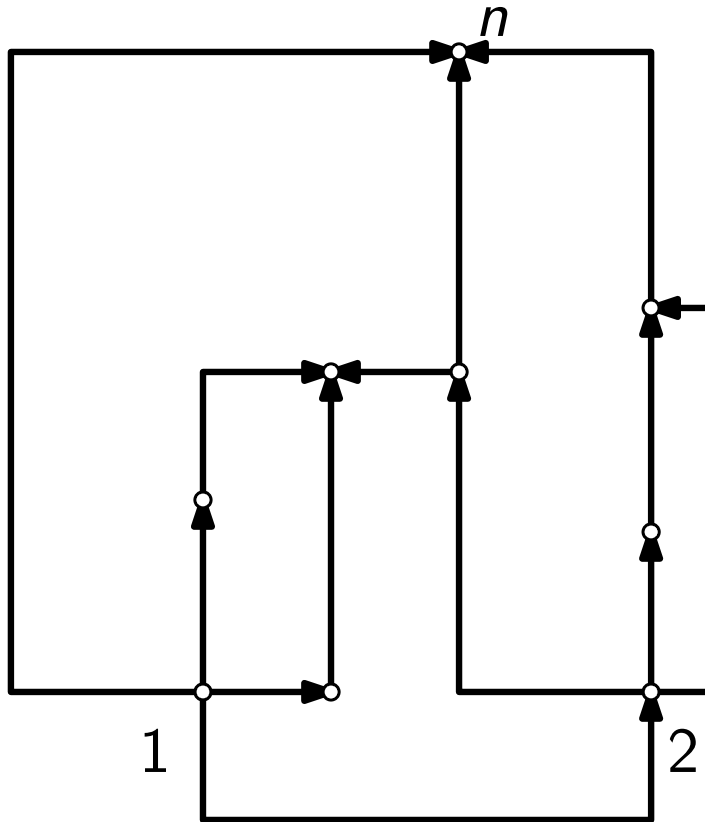
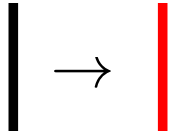
[GD'12]

- Zweifach zusammenhängender 4-planarer Graph \Rightarrow glatt-orth. Komplexität 3
- 4-planarer Graph $\not\Rightarrow$ glatt-orth. Komplexität 1

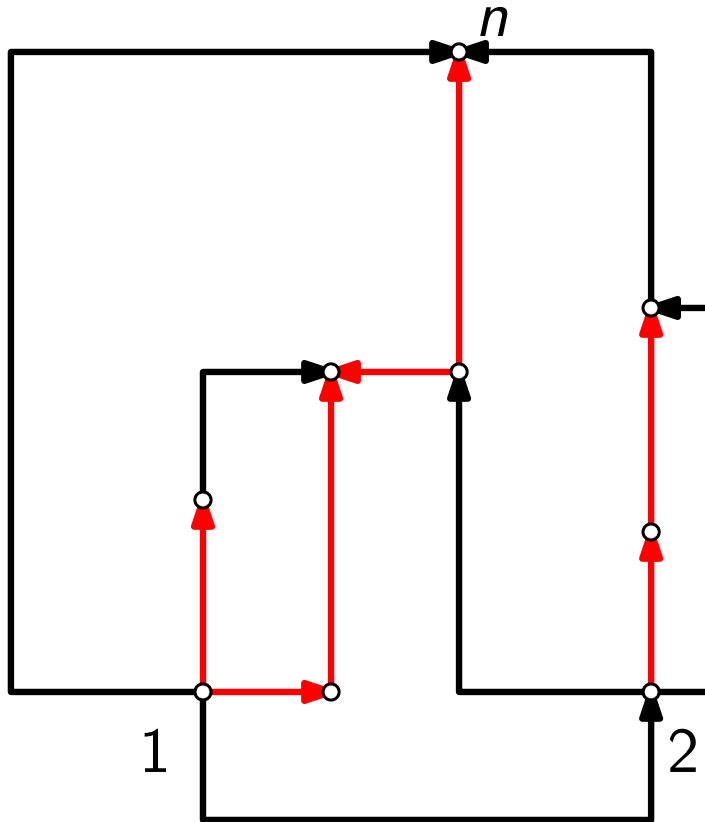
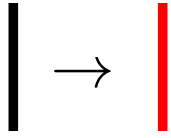
Komplexität-2 Zeichnungen



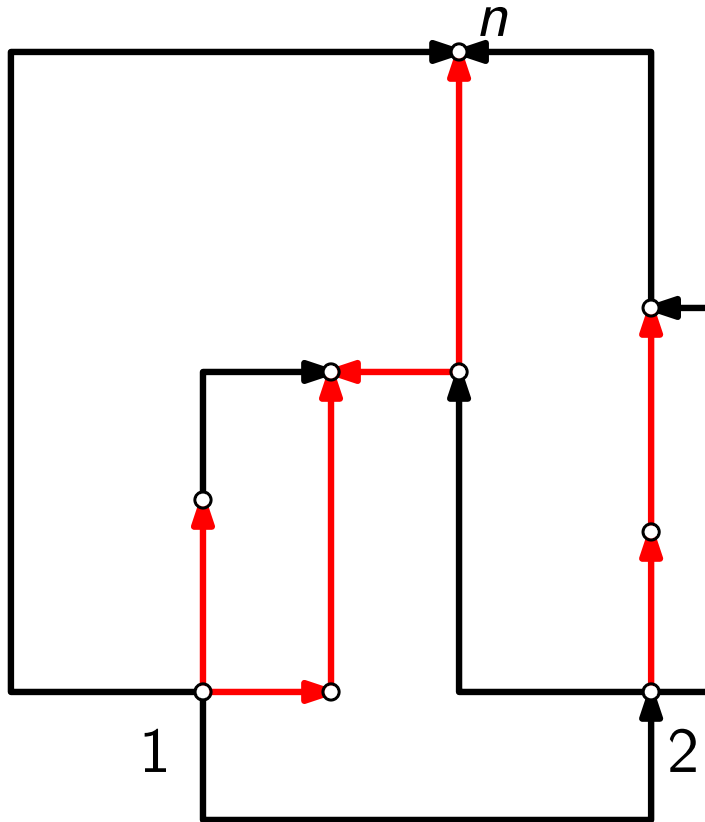
Komplexität-2 Zeichnungen



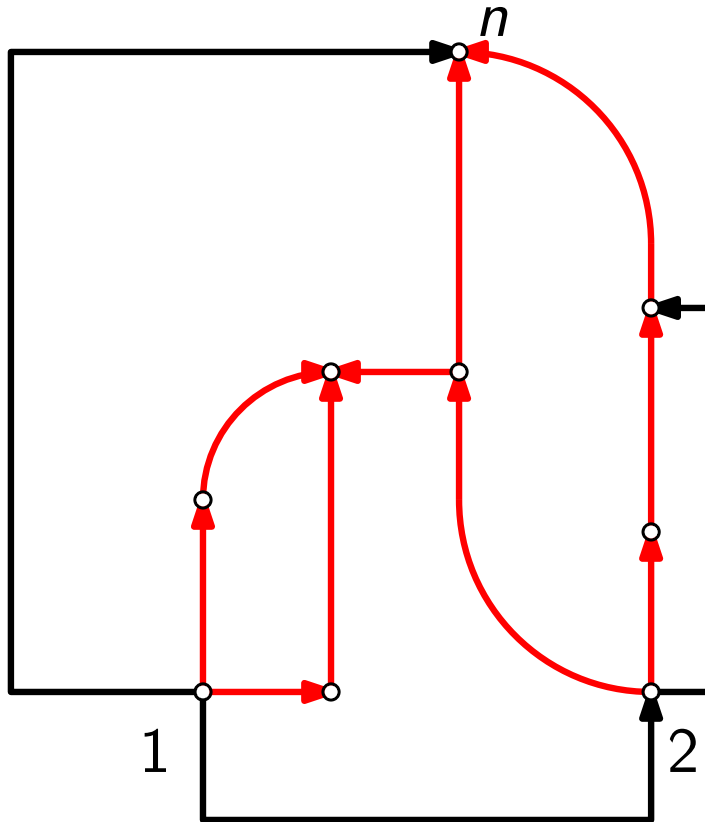
Komplexität-2 Zeichnungen



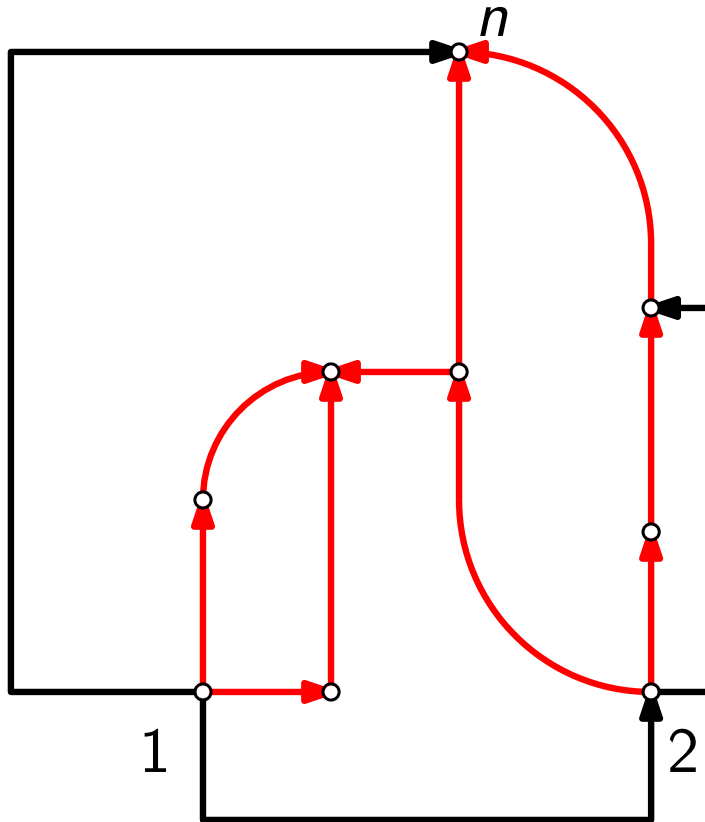
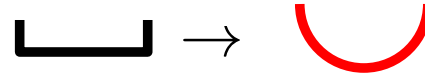
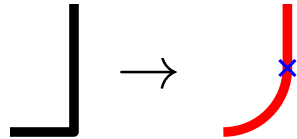
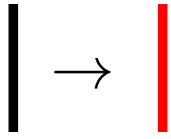
Komplexität-2 Zeichnungen



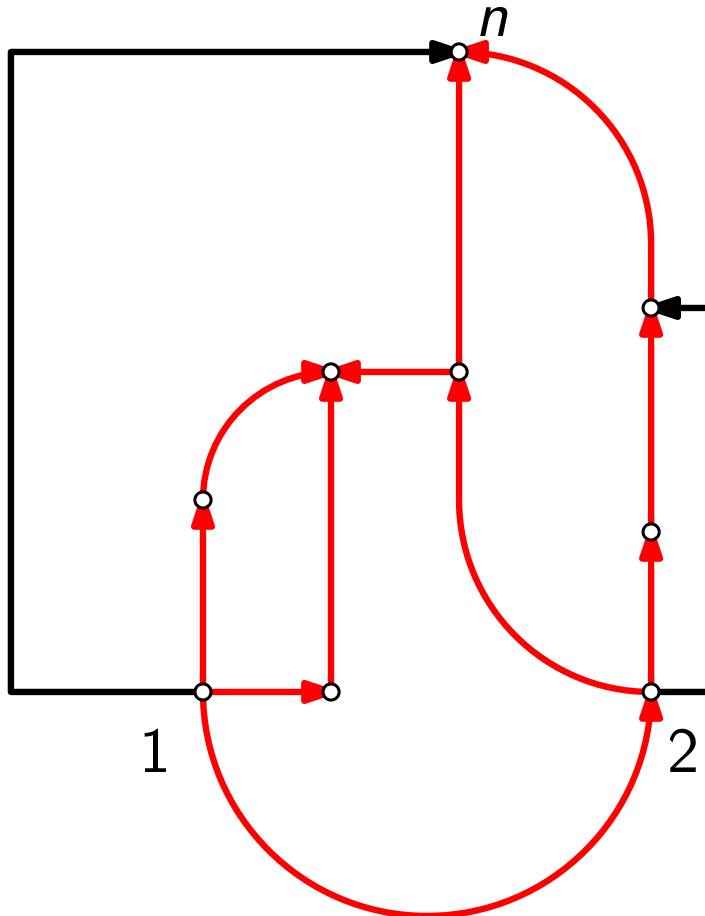
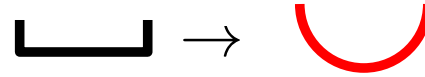
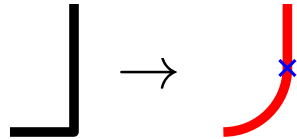
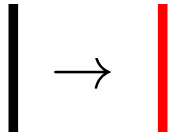
Komplexität-2 Zeichnungen



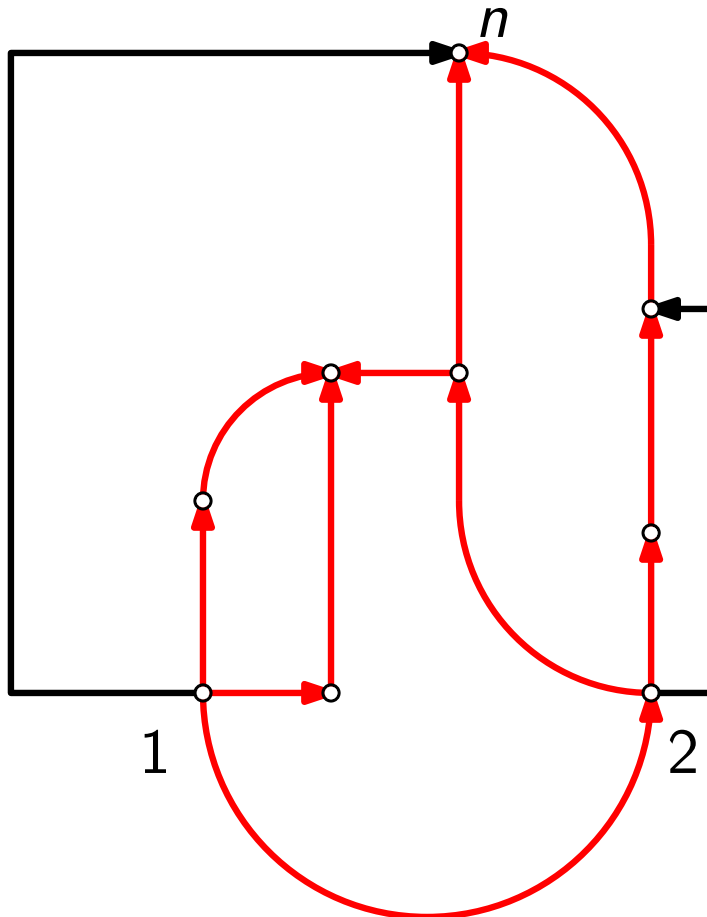
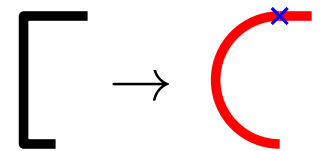
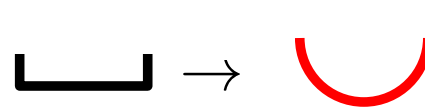
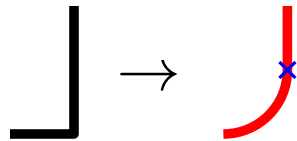
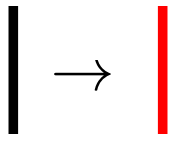
Komplexität-2 Zeichnungen



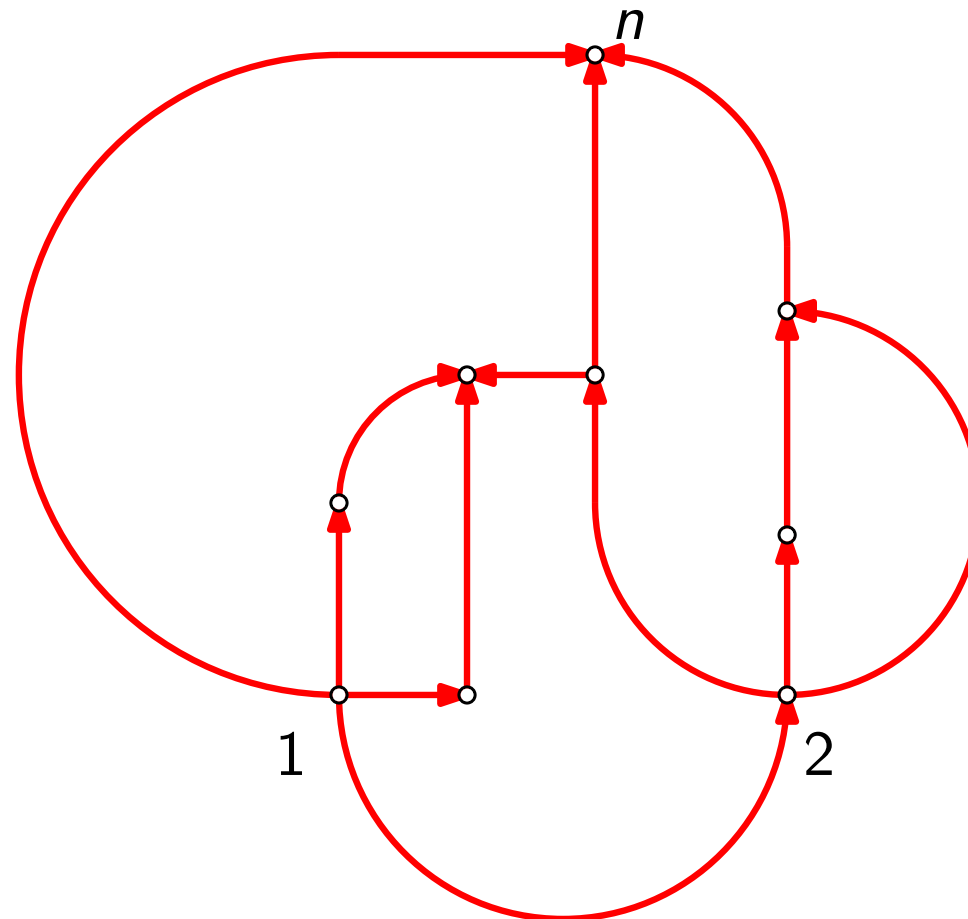
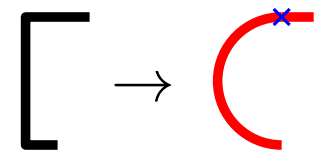
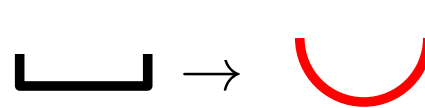
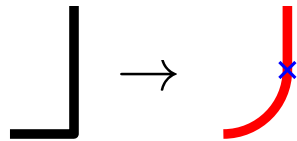
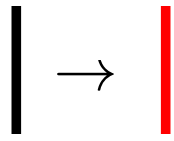
Komplexität-2 Zeichnungen



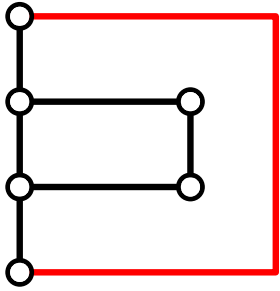
Komplexität-2 Zeichnungen



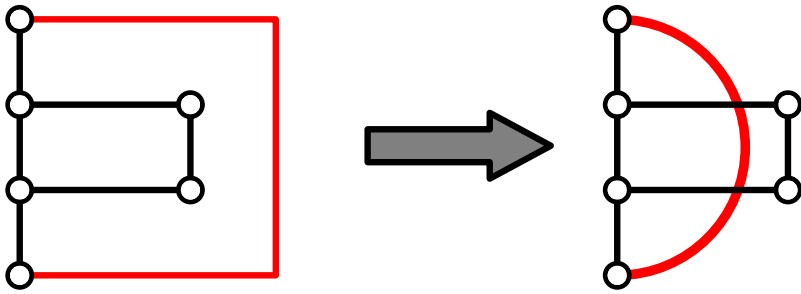
Komplexität-2 Zeichnungen



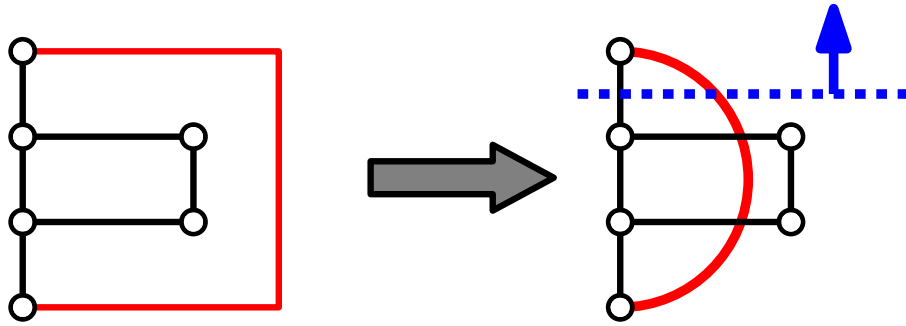
Kreuzungen



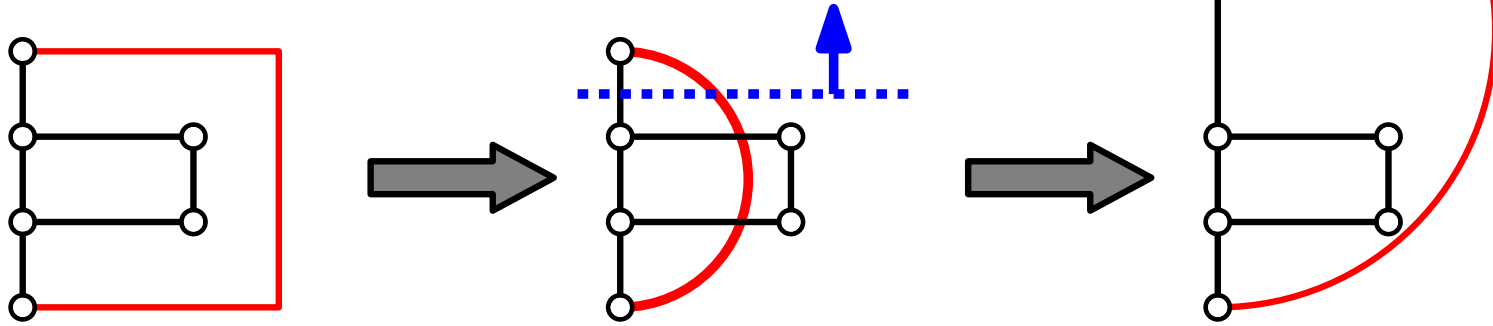
Kreuzungen



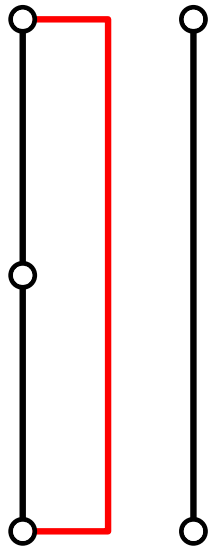
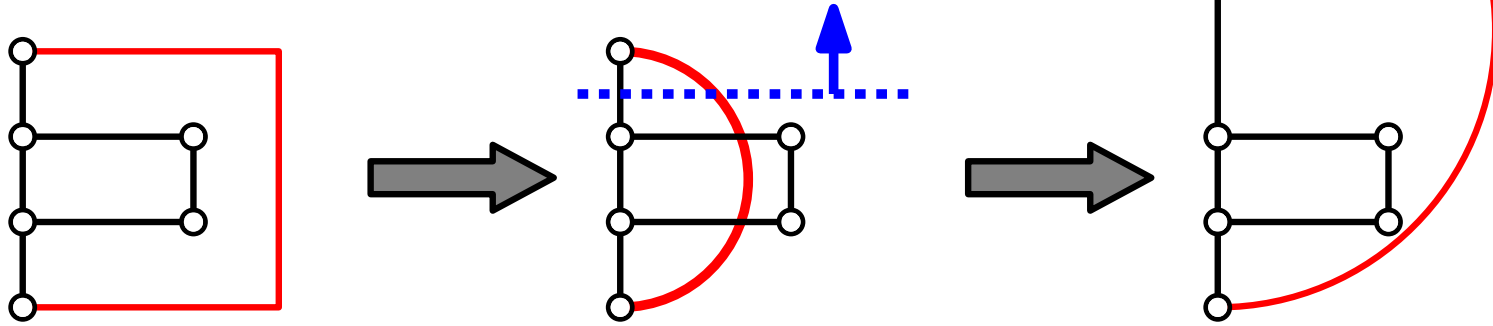
Kreuzungen



