

Bachelorarbeit

Regelmäßige Außenhindernisrepräsentation von kleinen planaren Graphen

León Lang

Abgabedatum: 31. Mai 2022
Betreuer: Prof. Dr. Alexander Wolff
Felix Klesen, M. Sc.



Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität

Zusammenfassung

Die Hindernisrepräsentation ist eine alternative Darstellung von Graphen. Dabei geht es zusammengefasst darum, einen Graphen mit Hilfe von Hindernissen darzustellen. Ein Teilbereich beschäftigt sich damit, ob es möglich ist, einen Graphen durch nur *ein* Hindernis darzustellen. Hierfür haben Firman et al. [FKK⁺22] drei verschiedene Anordnungen der Knoten eines beliebigen Graphen gewählt; die konvexe Darstellung, die Anordnung der Knoten auf einem Kreis und die auf einem regelmäßigen Polygon. Firman et al. [FKK⁺22] haben festgestellt, dass schon der Radgraph W_6 nicht auf dem regelmäßigen Sechseck dargestellt werden kann. Nun stellt sich die Frage, wie das für außenplanare Graphen und planare Graphen mit sieben und acht Knoten aussieht. Diese Frage betrachten wir genauer und überprüfen für jeden Graphen der beiden Graphklassen mit Hilfe eines Algorithmus, ob er die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Abstract

The obstacle representation is an alternative representation of graphs. In summary, this involves representing the graphs with the help of different obstacles. A subsection deals with whether it is possible to represent a graph with only *one* obstacle. For this, Firman et al. [FKK⁺22] chose three different arrangements of the nodes of an arbitrary graph; the convex representation, the arrangement of the nodes on a circle, and the arrangement on a regular polygon. Firman et al. [FKK⁺22] have determined that already the wheelgraph W_6 cannot be represented on the regular hexagon. Now the question arises how this looks for outerplanar graphs and planar graphs with seven and eight vertices. We consider this question in more detail and use an algorithm to check for each graph of the two graph classes whether it has the desired property.

Inhaltsverzeichnis

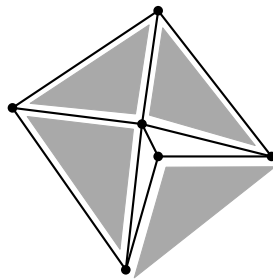
1. Einleitung	4
1.1. Bisherige Arbeiten	4
1.2. Mein Beitrag	6
2. Grundlagen	7
2.1. Außenplanare Graphen	7
2.2. Stapelgeneration von Graphen	7
3. Generierung und Überprüfung von kleinen (außen-)planaren Graphen	8
3.1. Generierung aller außenplanaren Graphen mit 7 Knoten	8
3.2. Überprüfung aller außenplanaren Graphen mit 7 Knoten	9
3.3. Generierung und Überprüfung aller planaren Graphen mit 7 Knoten . . .	11
3.4. Generierung und Überprüfung aller außenplanaren Graphen mit 8 Knoten	11
3.5. Generierung und Überprüfung aller planaren Graphen mit 8 Knoten . . .	13
3.6. Laufzeit	13
4. Fazit	14
A. Appendix	15
A.1. Graphen, die den K_4 enthalten	15
A.2. Graphen, die auf den W_6 reduziert werden können	15
Literaturverzeichnis	19

1. Einleitung

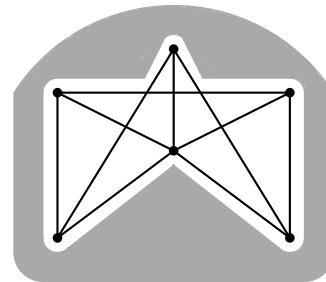
Für eine Punktmenge P und eine Menge H von einfach zusammenhängenden und paarweise disjunkten Hindernissen sei $G_H(P) = (P, E_H)$ der *Sichtbarkeitsgraph* von P bezüglich H , wobei ein Paar $\{p, q\}$ von Punkten in P genau dann durch eine Kante verbunden ist, wenn die Strecke \overline{pq} kein Hindernis in H schneidet (siehe Abbildung 1.1a). In dieser Arbeit sind die Hindernisse einfache Polygone.

Eine *Hindernisrepräsentation* für einen Graphen G ist ein Paar (P, H) , das aus einer Menge P von Punkten und einer Menge H von Hindernissen besteht, so dass der Sichtbarkeitsgraph $G_H(P)$ von P bezüglich H isomorph zu G ist.

Eine spezielle Form der Hindernisrepräsentation ist die *Außenhindernisrepräsentation*, bei der das einzige Hindernis aus H der äußeren Facette von $G_H(P)$ entspricht (siehe Abbildung 1.1b).



(a) Hindernisrepräsentation für einen Graphen G



(b) Außenhindernisrepräsentation von G

Abb. 1.1.: Hindernisrepräsentationen

1.1. Bisherige Arbeiten

Alpert et al. [AKL10] haben den Begriff der *Hinderniszahl* (englisch: *obstacle number*) eingeführt, der die kleinste Anzahl an benötigten Hindernissen angibt, um einen Graphen darzustellen. Die Hinderniszahl eines Graphen G wird $\text{obs}(G)$ geschrieben. Später schlugen Berman et al. [BCF⁺17] notwendige Bedingungen vor, die erfüllt sein müssen, damit ein Graph Hinderniszahl 1 hat.

Mukkamal et al. [MPP12] zeigten