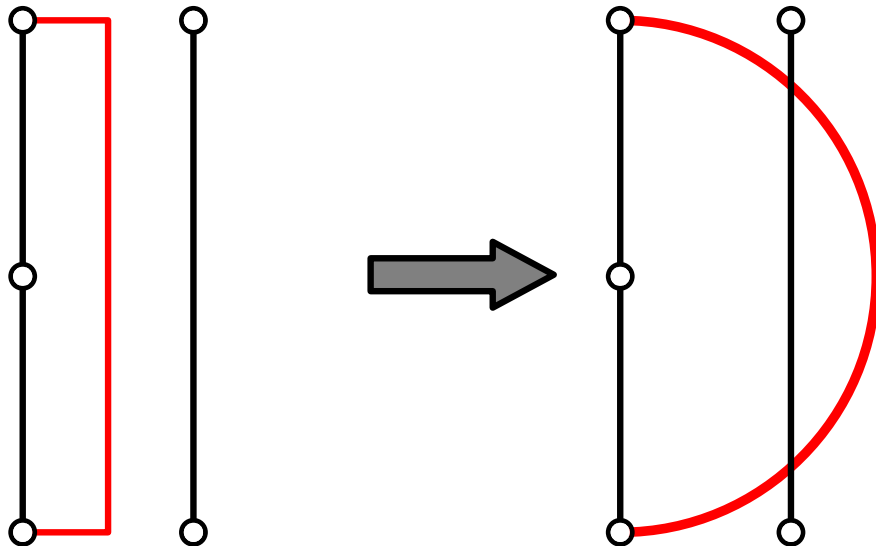
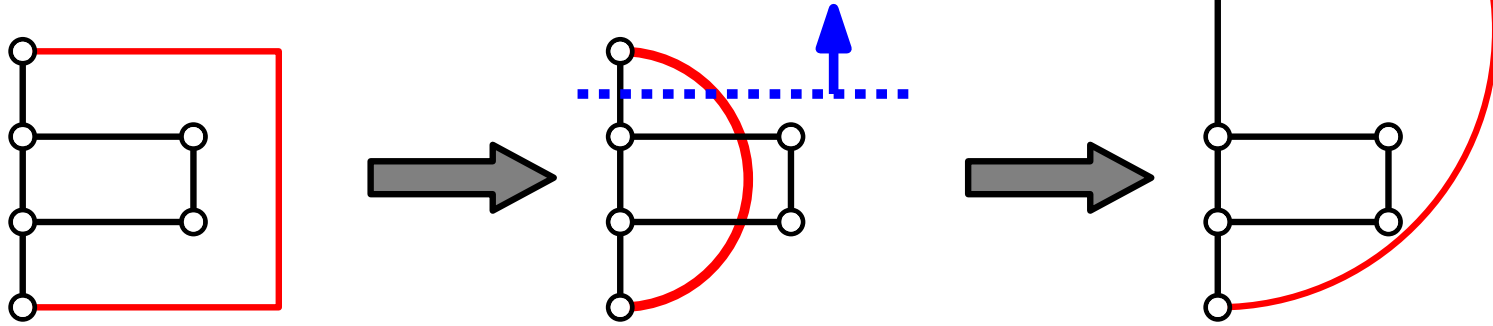
Kreuzungen



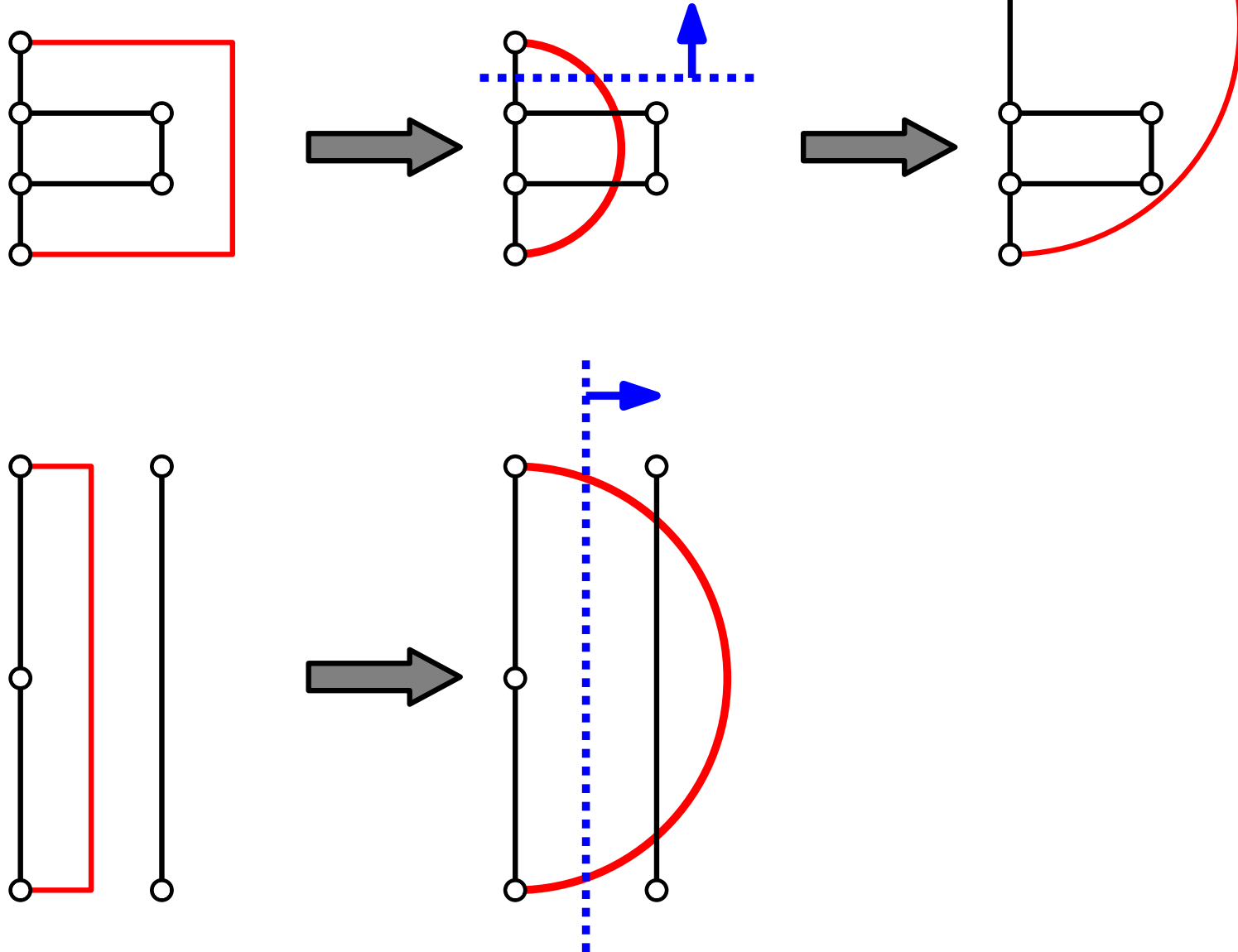
Kreuzungen



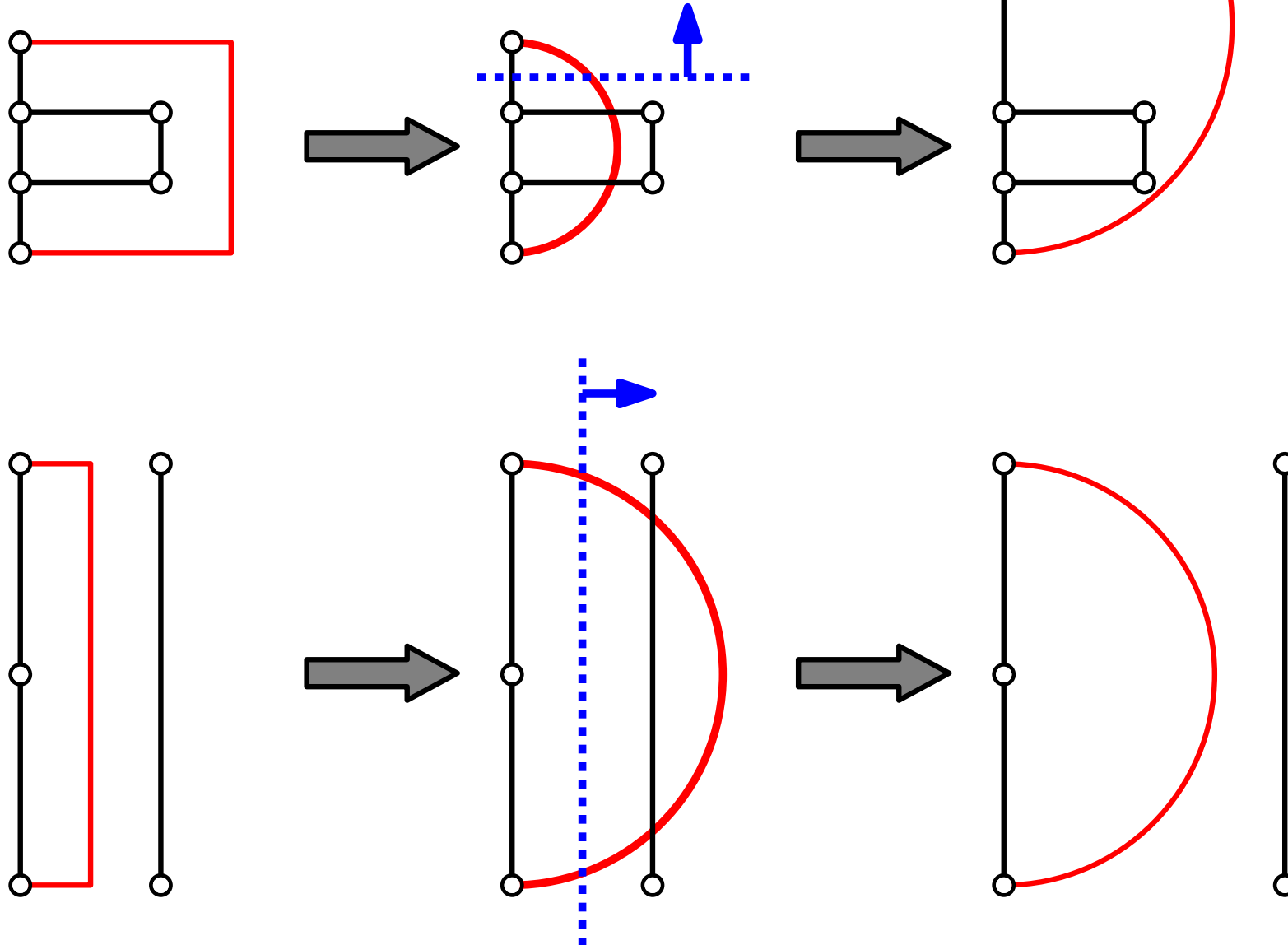
Kreuzungen



Kreuzungen



Kreuzungen



Glatt-orthogonale Zeichnungen – Ergebnisse

Zweifach zusammenhängender 4-planarer Graph \Rightarrow
glatt-orth. Komplexität 3

Glatt-orthogonale Zeichnungen – Ergebnisse

~~Zweifach zusammenhängender~~ 4-planarer Graph \Rightarrow
glatt-orth. Komplexität ~~2~~ 2, exponentielle Fläche

Glatt-orthogonale Zeichnungen – Ergebnisse

~~Zweifach zusammenhängender~~ 4-planarer Graph \Rightarrow
glatt-orth. Komplexität ~~3~~ 2, exponentielle Fläche

3-planarer Graph \Rightarrow glatt-orth. Kompl. 2, polynomielle Fläche

Glatt-orthogonale Zeichnungen – Ergebnisse

~~Zweifach zusammenhängender~~ 4-planarer Graph \Rightarrow
glatt-orth. Komplexität ~~2~~ 2, exponentielle Fläche

3-planarer Graph \Rightarrow glatt-orth. Kompl. 2, polynomielle Fläche

- zweifach zusammenhängend 4-außenplanar
 - dreifach zusammenhängend 3-planar
 - Hamiltonsch 3-planar
- \Rightarrow glatt-orth. Komplexität 1

Glatt-orthogonale Zeichnungen – Ergebnisse

~~Zweifach zusammenhängender~~ 4-planarer Graph \Rightarrow
glatt-orth. Komplexität ~~2~~ 2, exponentielle Fläche

3-planarer Graph \Rightarrow glatt-orth. Kompl. 2, polynomielle Fläche

- zweifach zusammenhängend 4-außenplanar
 - dreifach zusammenhängend 3-planar
 - Hamiltonsch 3-planar
- \Rightarrow glatt-orth. Komplexität 1

glatt-orth. Komplexität 1 \Rightarrow exponentielle Fläche benötigt

Glatt-orthogonale Zeichnungen – Ergebnisse

~~Zweifach zusammenhängender~~ 4-planarer Graph \Rightarrow
glatt-orth. Komplexität ~~2~~ 2, exponentielle Fläche

3-planarer Graph \Rightarrow glatt-orth. Kompl. 2, polynomielle Fläche

- zweifach zusammenhängend 4-außenplanar
 - dreifach zusammenhängend 3-planar
 - Hamiltonsch 3-planar
- \Rightarrow glatt-orth. Komplexität 1

glatt-orth. Komplexität 1 \Rightarrow exponentielle Fläche benötigt

4-planarer Graph $\not\Rightarrow$ glatt-orth. Komplexität 1

Glatt-orthogonale Zeichnungen – Ergebnisse

~~Zweifach zusammenhängender~~ 4-planarer Graph \Rightarrow
glatt-orth. Komplexität ~~2~~ 2, exponentielle Fläche

3-planarer Graph \Rightarrow glatt-orth. Kompl. 2, polynomielle Fläche

- zweifach zusammenhängend 4-außenplanar
 - dreifach zusammenhängend 3-planar
 - Hamiltonsch 3-planar
- \Rightarrow glatt-orth. Komplexität 1

glatt-orth. Komplexität 1 \Rightarrow exponentielle Fläche benötigt

~~4-planarer Graph~~ \nRightarrow glatt-orth. Komplexität 1
orth. Kompl. 2

Teil 3:

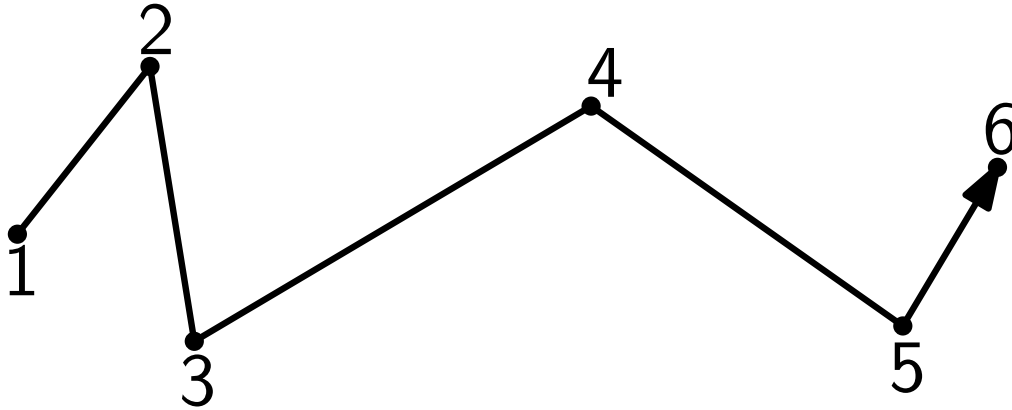
Monotone Zeichnungen von Bäumen

Monotone Zeichnungen

Monotoner Pfad: \exists Richtung d , so dass
Knoten-Reihenfolge in $d =$ Reihenfolge entlang des Pfades.

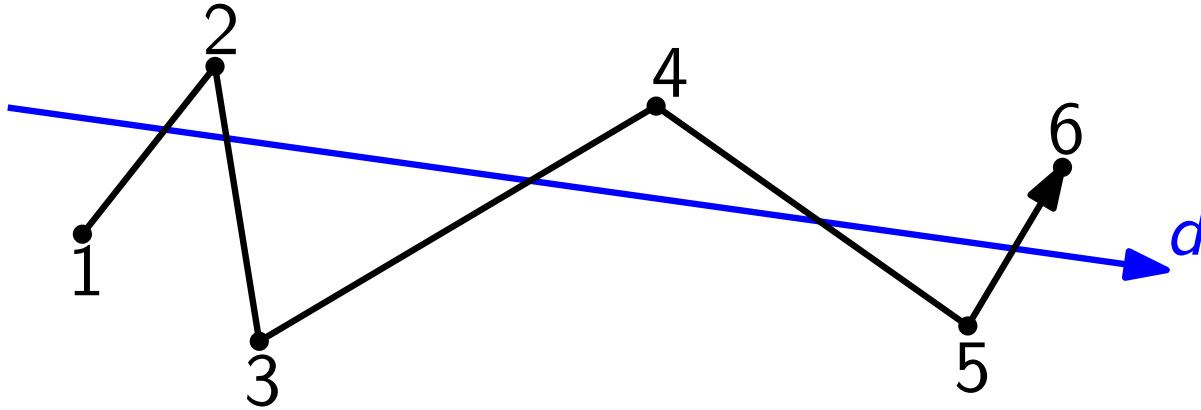
Monotone Zeichnungen

Monotoner Pfad: \exists Richtung d , so dass
Knoten-Reihenfolge in d = Reihenfolge entlang des Pfades.



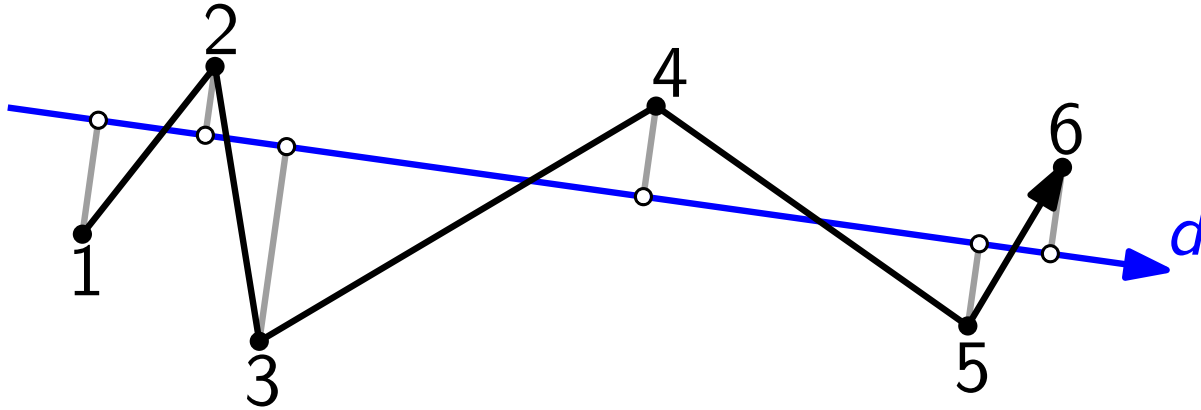
Monotone Zeichnungen

Monotoner Pfad: \exists Richtung d , so dass
Knoten-Reihenfolge in d = Reihenfolge entlang des Pfades.



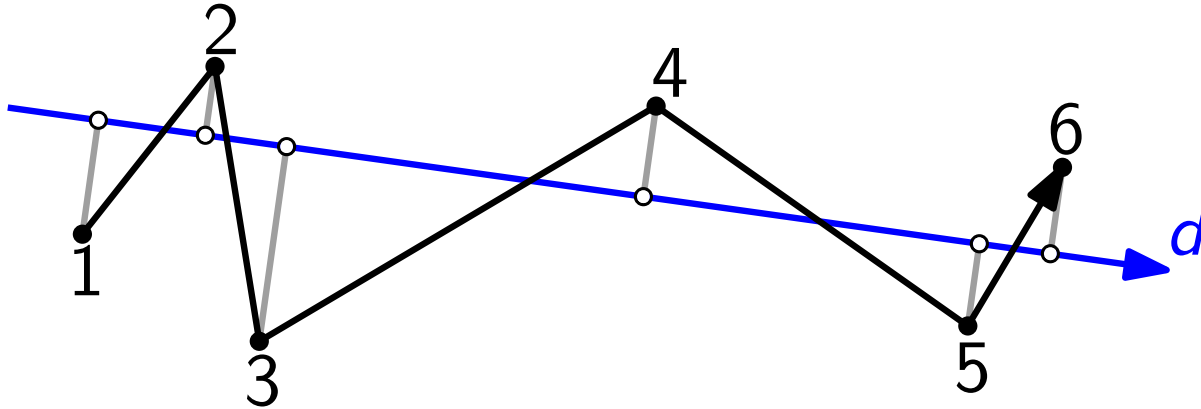
Monotone Zeichnungen

Monotoner Pfad: \exists Richtung d , so dass
Knoten-Reihenfolge in d = Reihenfolge entlang des Pfades.



Monotone Zeichnungen

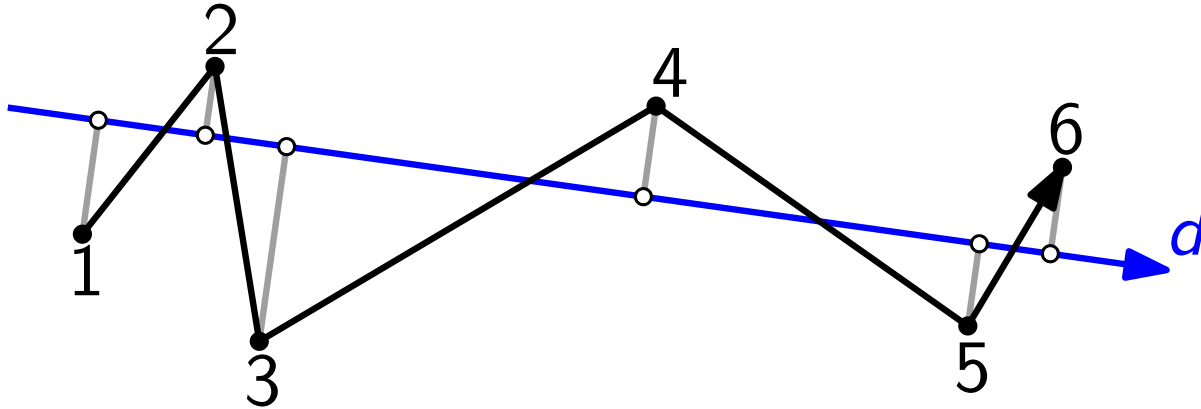
Monotoner Pfad: \exists Richtung d , so dass Knoten-Reihenfolge in $d =$ Reihenfolge entlang des Pfades.



Monotone Zeichnung: \exists monotoner Pfad für jedes Knotenpaar.

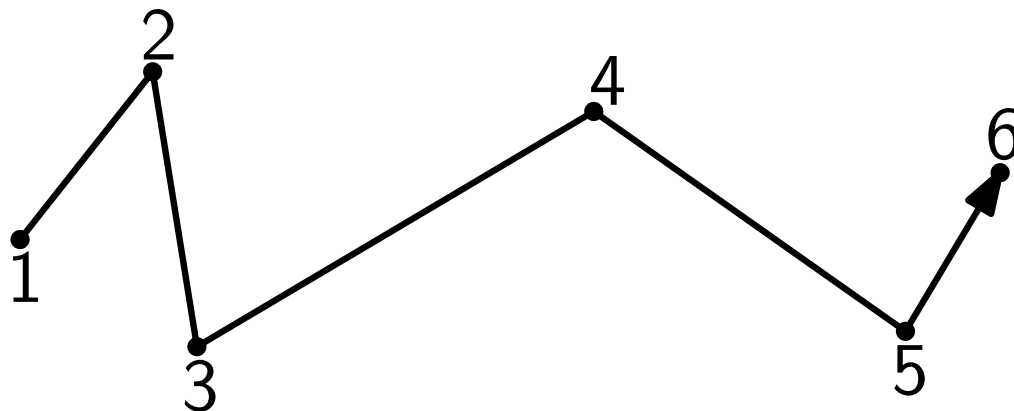
Monotone Zeichnungen

Monotoner Pfad: \exists Richtung d , so dass Knoten-Reihenfolge in $d =$ Reihenfolge entlang des Pfades.



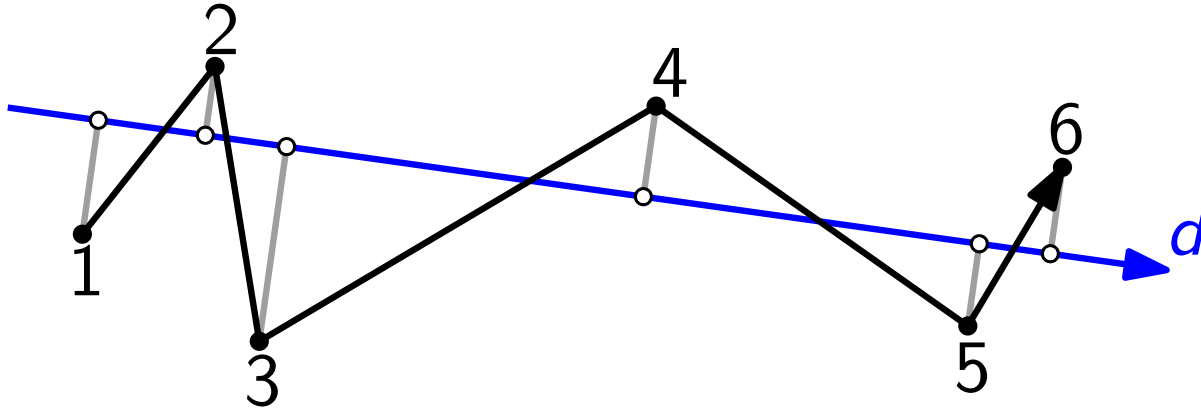
Monotone Zeichnung: \exists monotoner Pfad für jedes Knotenpaar.

Streng monotoner u - v Pfad: $d = \overrightarrow{uv}$.



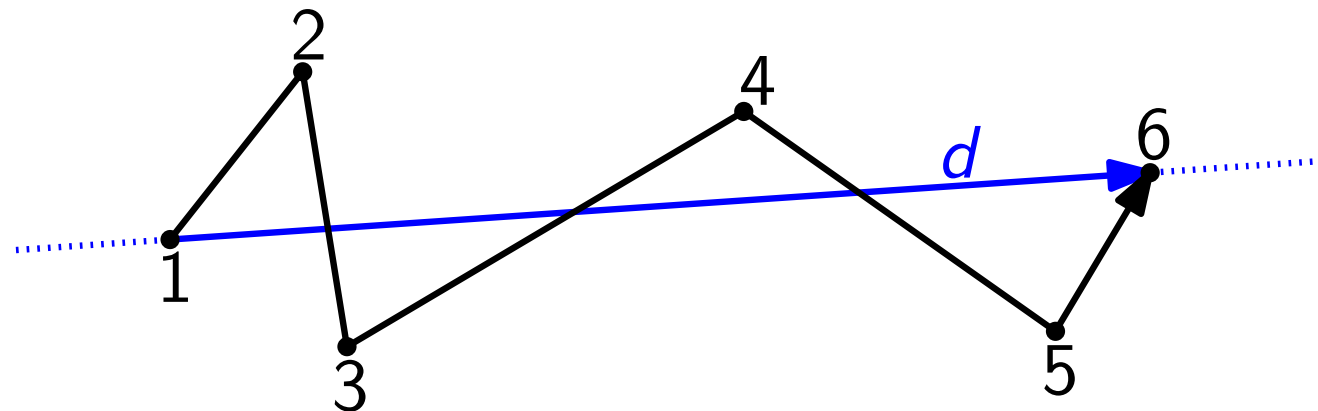
Monotone Zeichnungen

Monotoner Pfad: \exists Richtung d , so dass Knoten-Reihenfolge in $d =$ Reihenfolge entlang des Pfades.



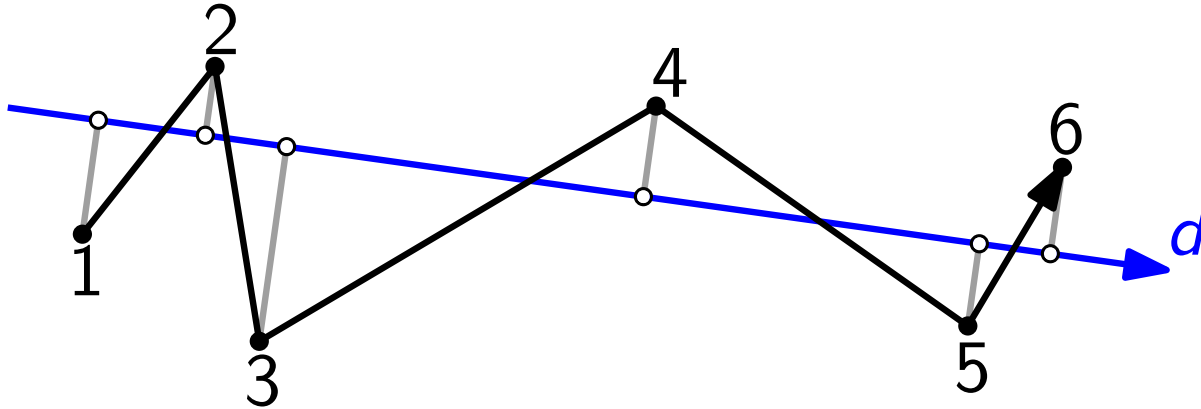
Monotone Zeichnung: \exists monotoner Pfad für jedes Knotenpaar.

Streng monotoner u - v Pfad: $d = \overrightarrow{uv}$.



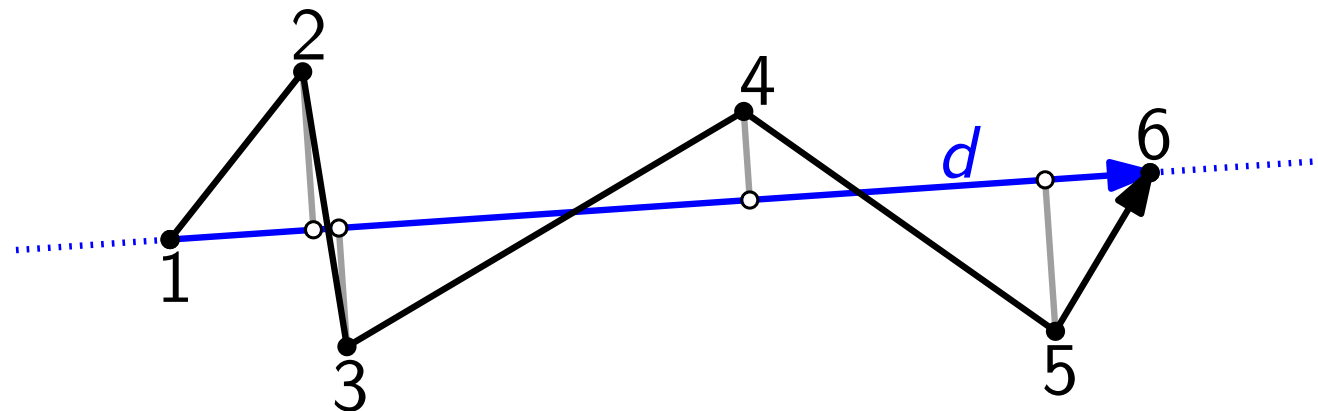
Monotone Zeichnungen

Monotoner Pfad: \exists Richtung d , so dass Knoten-Reihenfolge in $d =$ Reihenfolge entlang des Pfades.



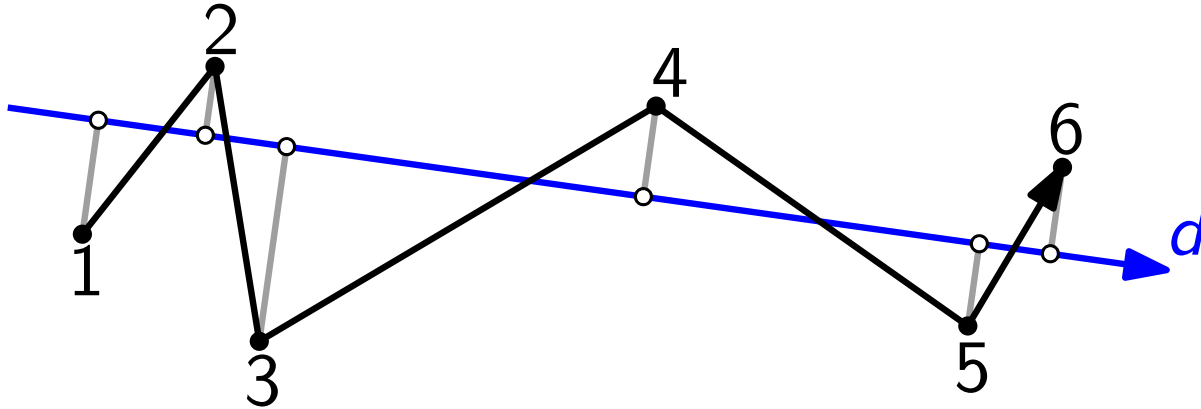
Monotone Zeichnung: \exists monotoner Pfad für jedes Knotenpaar.

Streng monotoner u - v Pfad: $d = \overrightarrow{uv}$.



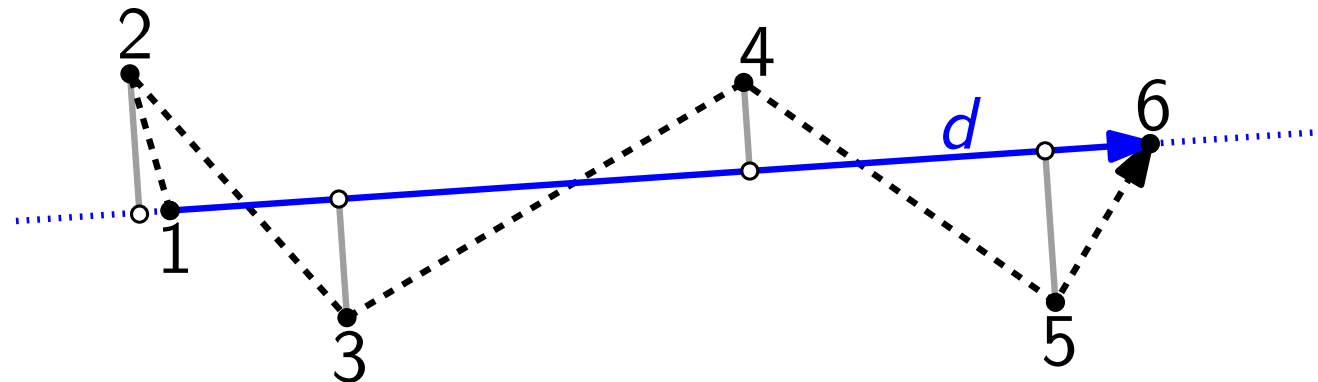
Monotone Zeichnungen

Monotoner Pfad: \exists Richtung d , so dass Knoten-Reihenfolge in $d =$ Reihenfolge entlang des Pfades.



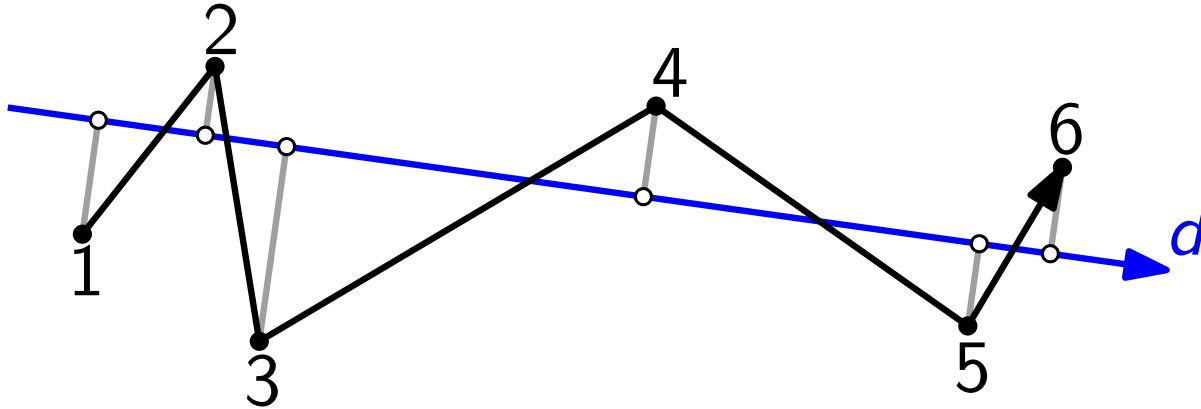
Monotone Zeichnung: \exists monotoner Pfad für jedes Knotenpaar.

Streng monotoner u - v Pfad: $d = \overrightarrow{uv}$.



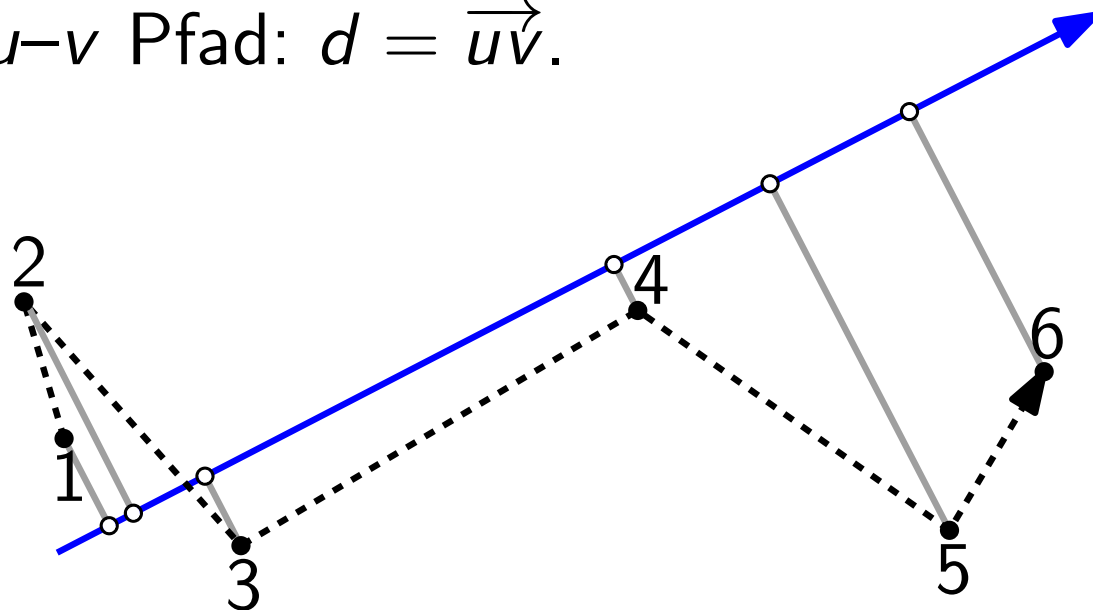
Monotone Zeichnungen

Monotoner Pfad: \exists Richtung d , so dass Knoten-Reihenfolge in $d =$ Reihenfolge entlang des Pfades.



Monotone Zeichnung: \exists monotoner Pfad für jedes Knotenpaar.

Streng monotoner u - v Pfad: $d = \overrightarrow{uv}$.

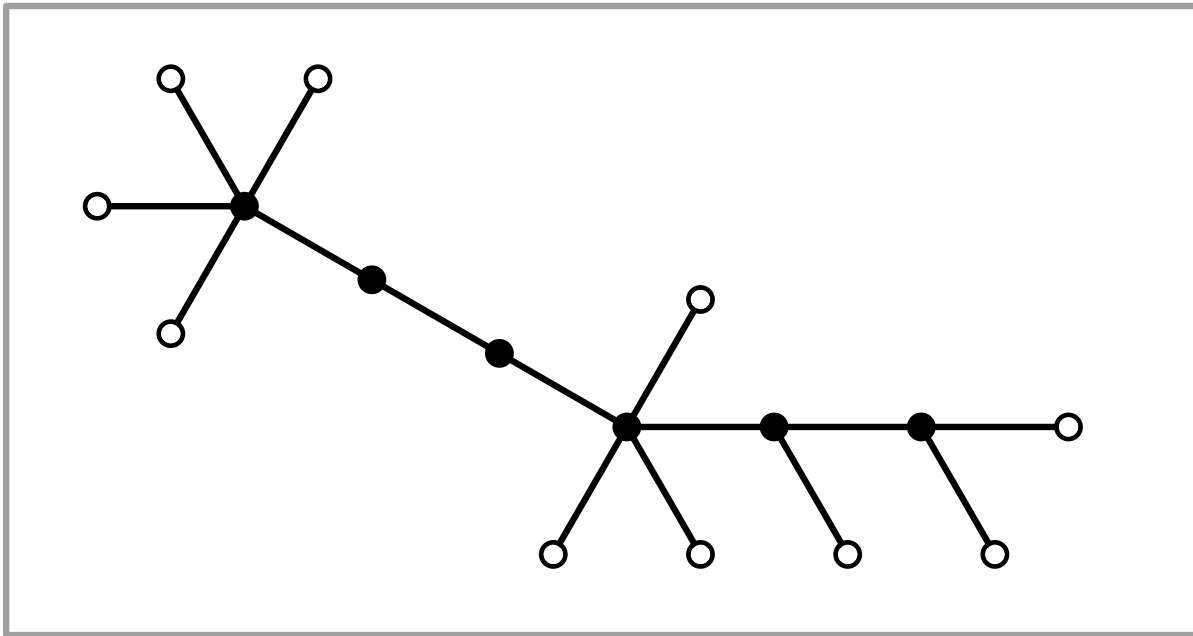


Monotone Zeichnungen

Konvexe Zeichnung: Jede Facette ist konvex.

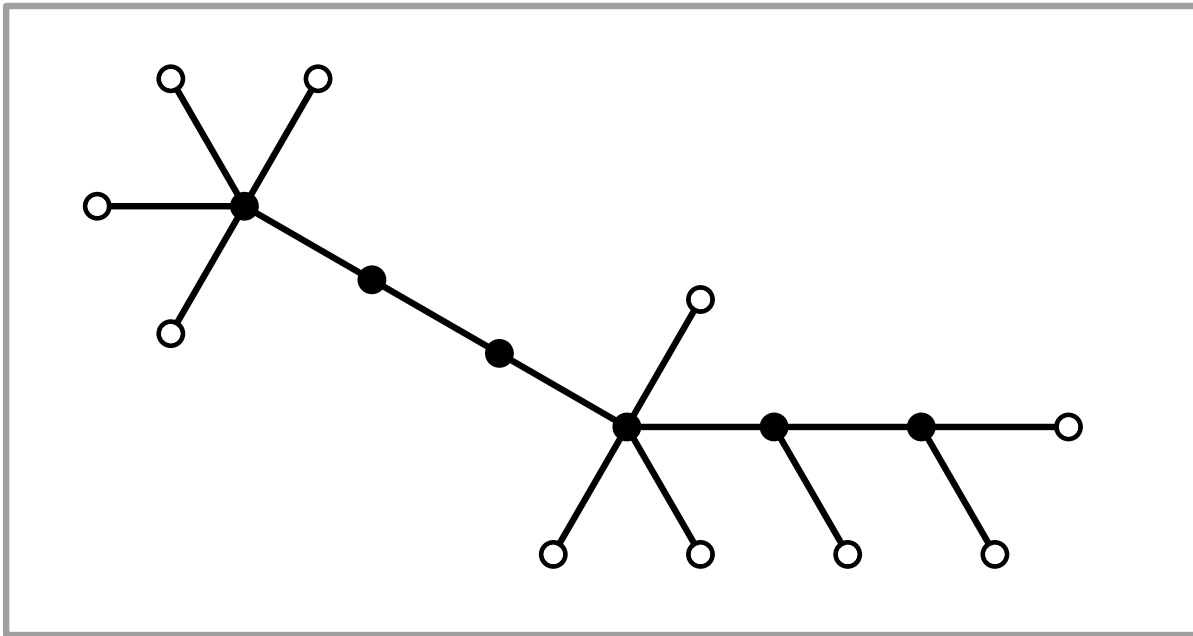
Monotone Zeichnungen

Konvexe Zeichnung: Jede Facette ist konvex.



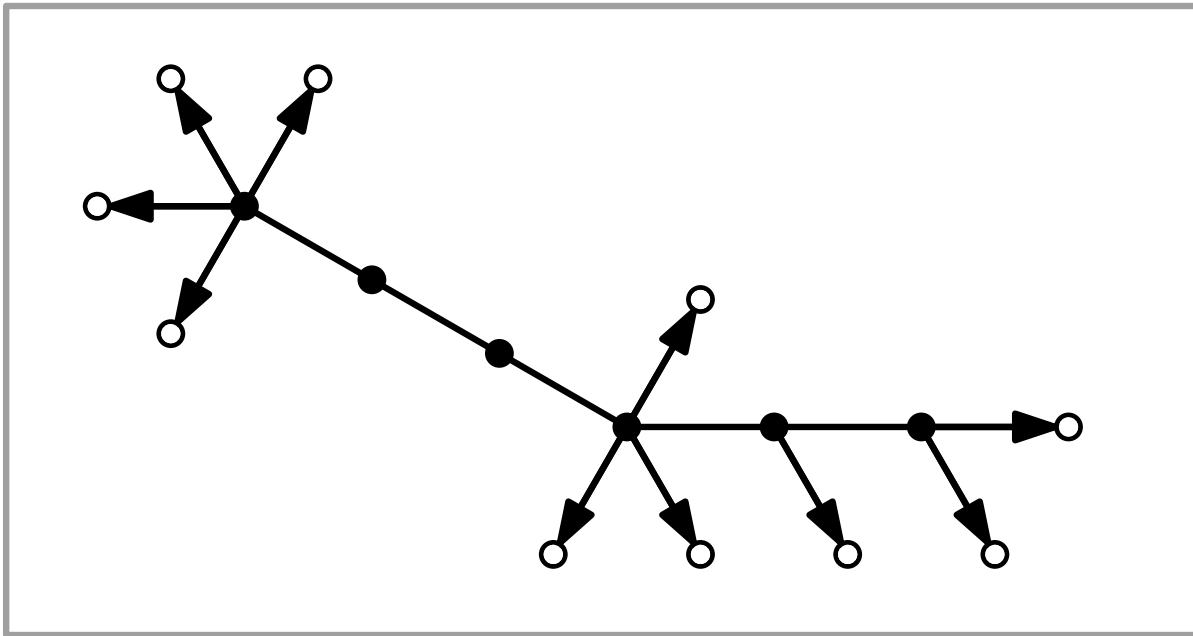
Monotone Zeichnungen

Konvexe Zeichnung: Jede Facette ist konvex. [?]



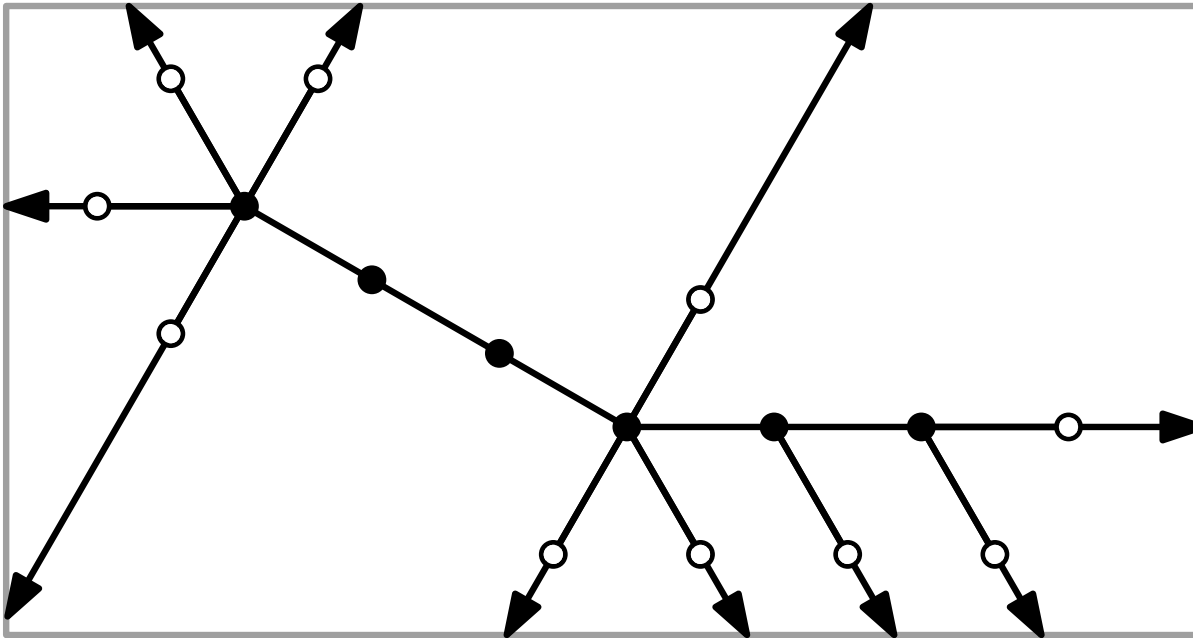
Monotone Zeichnungen

Konvexe Zeichnung: Jede Facette ist konvex.



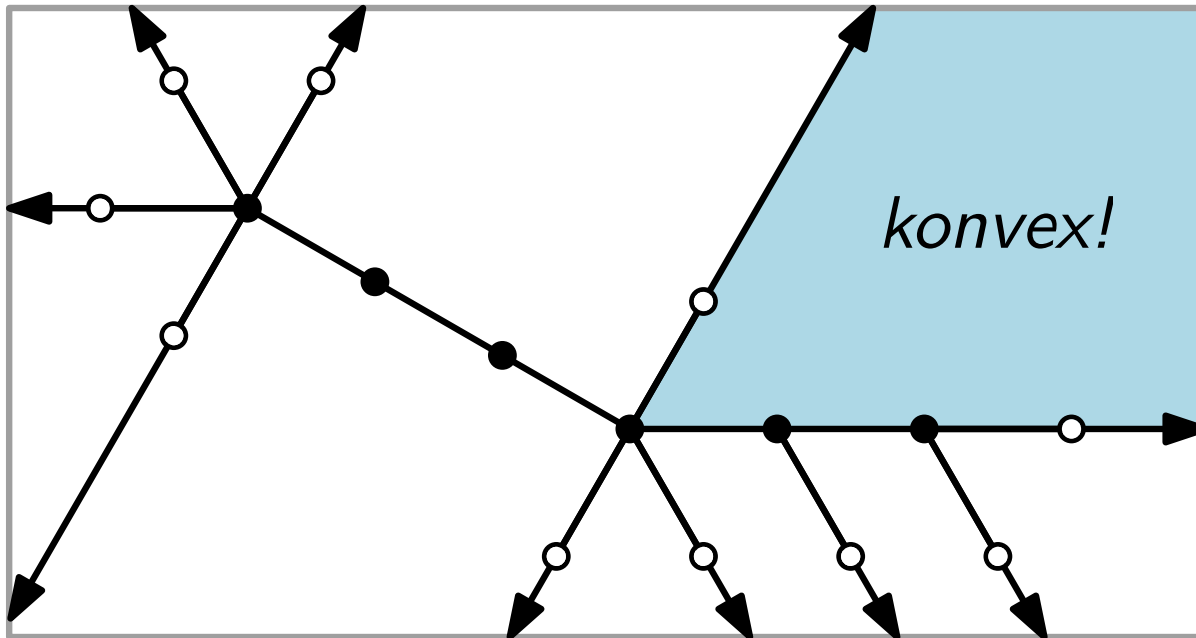
Monotone Zeichnungen

Konvexe Zeichnung: Jede Facette ist konvex.



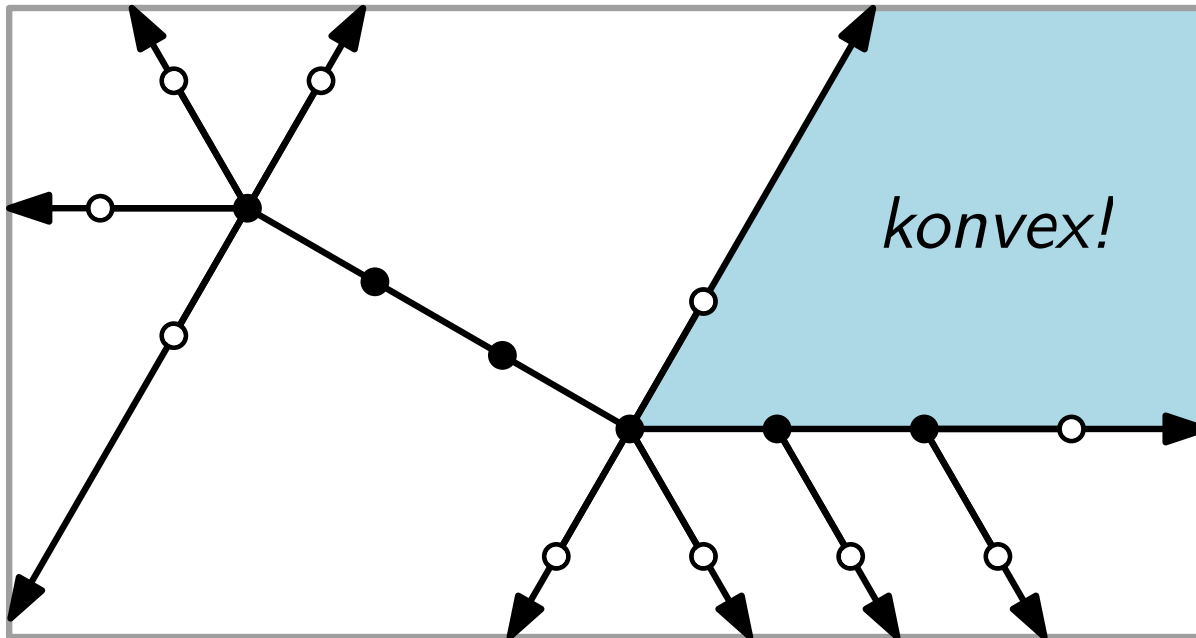
Monotone Zeichnungen

Konvexe Zeichnung: Jede Facette ist konvex.



Monotone Zeichnungen

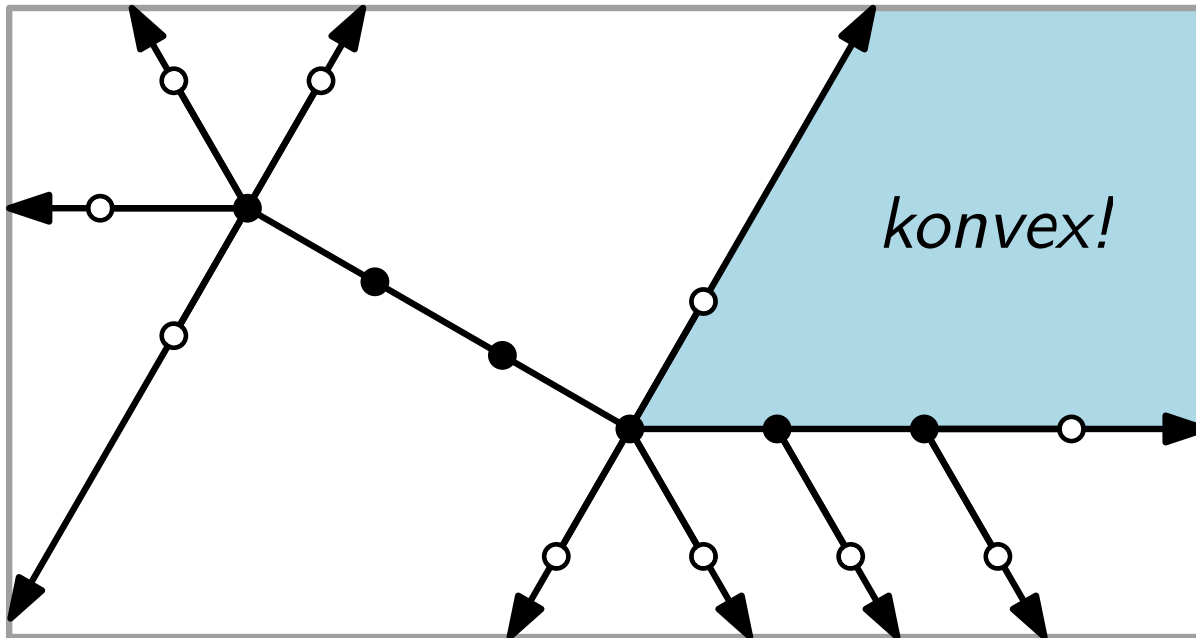
Konvexe Zeichnung: Jede Facette ist konvex.



Jede konvexe, geradlinige Zeichnung ist kreuzungsfrei und monoton

Monotone Zeichnungen

Konvexe Zeichnung: Jede Facette ist konvex.

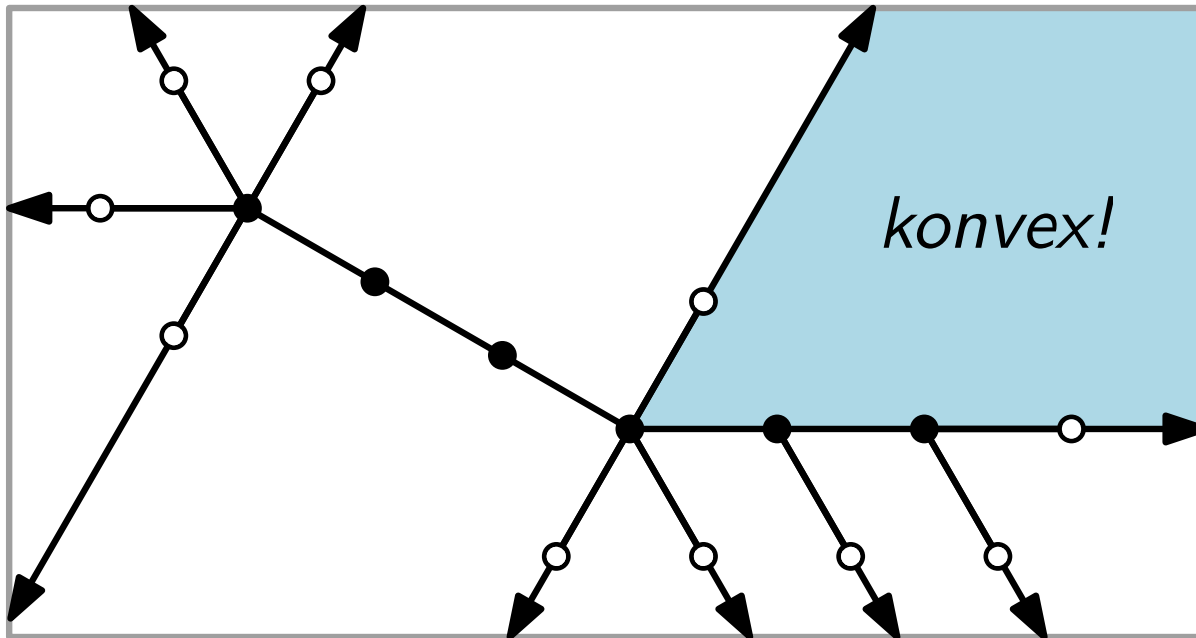


Jede konvexe, geradlinige Zeichnung ist kreuzungsfrei und monoton – aber im Allgemeinen nicht streng monoton.

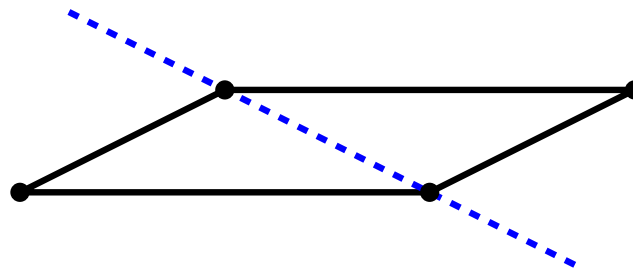


Monotone Zeichnungen

Konvexe Zeichnung: Jede Facette ist konvex.

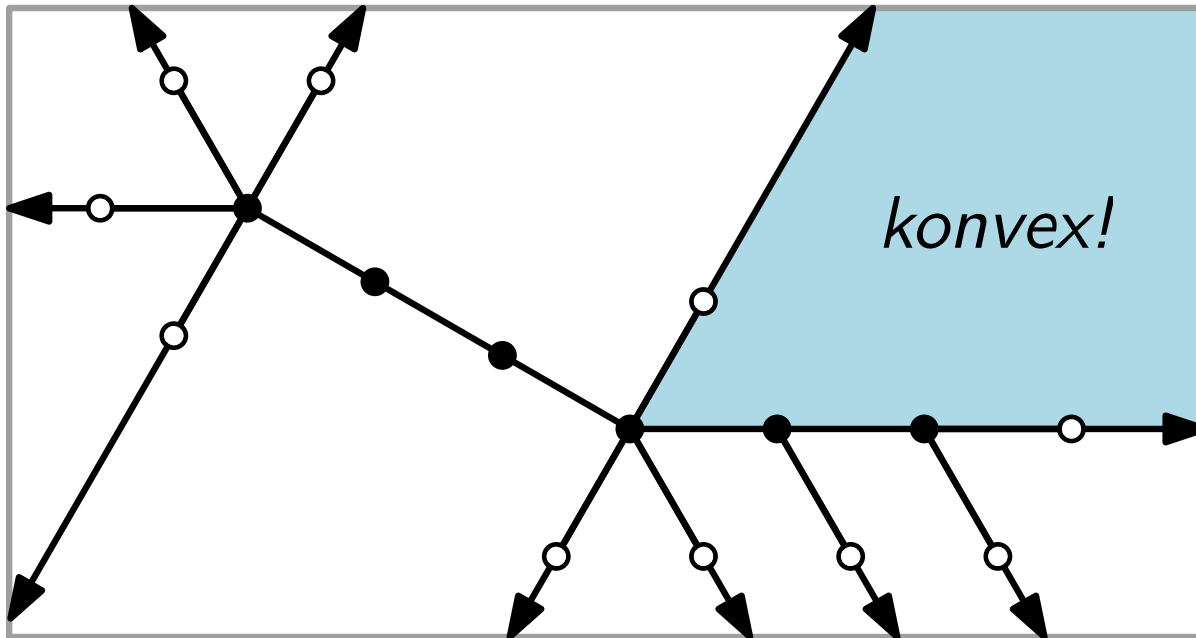


Jede konvexe, geradlinige Zeichnung ist kreuzungsfrei und monoton – aber im Allgemeinen nicht streng monoton.

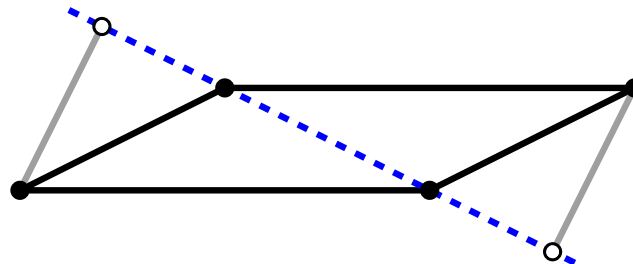


Monotone Zeichnungen

Konvexe Zeichnung: Jede Facette ist konvex.



Jede konvexe, geradlinige Zeichnung ist kreuzungsfrei und monoton – aber im Allgemeinen nicht streng monoton.



Monotone Zeichnungen – Bekannte Resultate

Angelini et al.

[JGAA'12]

- *Baum* \Rightarrow monotone Zeichnung, $O(n^{1.6}) \times O(n^{1.6})$ Gitter

Monotone Zeichnungen – Bekannte Resultate

Angelini et al.

[JGAA'12]

- *Baum* \Rightarrow monotone Zeichnung, $O(n^{1.6}) \times O(n^{1.6})$ Gitter
- *Zweifach zusammenhängender planarer Graph* \Rightarrow monotone Zeichnung, exponentielle Fläche

Monotone Zeichnungen – Bekannte Resultate

Angelini et al.

[JGAA'12]

- *Baum* \Rightarrow monotone Zeichnung, $O(n^{1.6}) \times O(n^{1.6})$ Gitter
- *Zweifach zusammenhängender planarer Graph* \Rightarrow monotone Zeichnung, exponentielle Fläche

Angelini et al.

[Algorithmica'13]

Außenplanarer Graph \Rightarrow
monotone Zeichnung, $O(n) \times O(n^2)$ Gitter

Monotone Zeichnungen – Bekannte Resultate

Angelini et al.

[JGAA'12]

- *Baum* \Rightarrow monotone Zeichnung, $O(n^{1.6}) \times O(n^{1.6})$ Gitter
- *Zweifach zusammenhängender planarer Graph* \Rightarrow monotone Zeichnung, exponentielle Fläche

Angelini et al.

[Algorithmica'13]

Außenplanarer Graph \Rightarrow
monotone Zeichnung, $O(n) \times O(n^2)$ Gitter

Hossain & Rahman

[FAW'14]

Planarer Graph \Rightarrow monotone Zeichnung, $O(n) \times O(n^2)$ Gitter

Monotone Zeichnungen – Bekannte Resultate

Angelini et al.

[JGAA'12]

- *Baum* \Rightarrow monotone Zeichnung, $O(n^{1.6}) \times O(n^{1.6})$ Gitter
- *Zweifach zusammenhängender planarer Graph* \Rightarrow monotone Zeichnung, exponentielle Fläche

Angelini et al.

[Algorithmica'13]

Außenplanarer Graph \Rightarrow
monotone Zeichnung, $O(n) \times O(n^2)$ Gitter

Hossain & Rahman

[FAW'14]

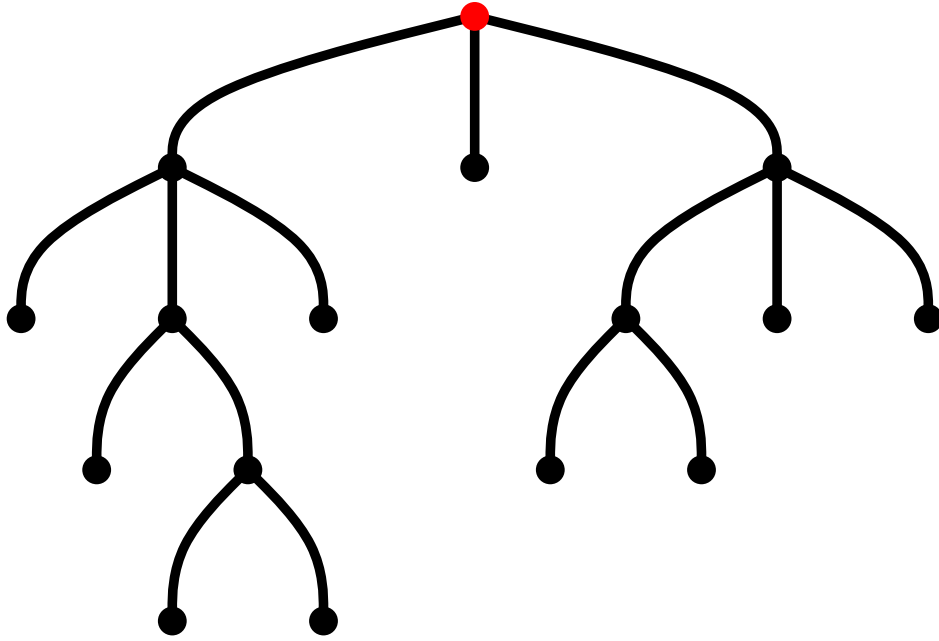
Planarer Graph \Rightarrow monotone Zeichnung, $O(n) \times O(n^2)$ Gitter

Carlson & Eppstein

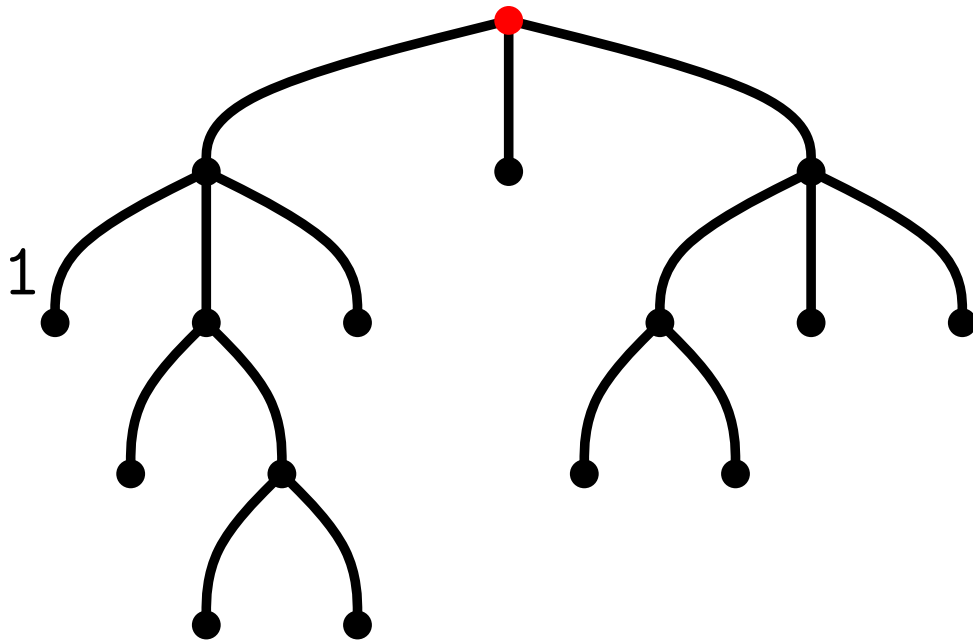
[GD'06]

Baum \Rightarrow konvexe Zeichnung, *optimaler Winkelauflösung*

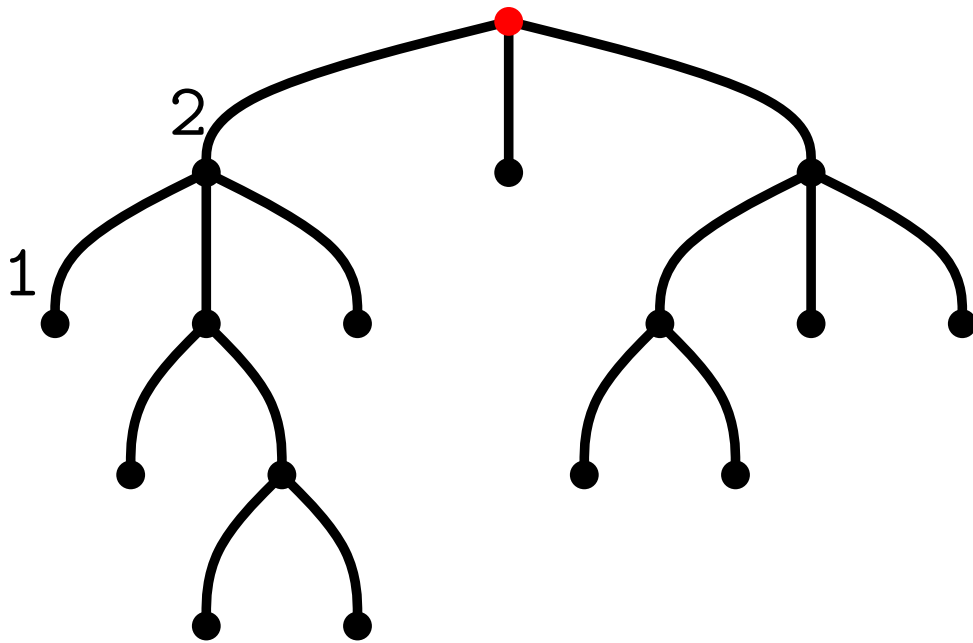
Schritt I: Beschriftete Kanten



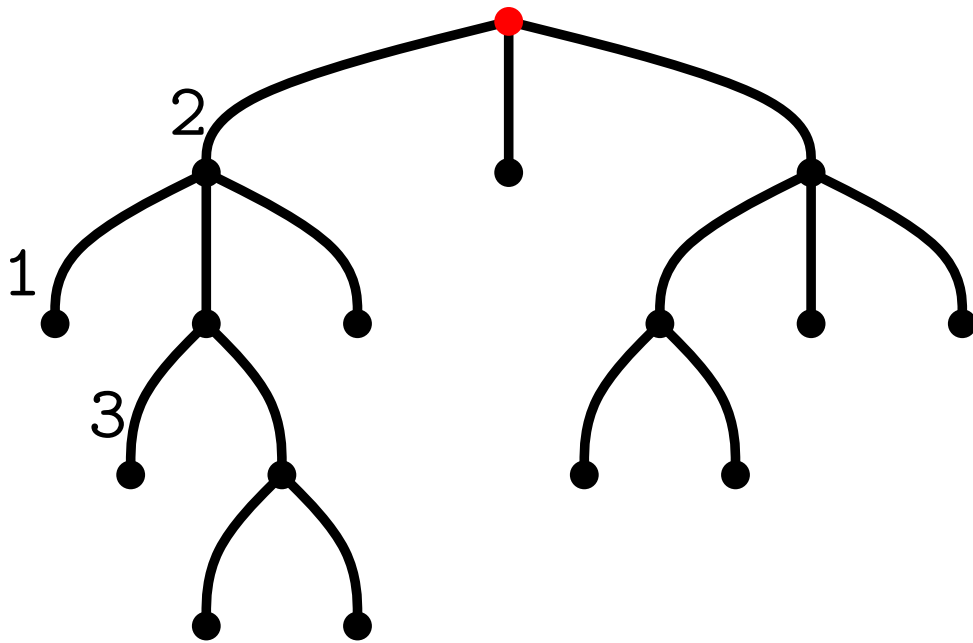
Schritt I: Beschriftete Kanten



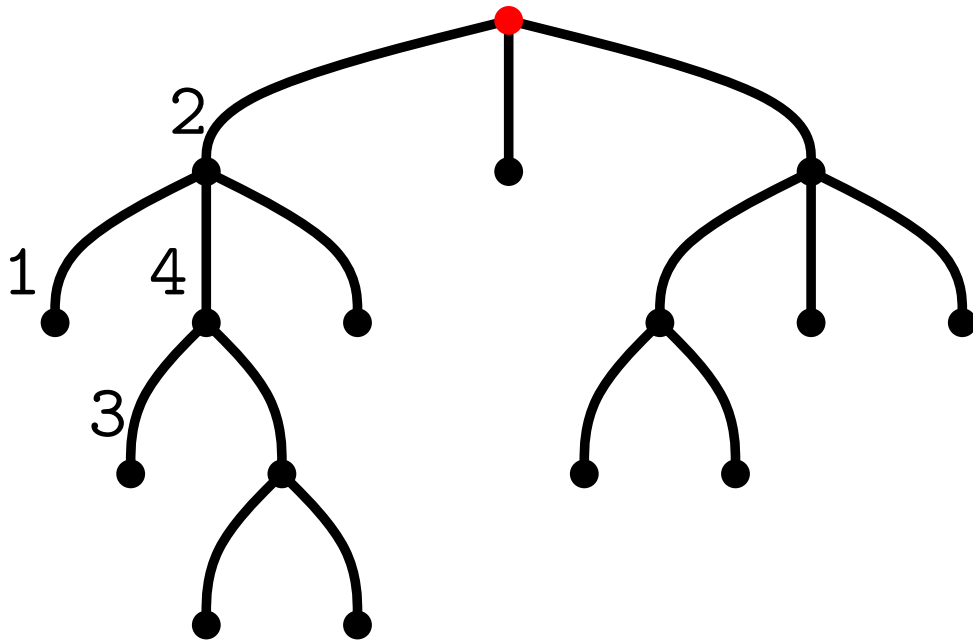
Schritt I: Beschriftete Kanten



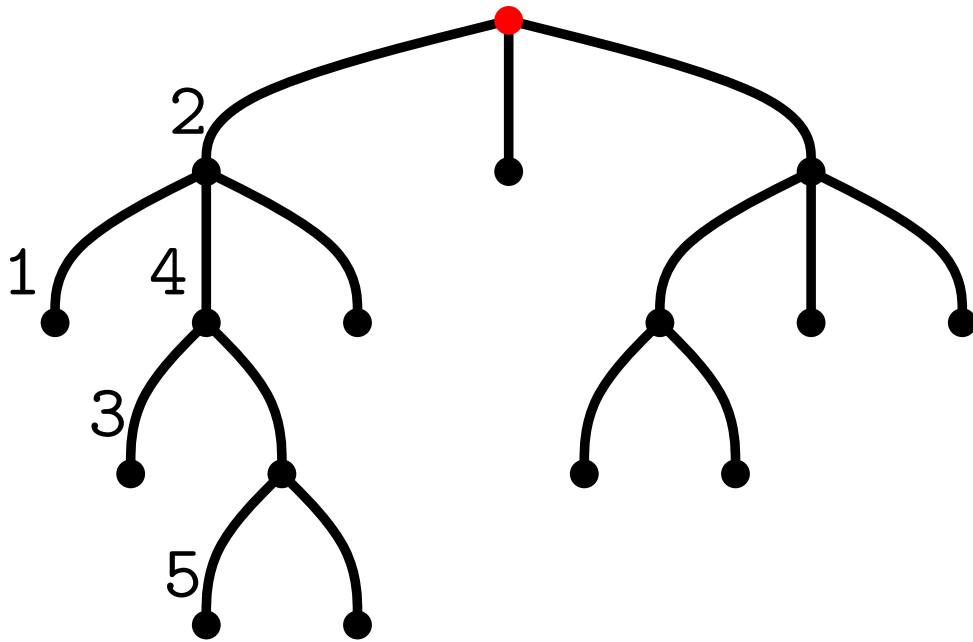
Schritt I: Beschriftete Kanten



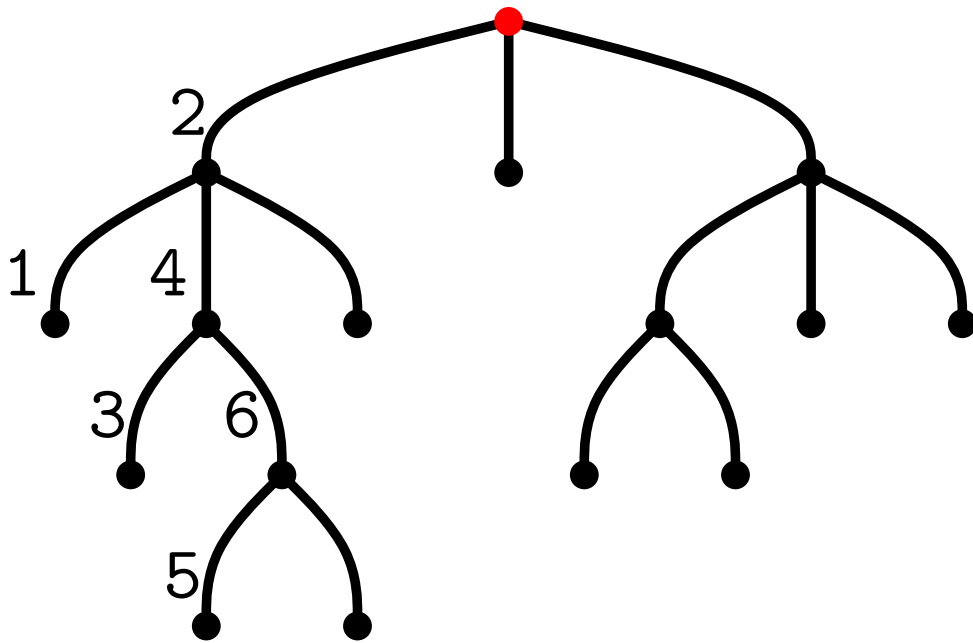
Schritt I: Beschriftete Kanten



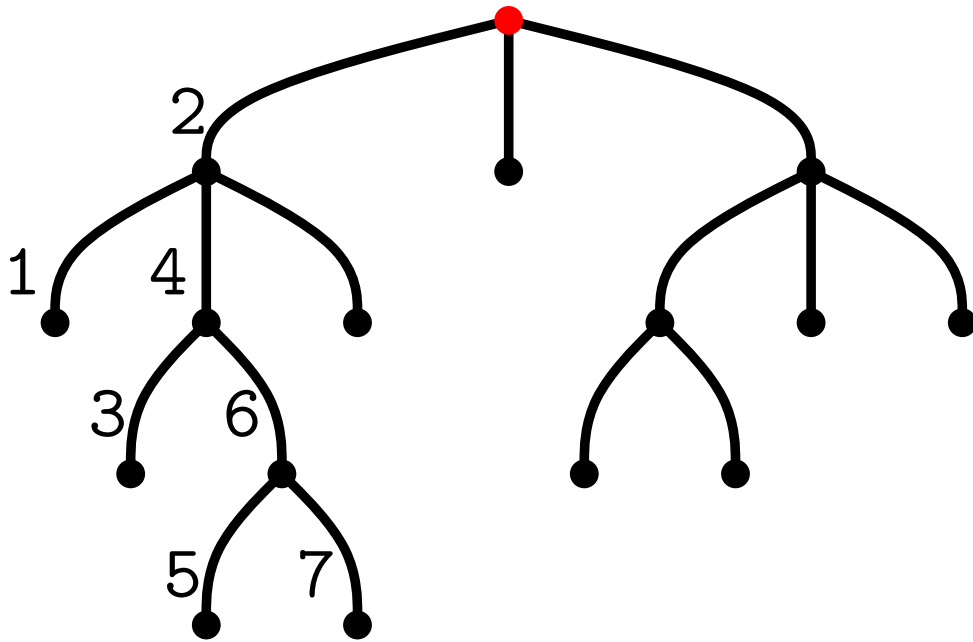
Schritt I: Beschriftete Kanten



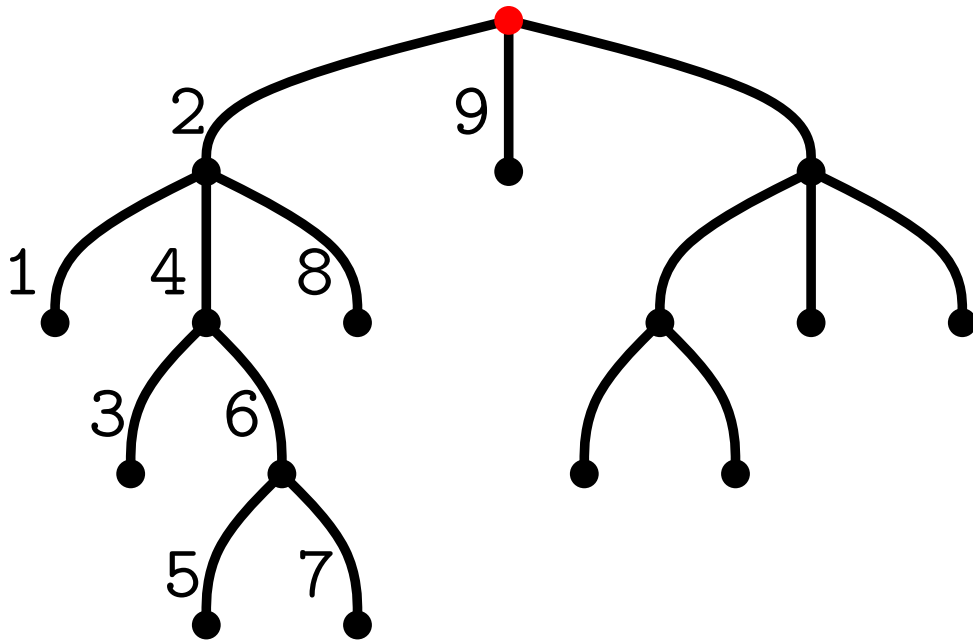
Schritt I: Beschriftete Kanten



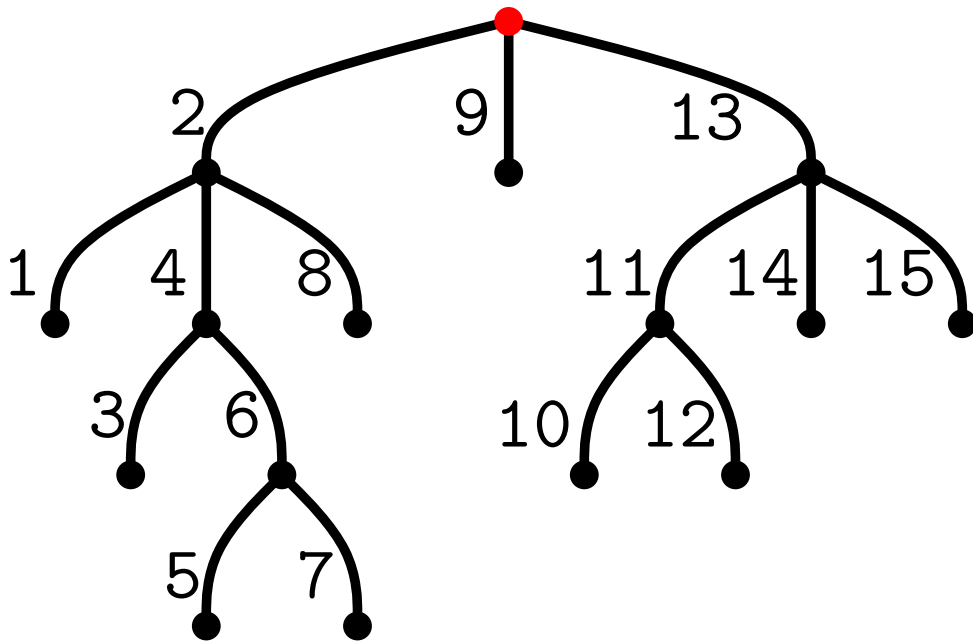
Schritt I: Beschriftete Kanten



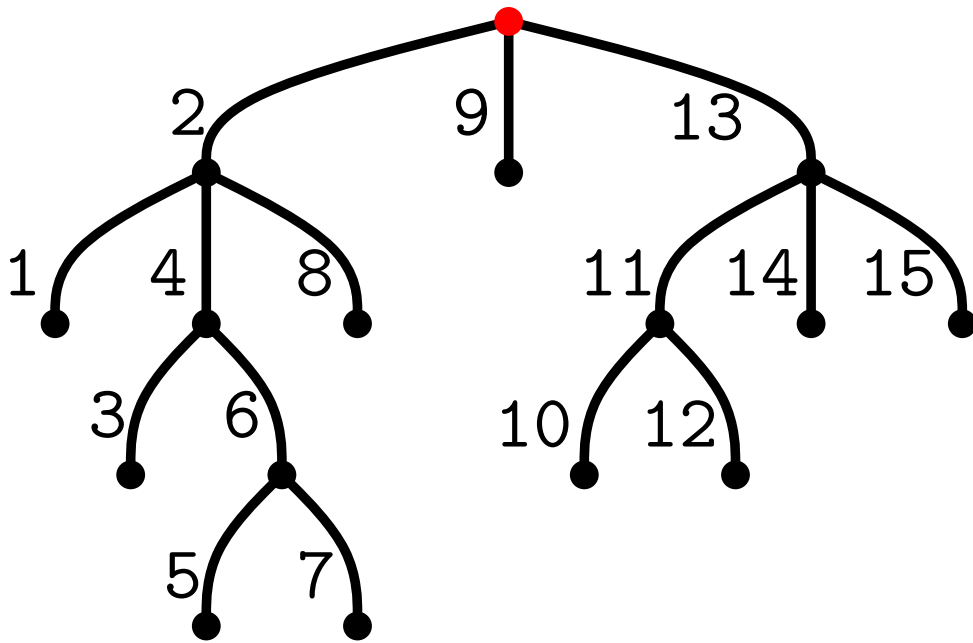
Schritt I: Beschriftete Kanten



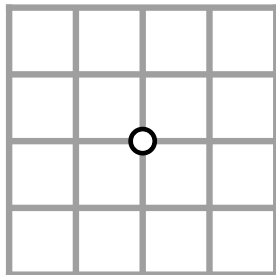
Schritt I: Beschriftete Kanten



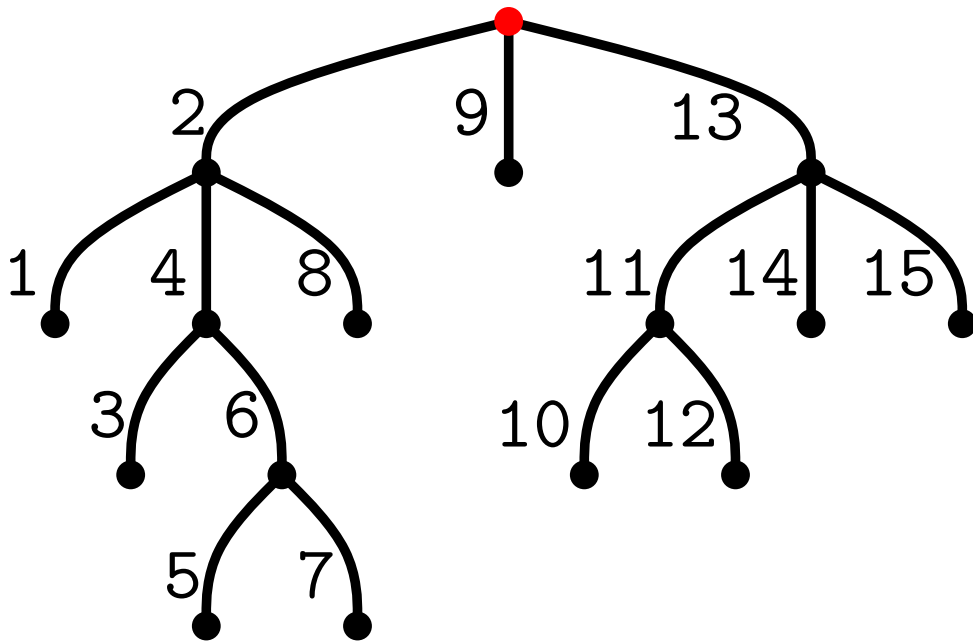
Schritt I: Beschrifte Kanten



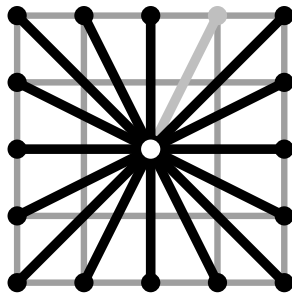
Schritt II: Wähle Vektoren



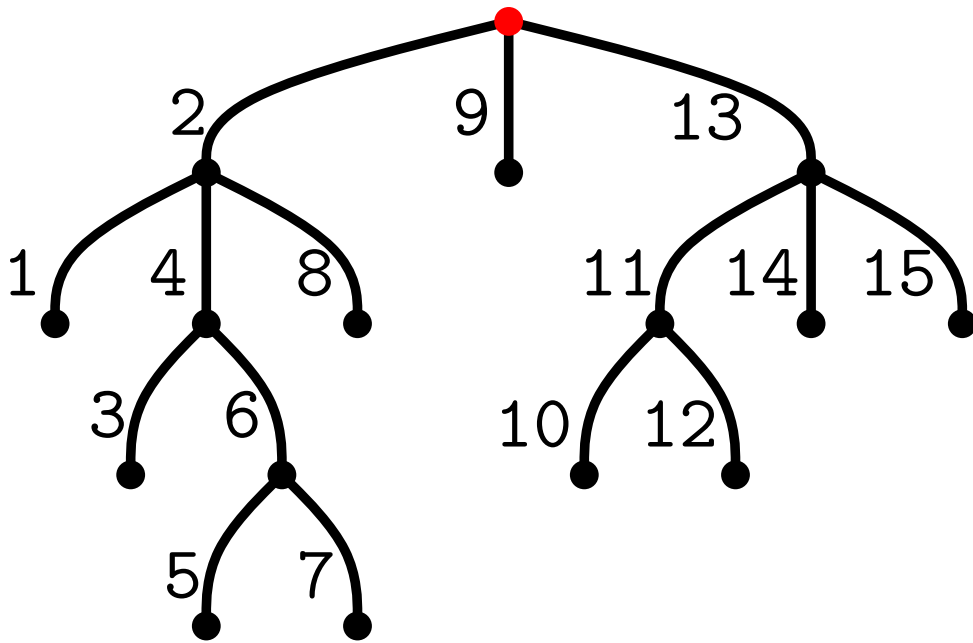
Schritt I: Beschrifte Kanten



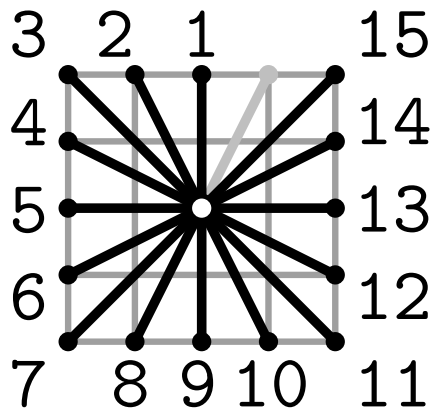
Schritt II: Wähle Vektoren



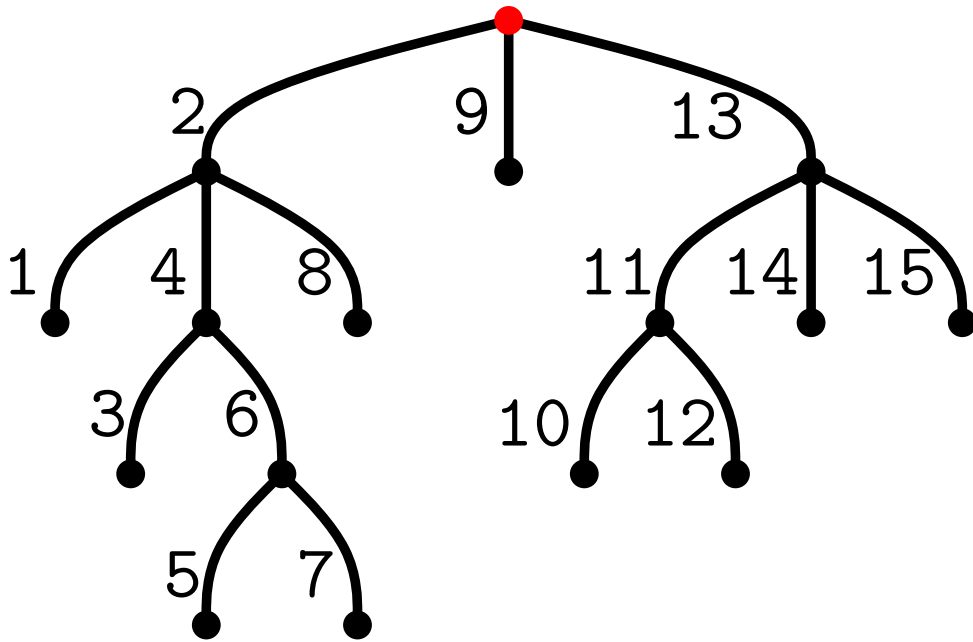
Schritt I: Beschriftete Kanten



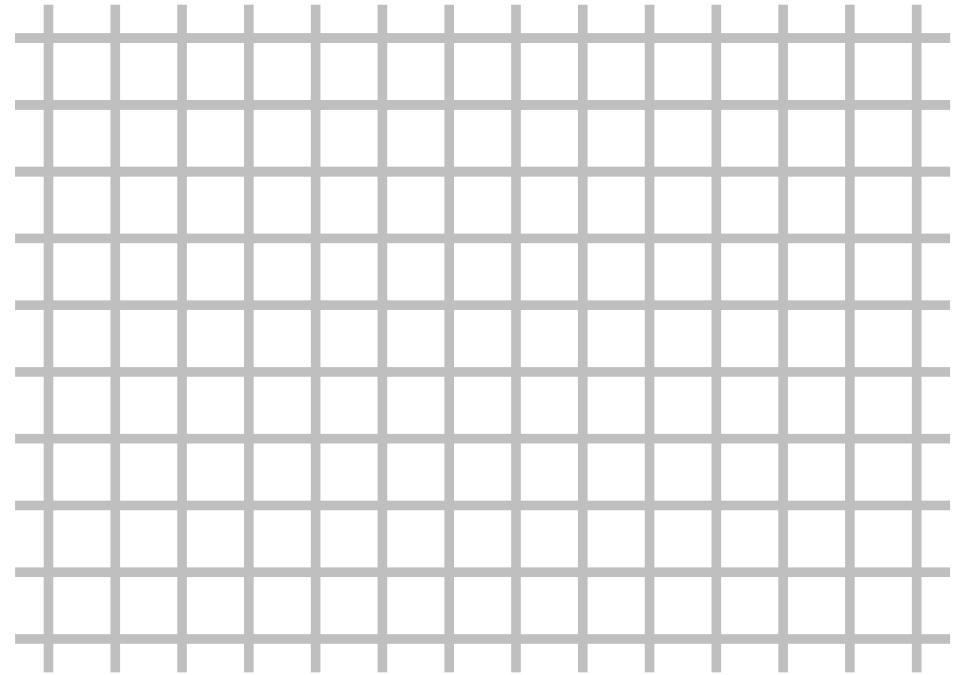
Schritt II: Wähle Vektoren



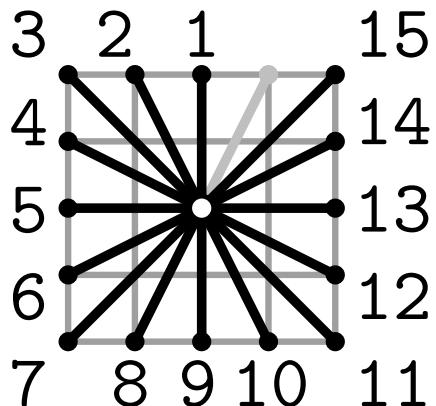
Schritt I: Beschriftete Kanten



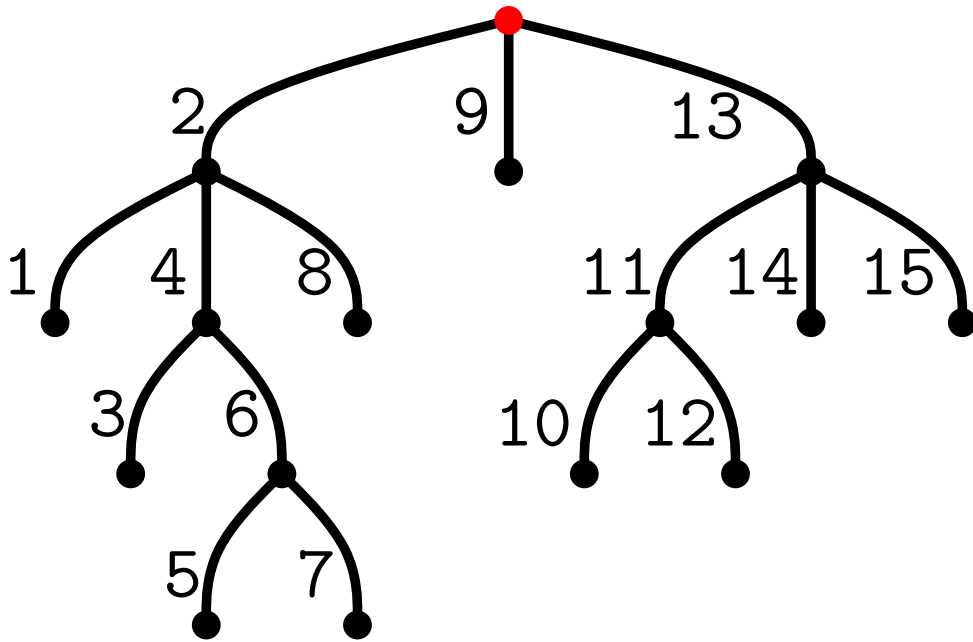
Schritt III: Zeichne Baum



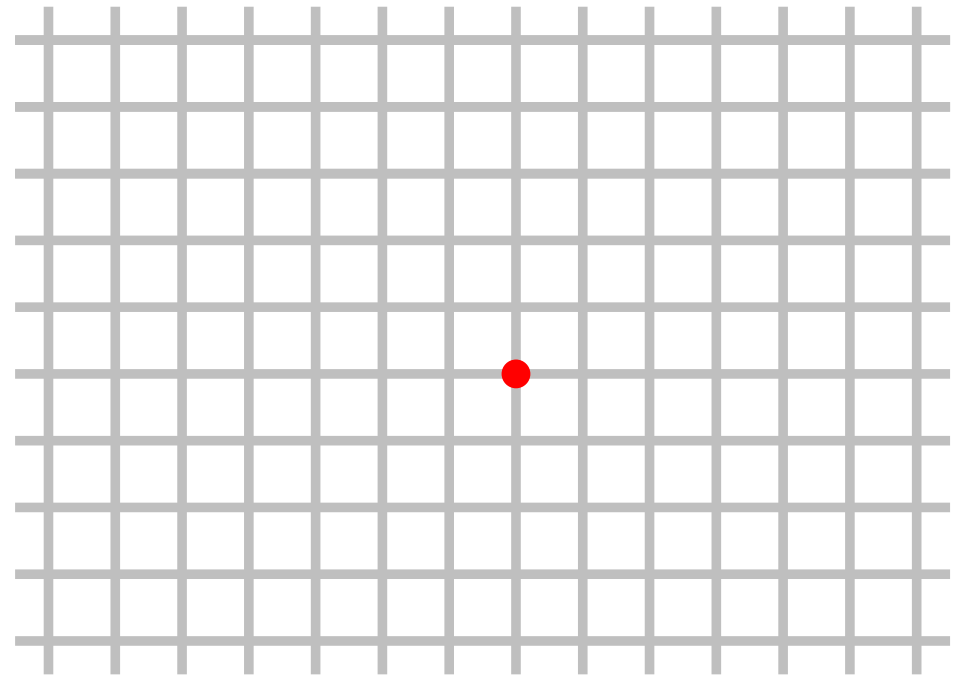
Schritt II: Wähle Vektoren



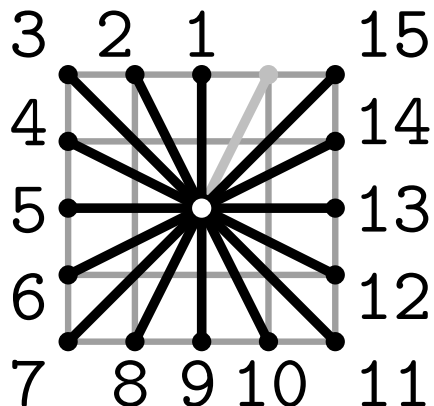
Schritt I: Beschriftete Kanten



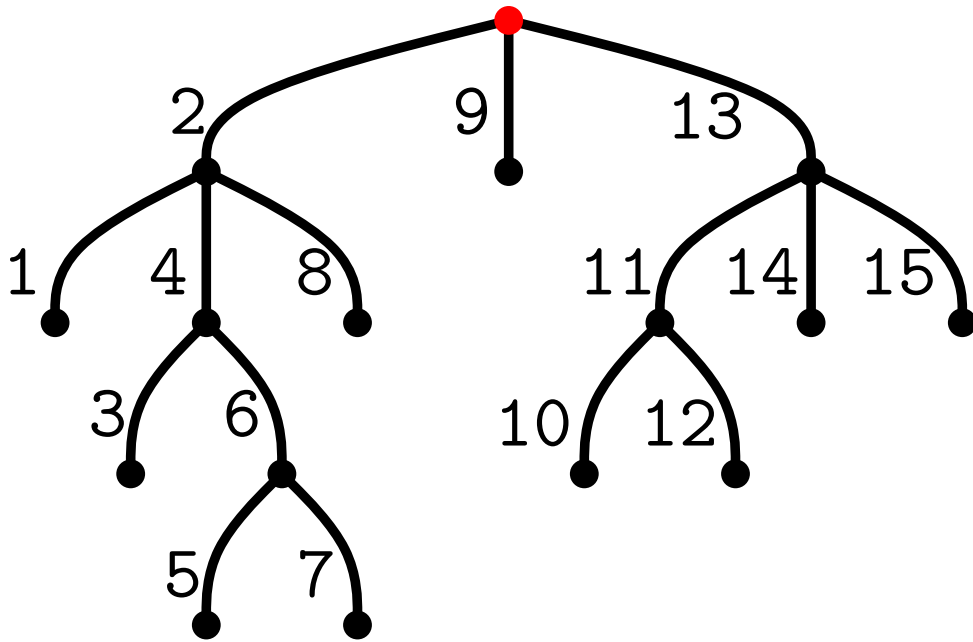
Schritt III: Zeichne Baum



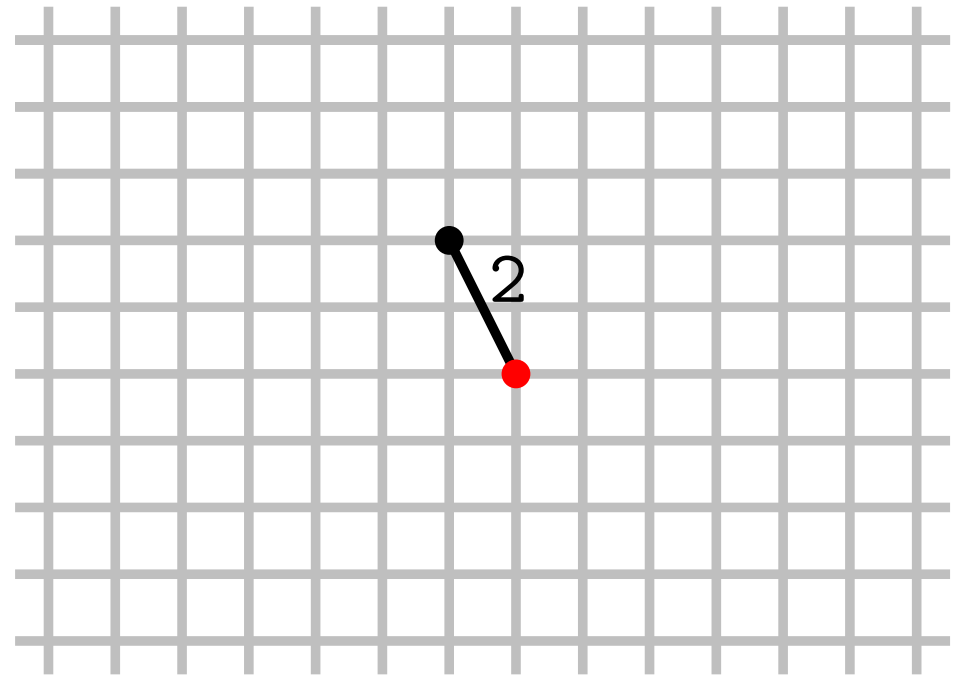
Schritt II: Wähle Vektoren



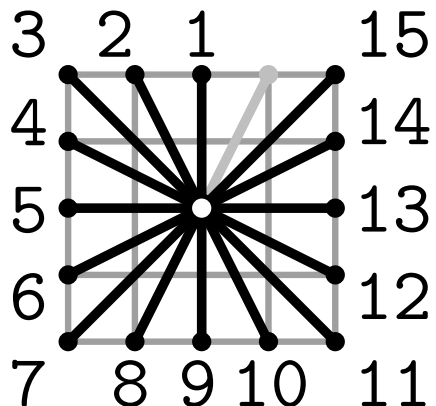
Schritt I: Beschriftete Kanten



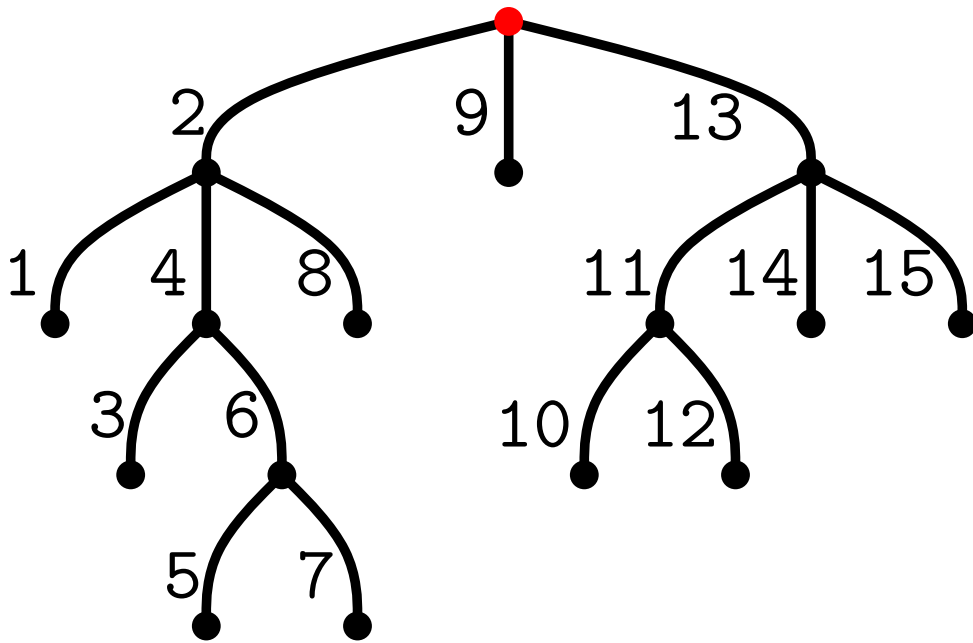
Schritt III: Zeichne Baum



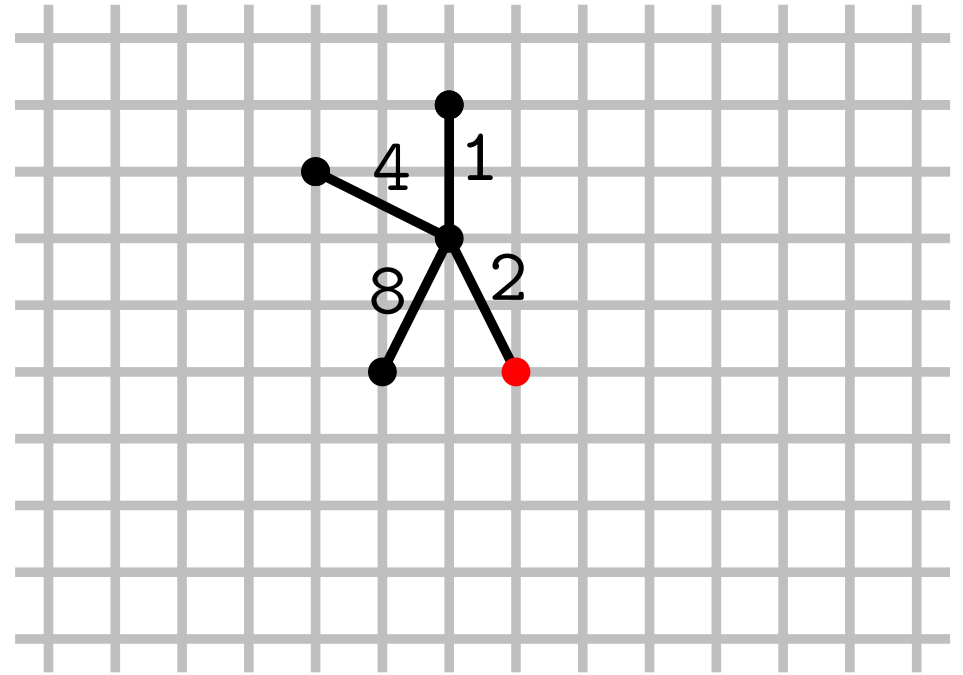
Schritt II: Wähle Vektoren



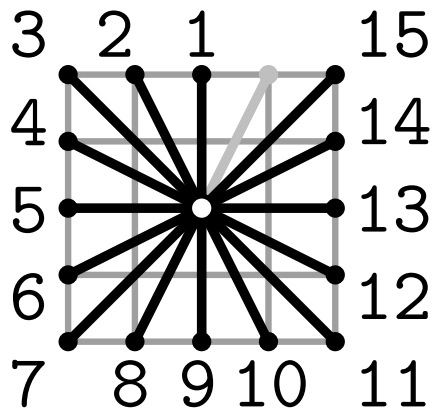
Schritt I: Beschriftete Kanten



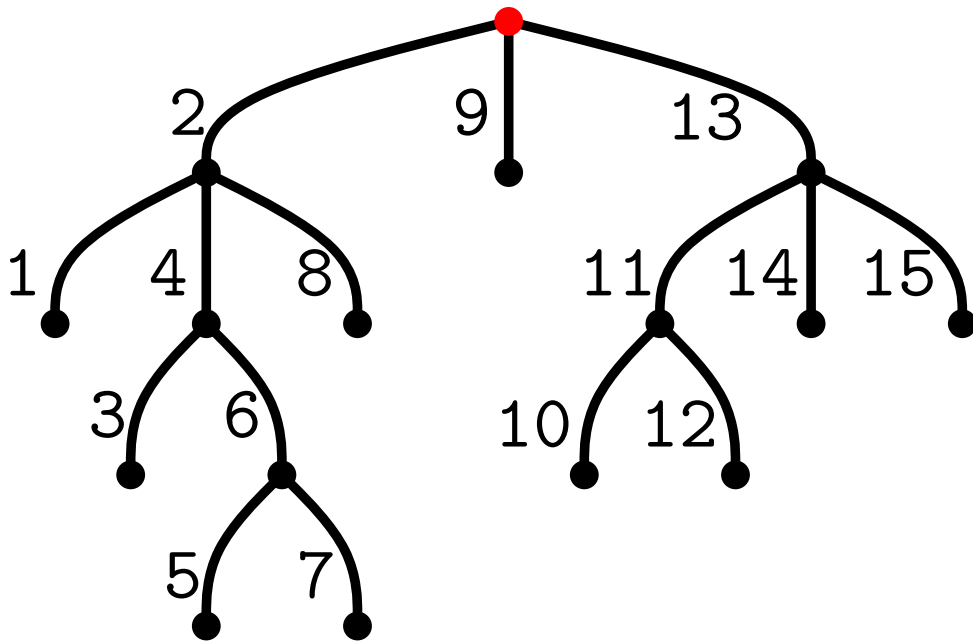
Schritt III: Zeichne Baum



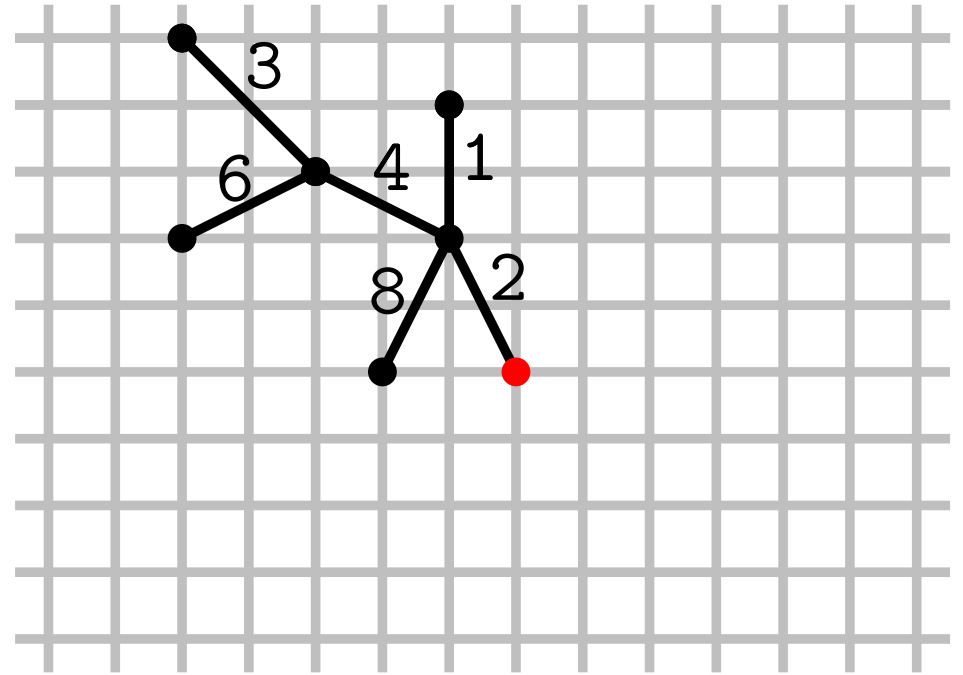
Schritt II: Wähle Vektoren



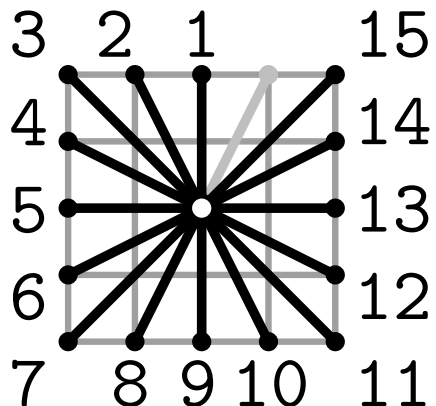
Schritt I: Beschriftete Kanten



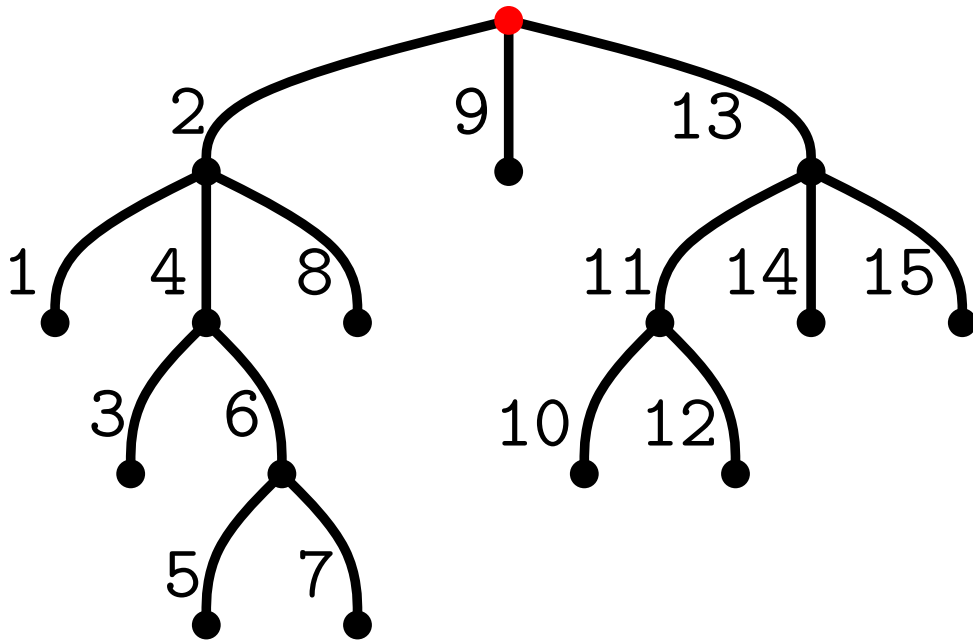
Schritt III: Zeichne Baum



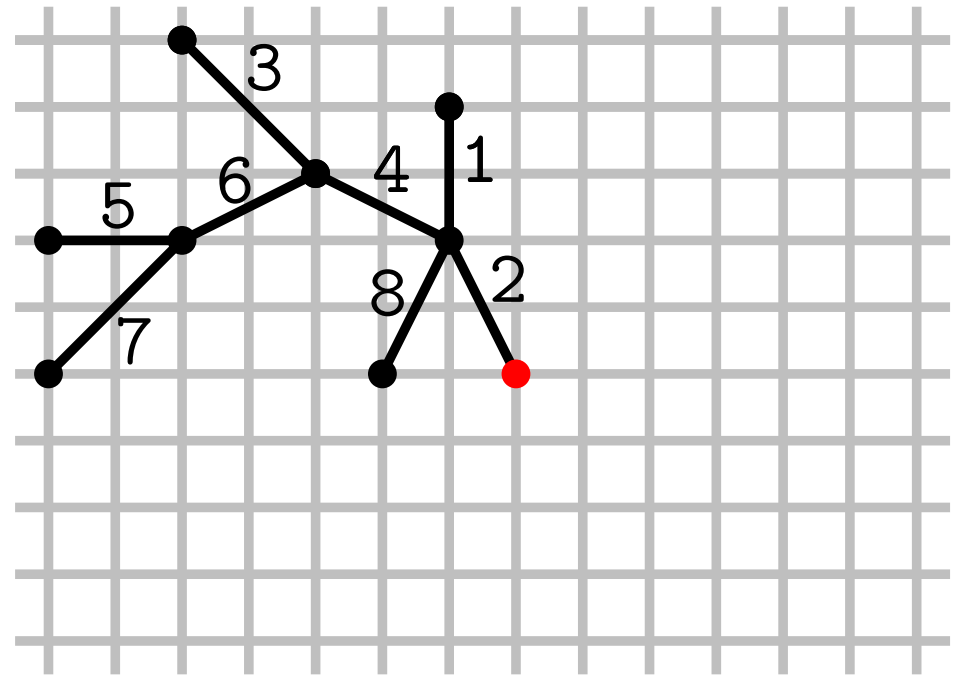
Schritt II: Wähle Vektoren



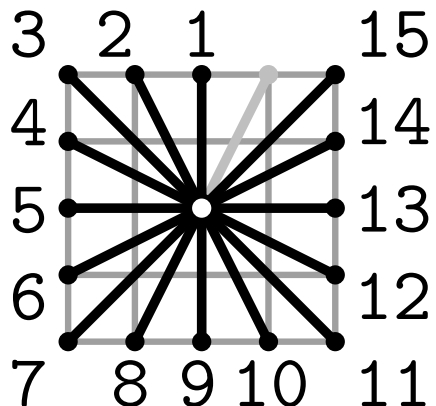
Schritt I: Beschriftete Kanten



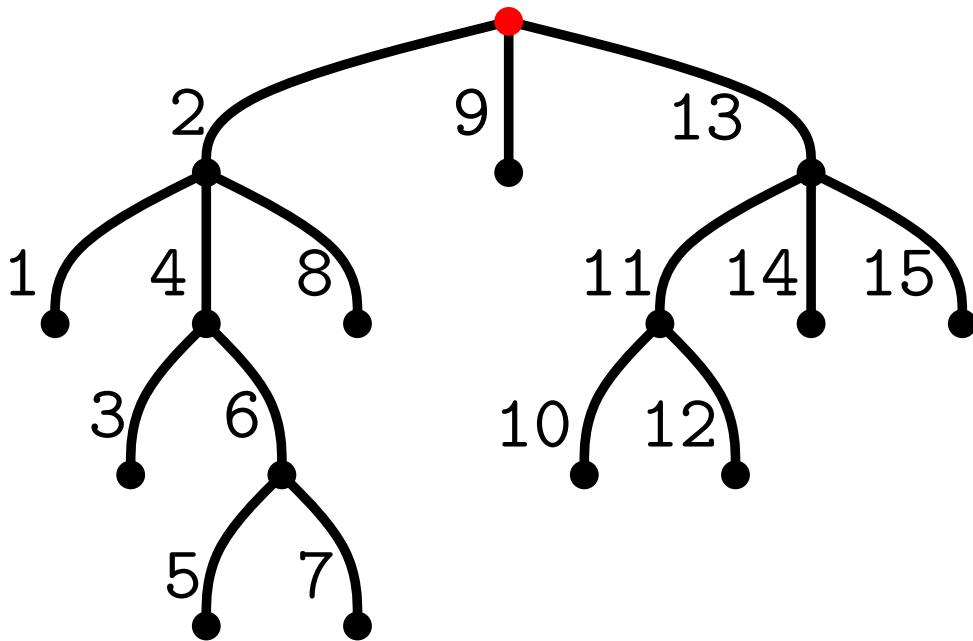
Schritt III: Zeichne Baum



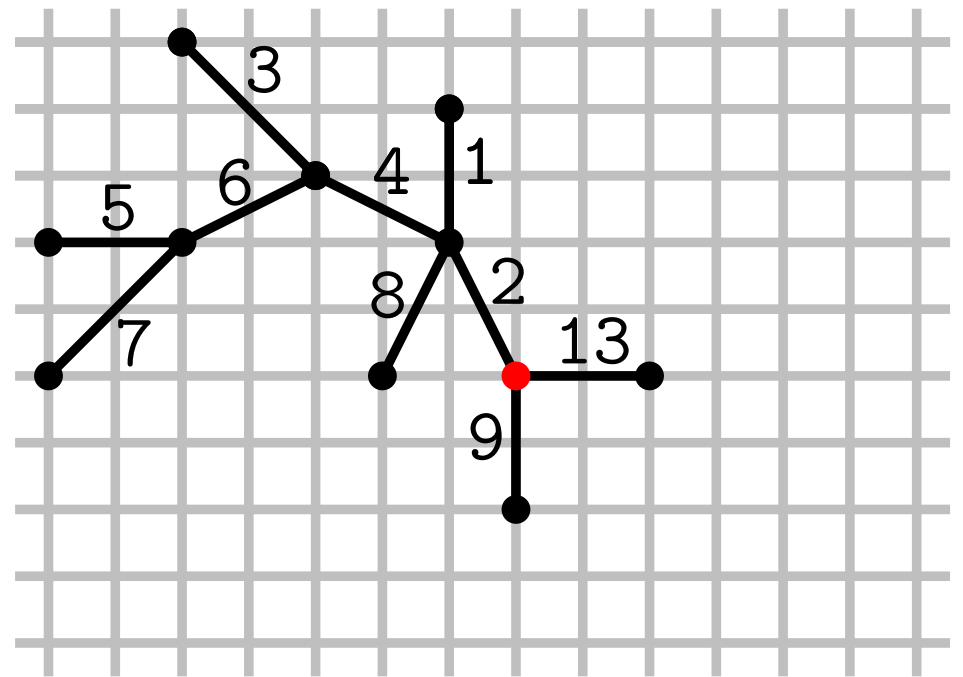
Schritt II: Wähle Vektoren



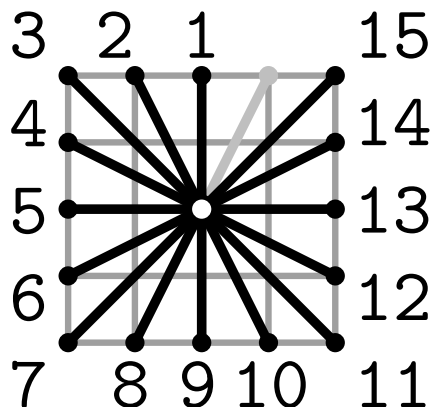
Schritt I: Beschriftete Kanten



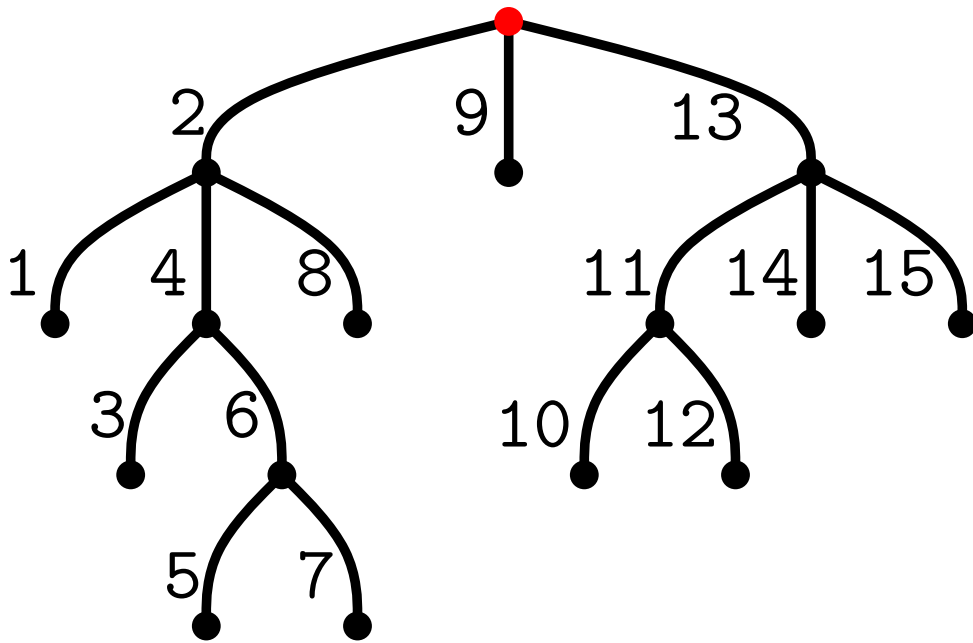
Schritt III: Zeichne Baum



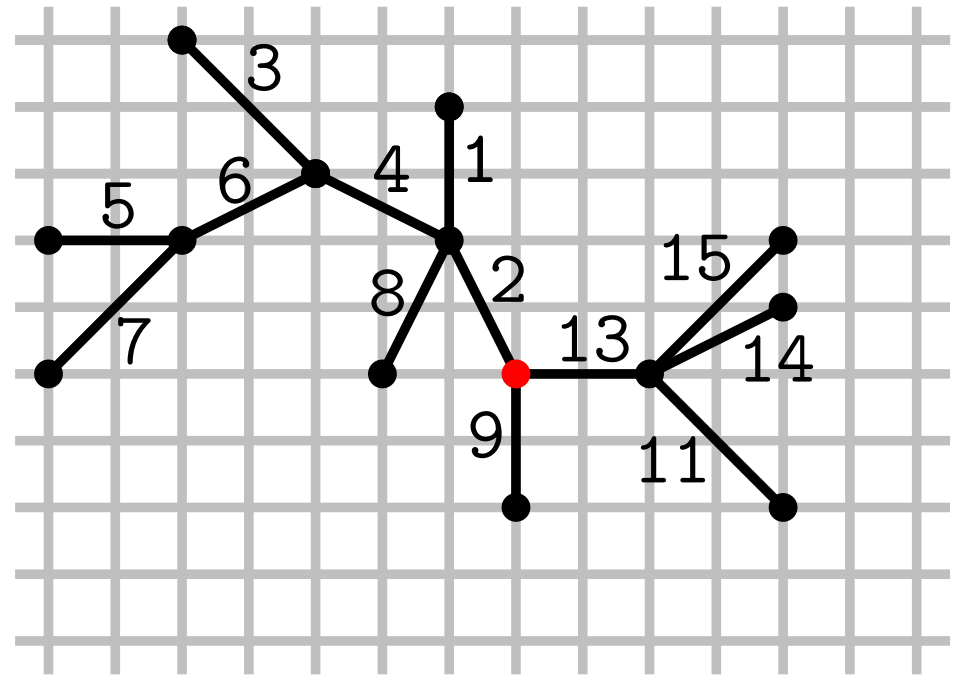
Schritt II: Wähle Vektoren



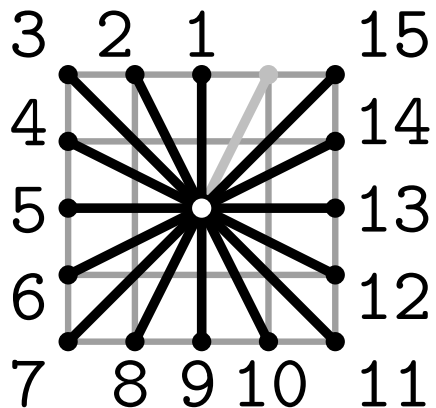
Schritt I: Beschriftete Kanten



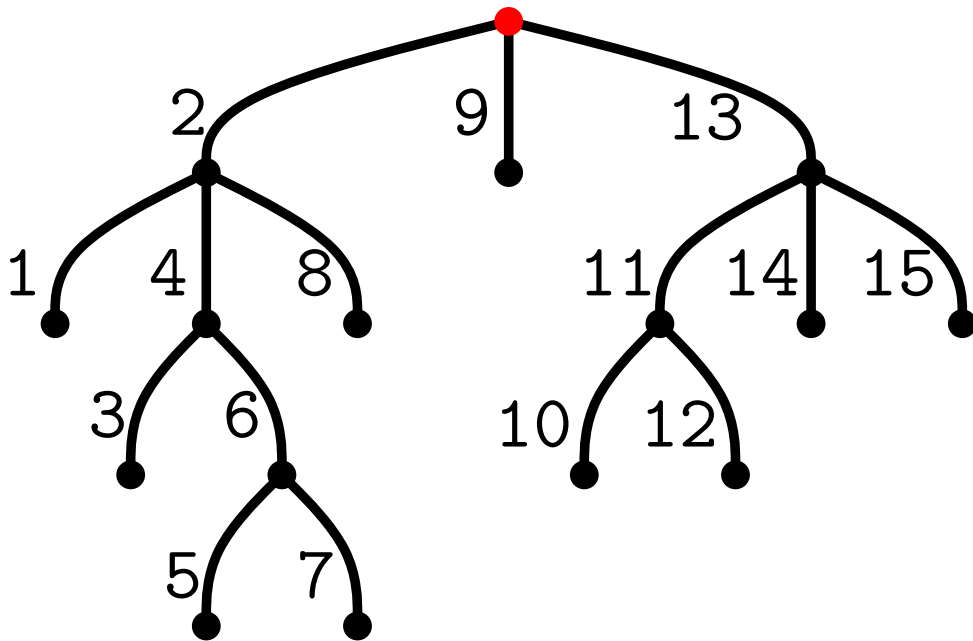
Schritt III: Zeichne Baum



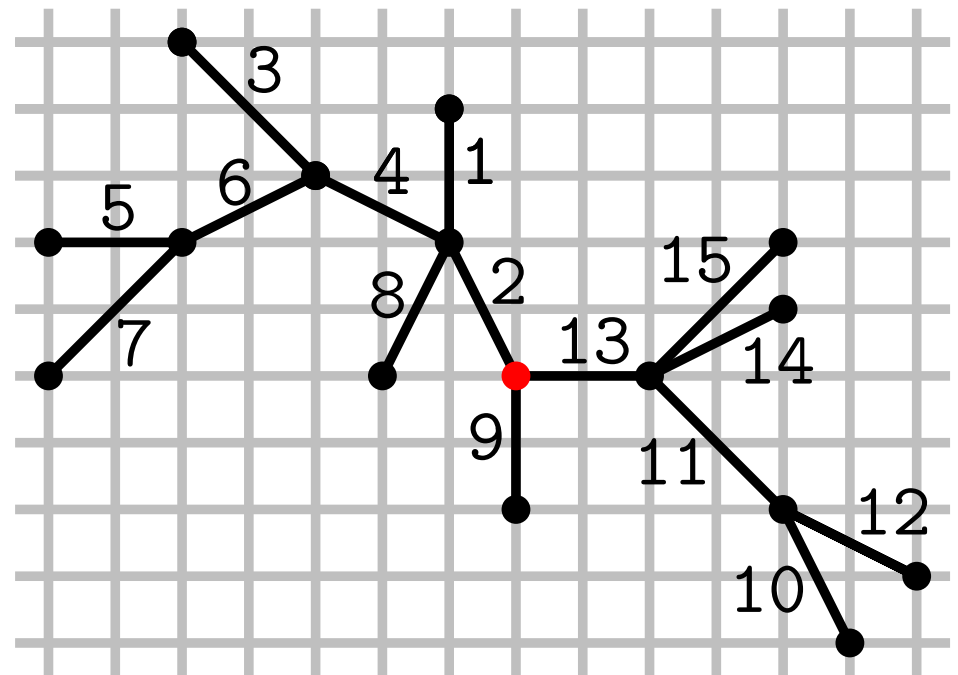
Schritt II: Wähle Vektoren



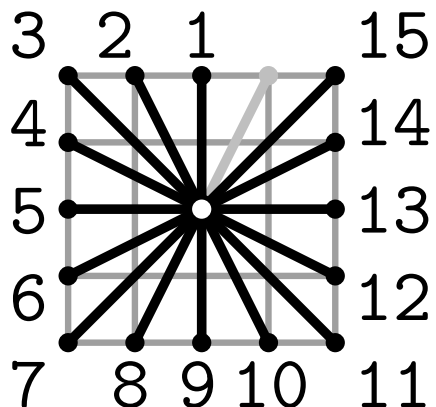
Schritt I: Beschriftete Kanten



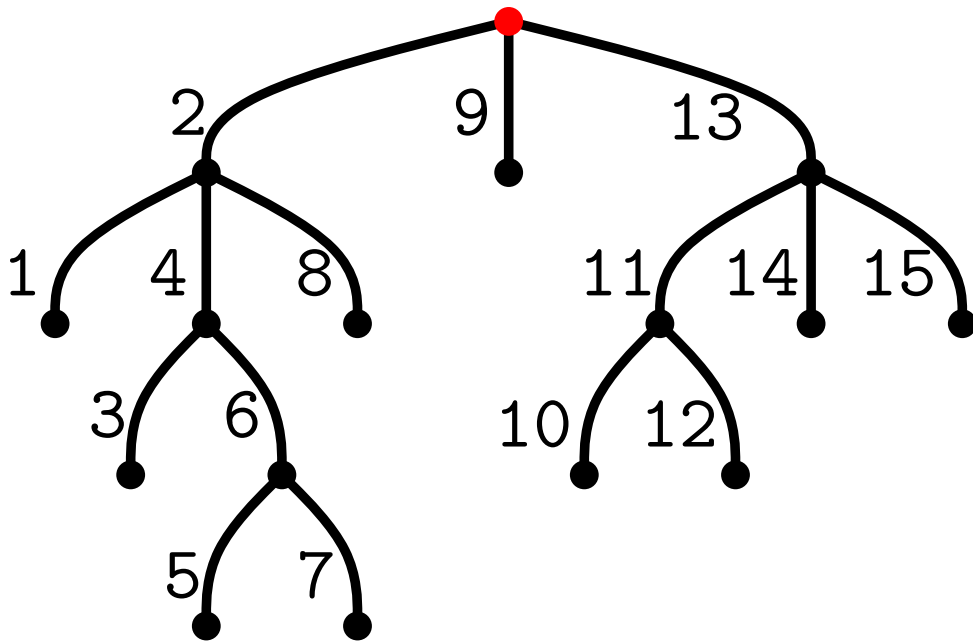
Schritt III: Zeichne Baum



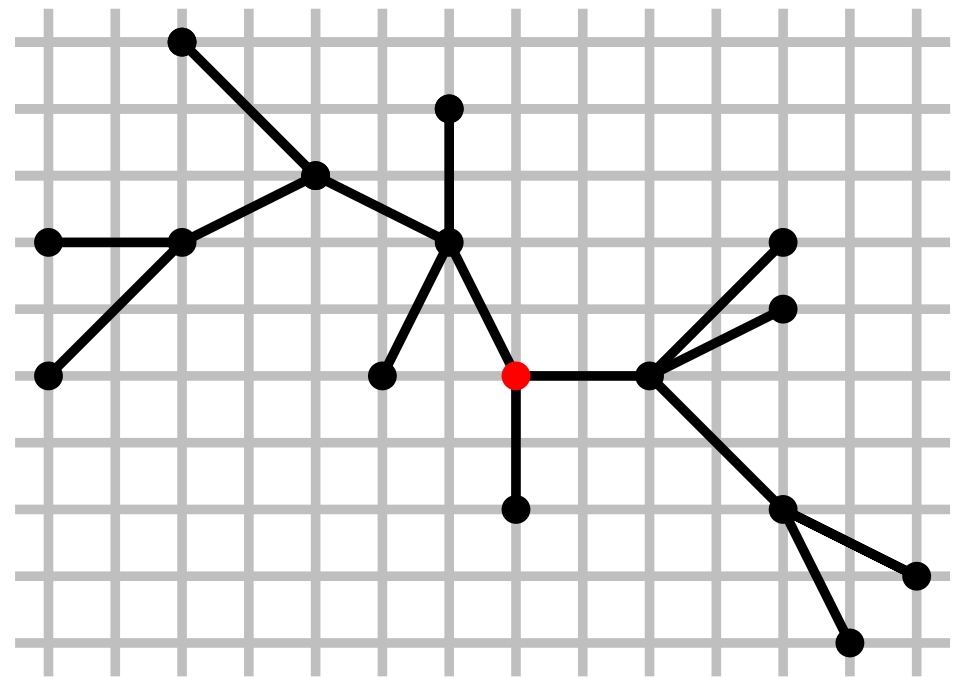
Schritt II: Wähle Vektoren



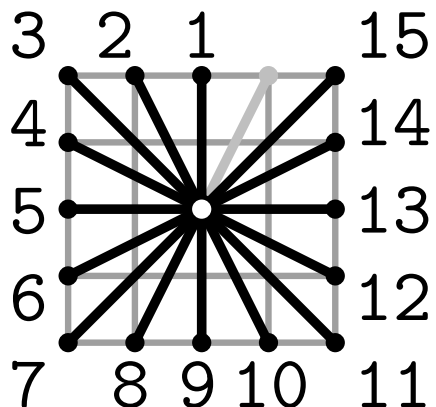
Schritt I: Beschriftete Kanten



Schritt III: Zeichne Baum



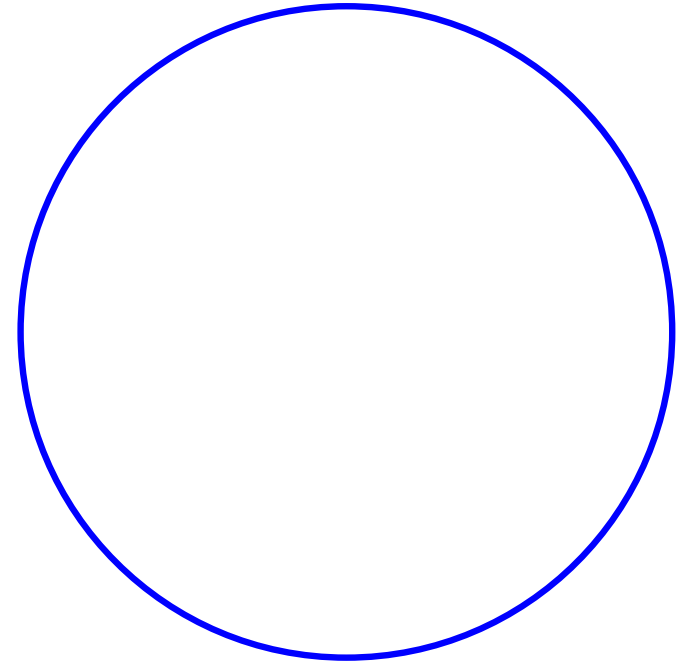
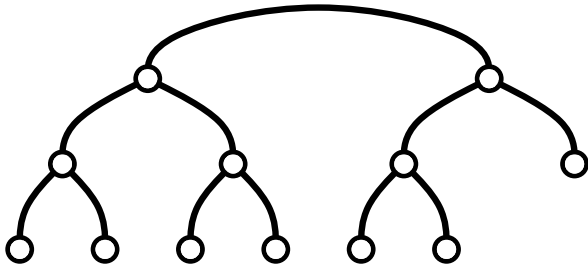
Schritt II: Wähle Vektoren



Baum \Rightarrow
monotone konvexe Zeichnung,
 $O(n^{1.5}) \times O(n^{1.5})$ Gitter

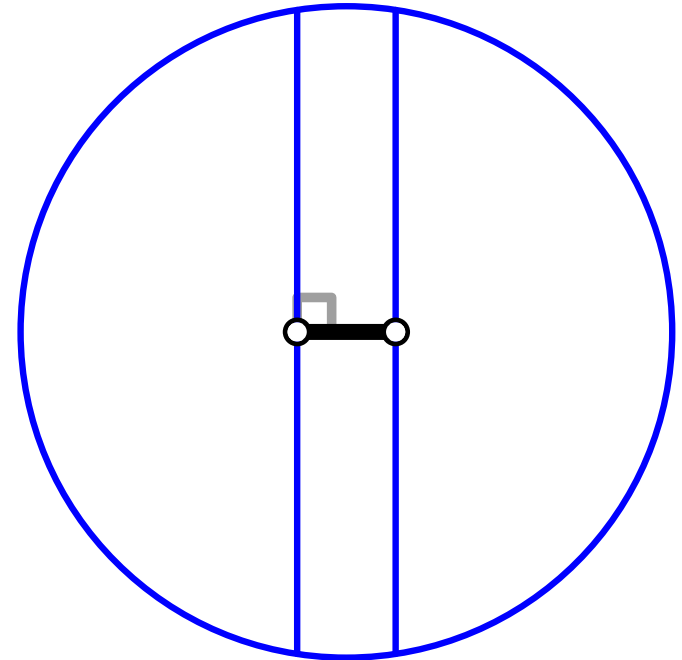
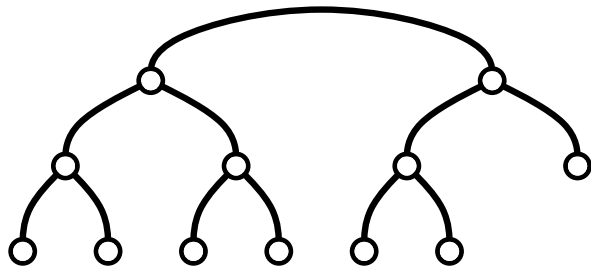
Streng Monotone Zeichnungen

Ordentlicher Binärbaum:
Kein Grad-2 Knoten



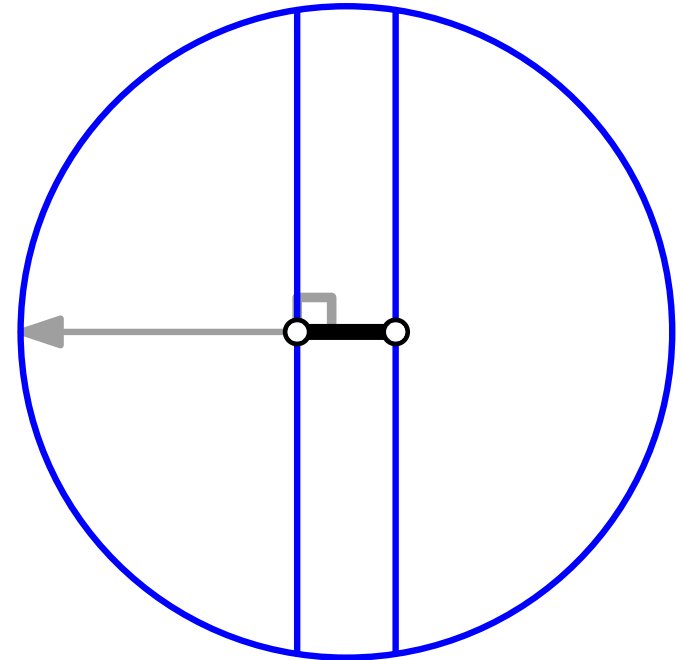
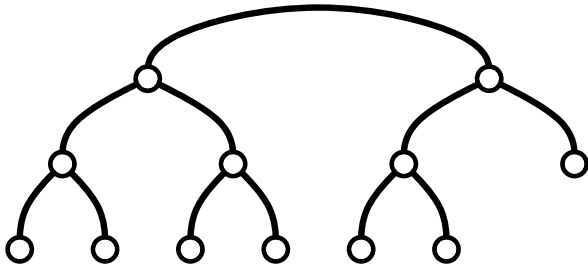
Streng Monotone Zeichnungen

Ordentlicher Binärbaum:
Kein Grad-2 Knoten



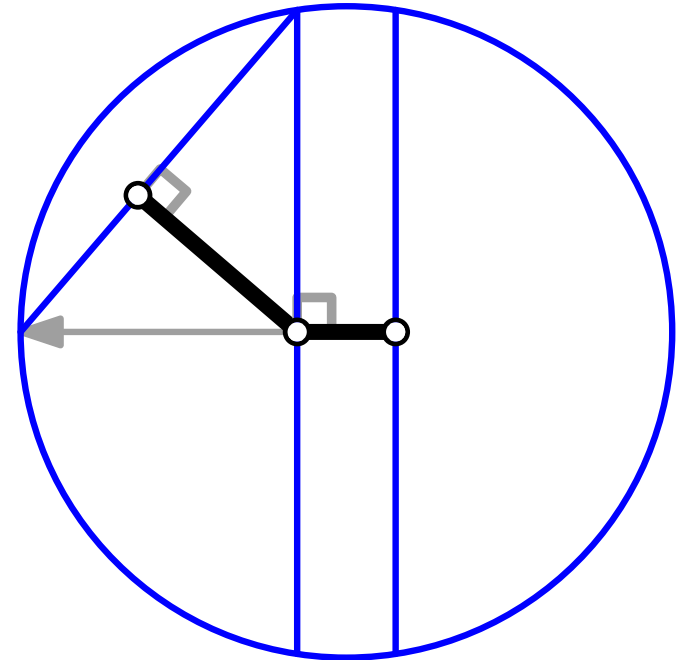
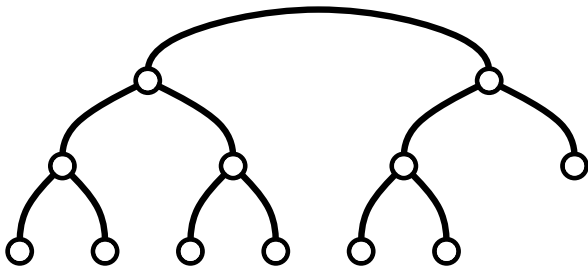
Streng Monotone Zeichnungen

Ordentlicher Binärbaum:
Kein Grad-2 Knoten



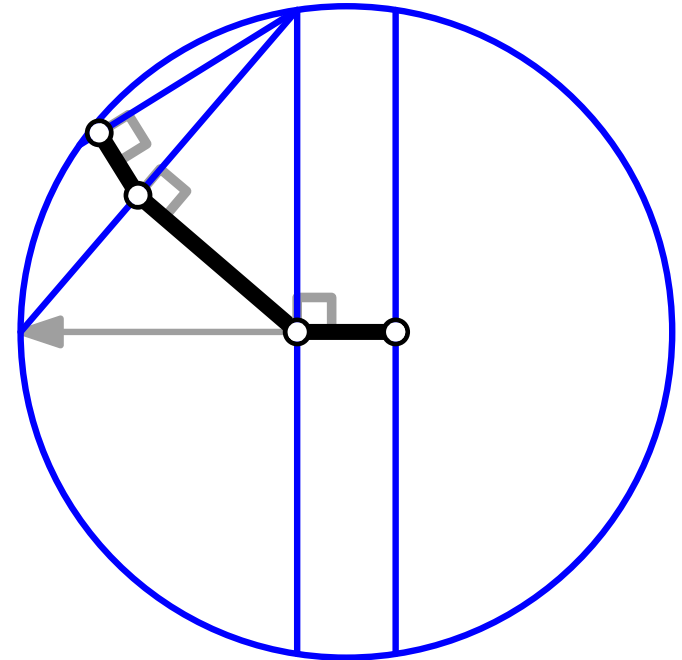
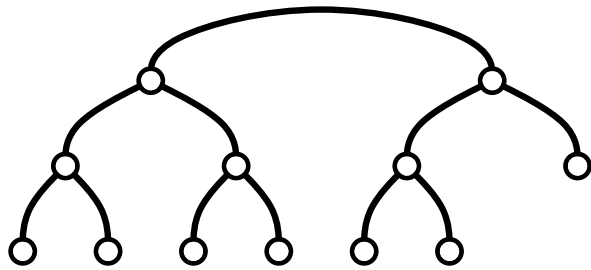
Streng Monotone Zeichnungen

Ordentlicher Binärbaum:
Kein Grad-2 Knoten



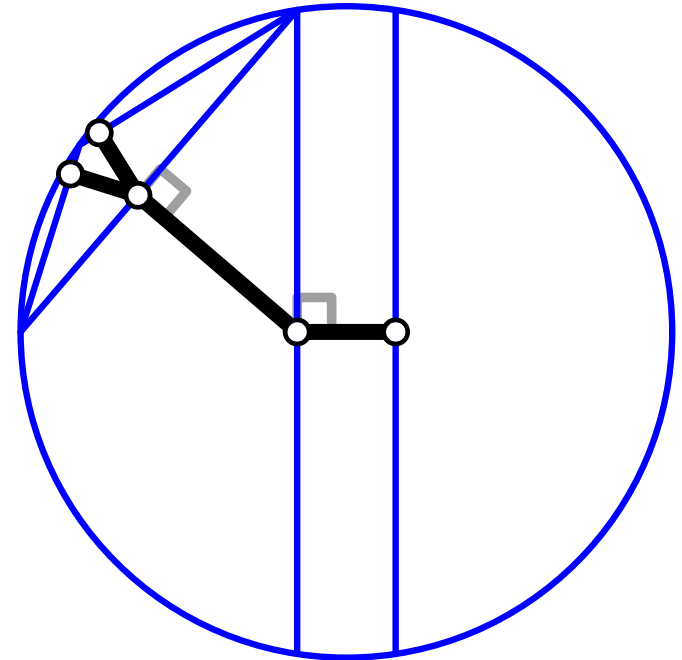
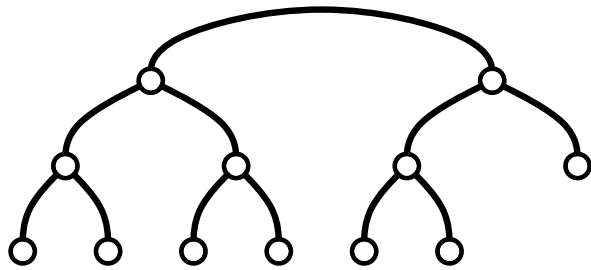
Streng Monotone Zeichnungen

Ordentlicher Binärbaum:
Kein Grad-2 Knoten



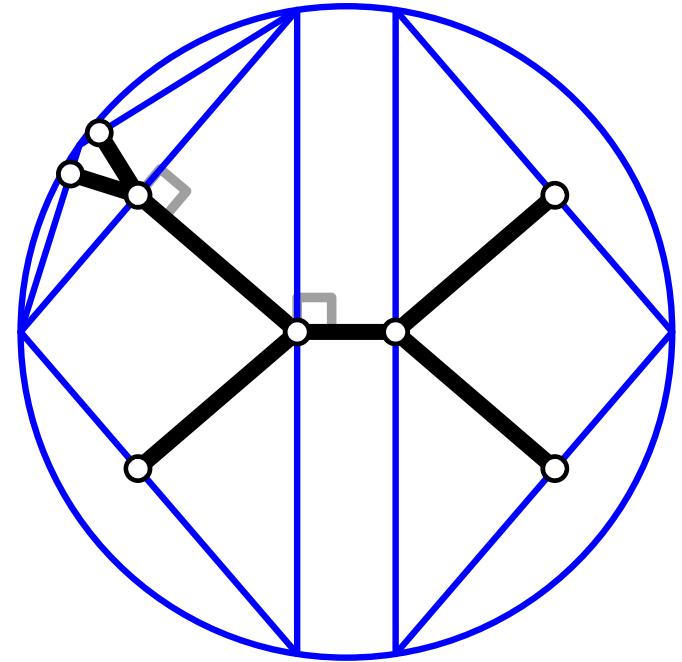
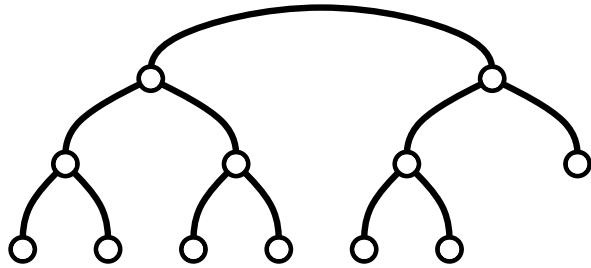
Streng Monotone Zeichnungen

Ordentlicher Binärbaum:
Kein Grad-2 Knoten



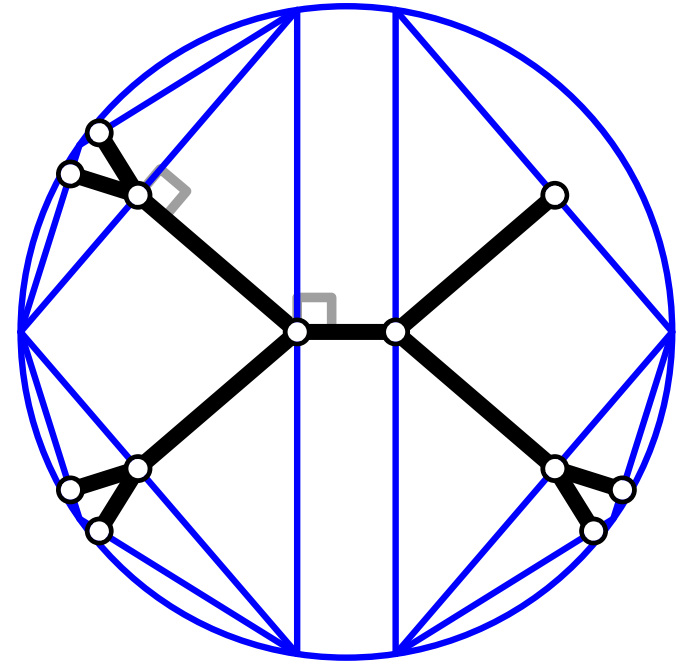
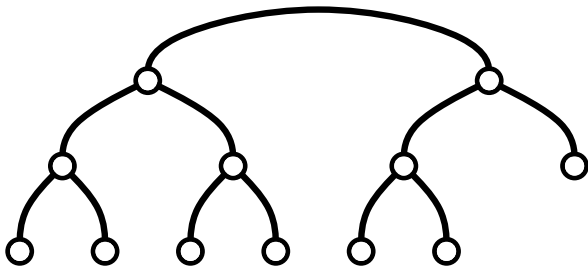
Streng Monotone Zeichnungen

Ordentlicher Binärbaum:
Kein Grad-2 Knoten



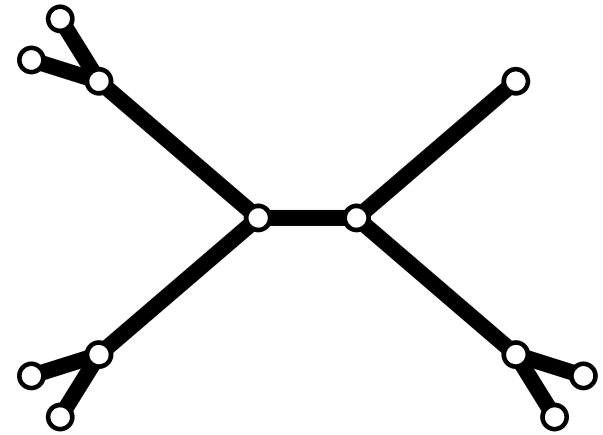
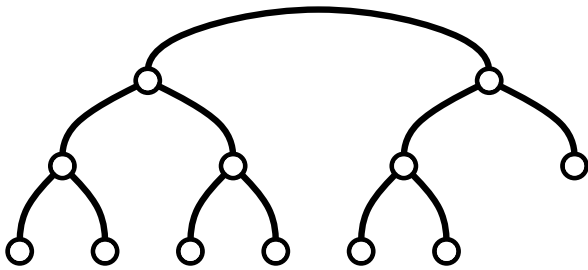
Streng Monotone Zeichnungen

Ordentlicher Binärbaum:
Kein Grad-2 Knoten



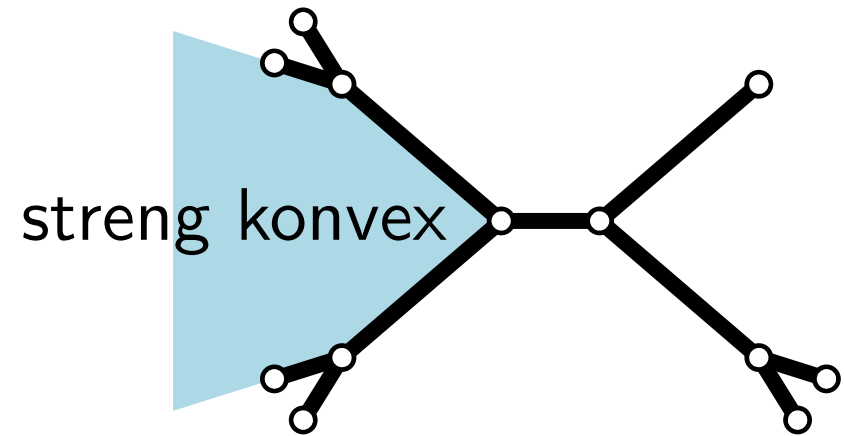
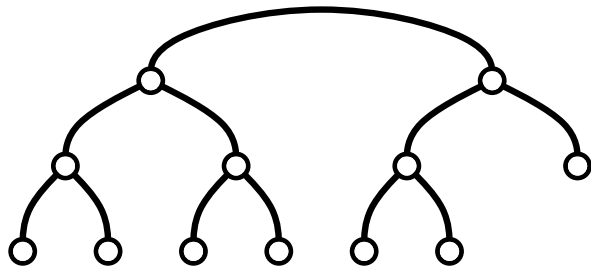
Streng Monotone Zeichnungen

Ordentlicher Binärbaum:
Kein Grad-2 Knoten



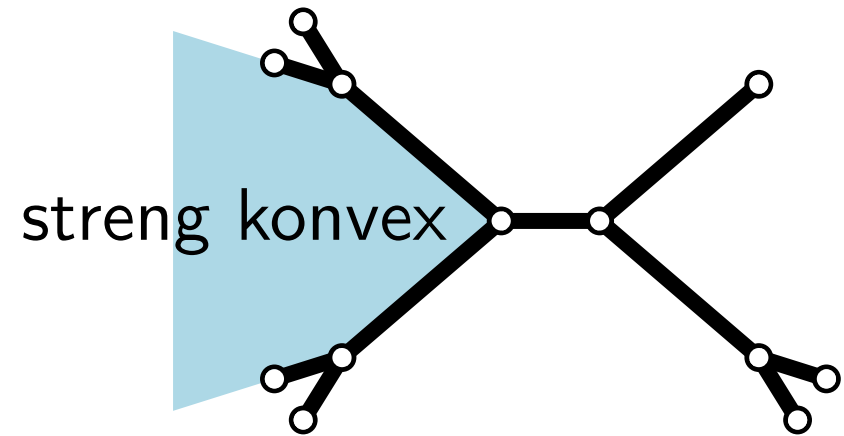
Streng Monotone Zeichnungen

Ordentlicher Binärbaum:
Kein Grad-2 Knoten



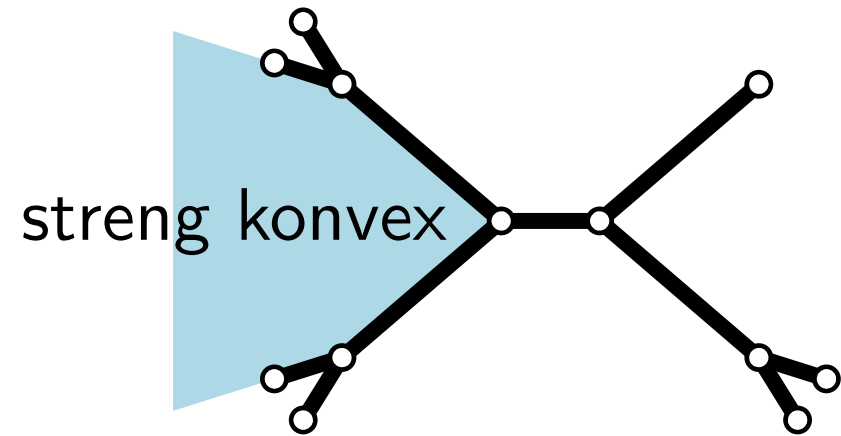
Streng Monotone Zeichnungen

Ordentlicher Binärbaum \Rightarrow
streng monotone,
streng konvexe Zeichnung,
exponentielle Fläche



Streng Monotone Zeichnungen

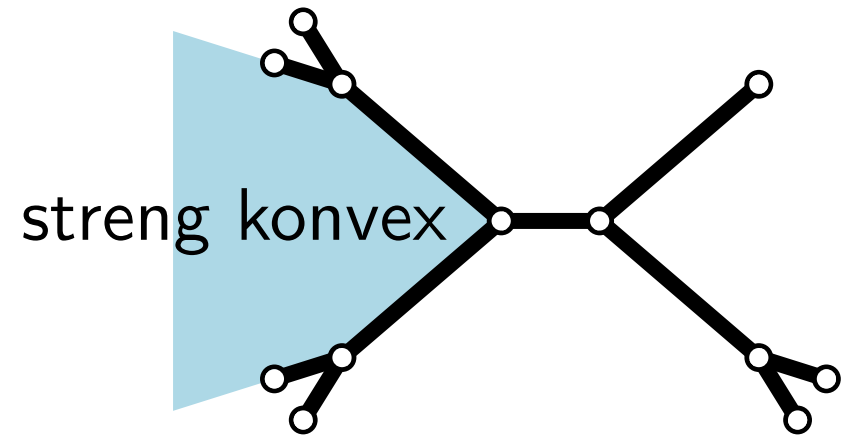
Ordentlicher Binärbaum \Rightarrow
streng monotone,
streng konvexe Zeichnung,
exponentielle Fläche



Baum \Rightarrow streng monotone Zeichnung, exponentielle Fläche

Streng Monotone Zeichnungen

Ordentlicher Binärbaum \Rightarrow
streng monotone,
streng konvexe Zeichnung,
exponentielle Fläche



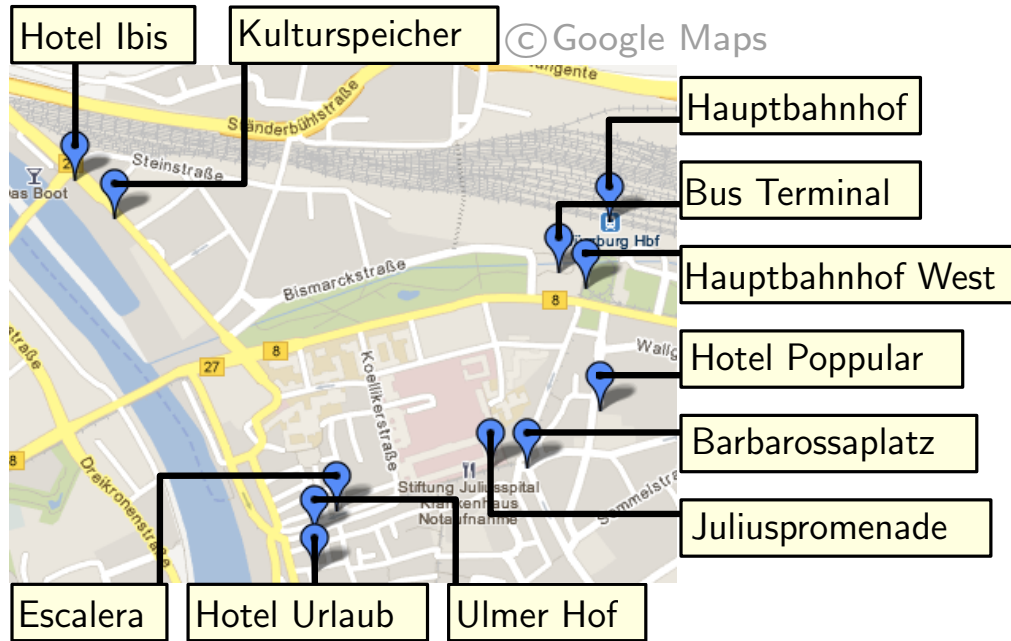
Baum \Rightarrow streng monotone Zeichnung, exponentielle Fläche

Nöllenburg et al.
Exponentielle Fläche wird benötigt.

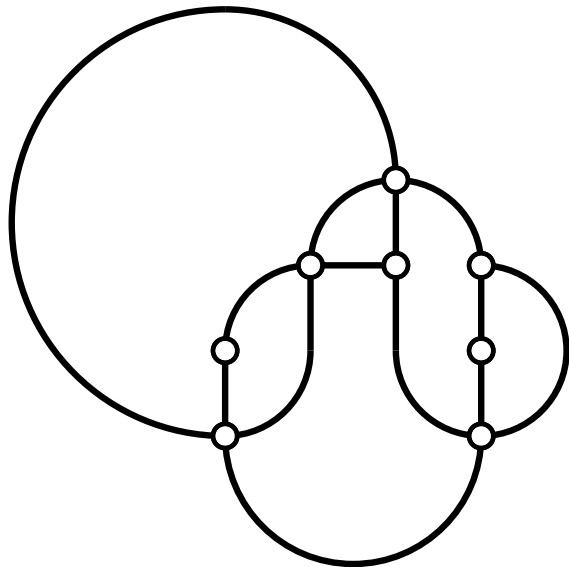
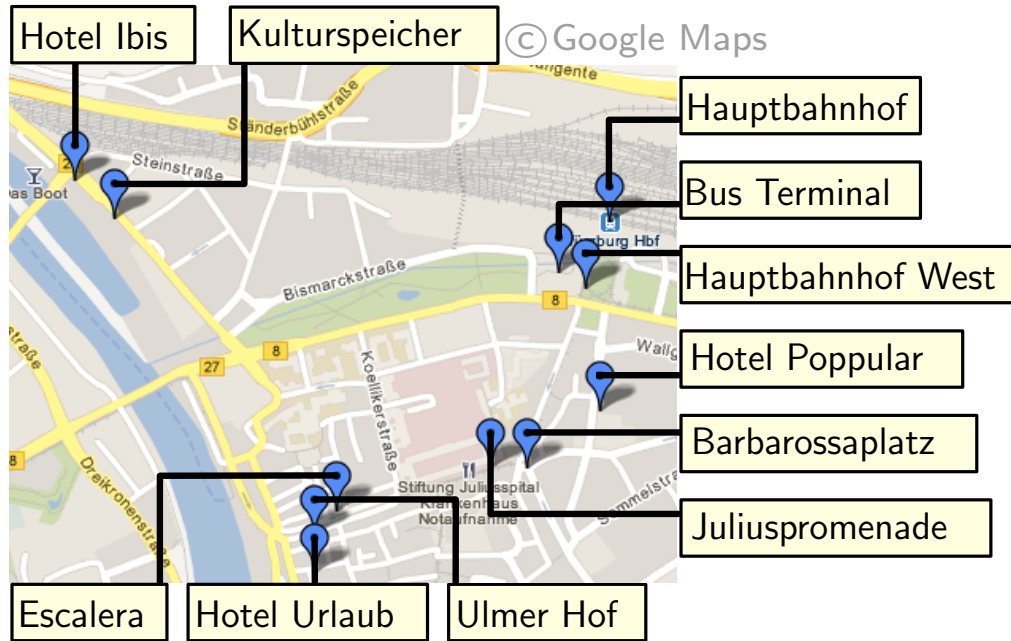
[arXiv'14]

Zusammenfassung

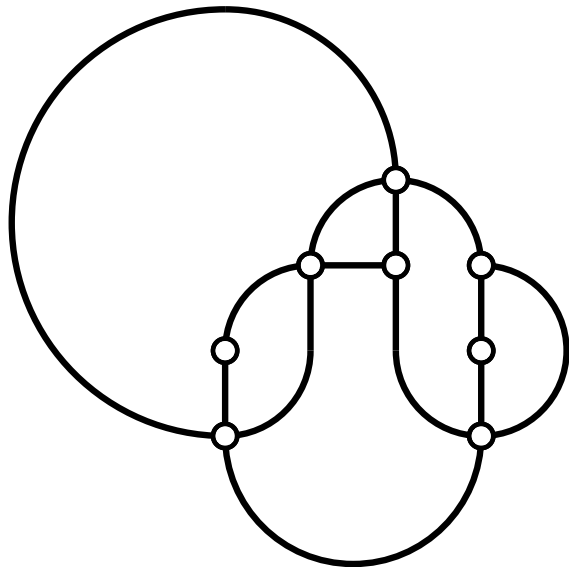
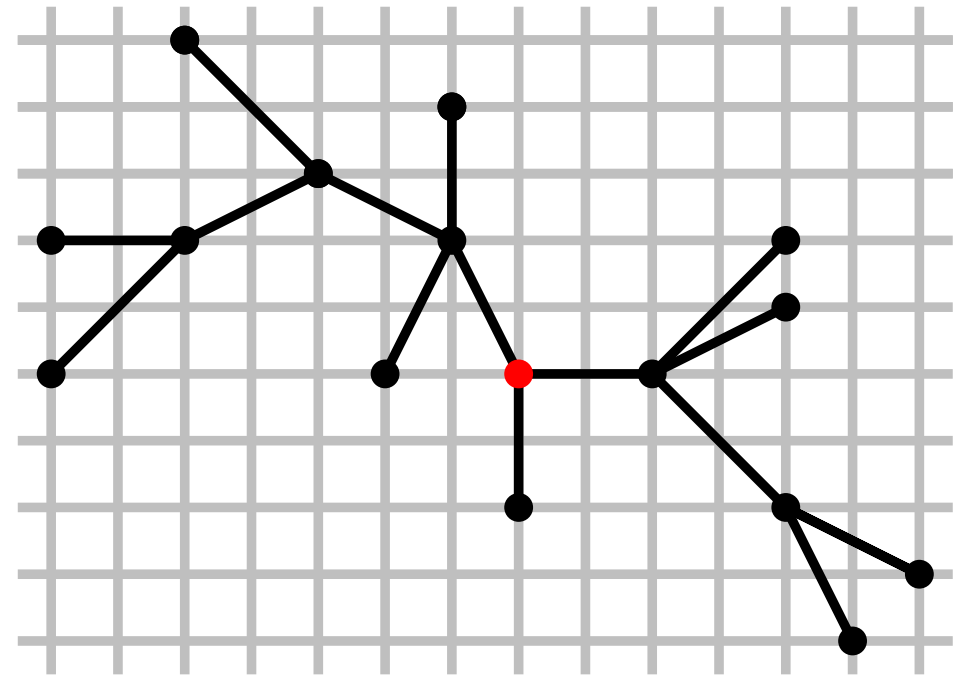
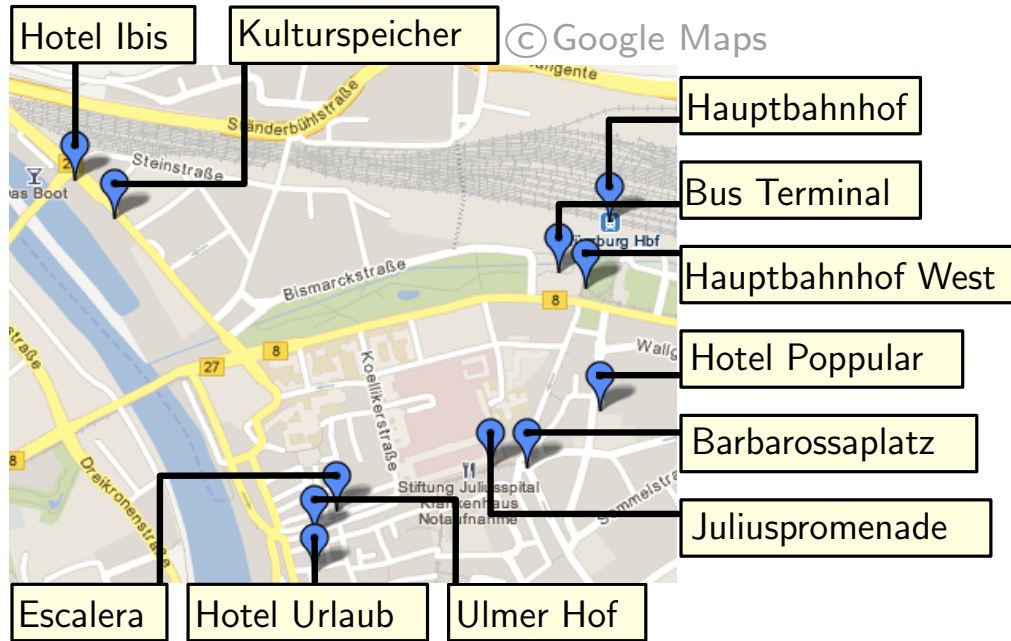
Zusammenfassung



Zusammenfassung



Zusammenfassung



Zusammenfassung

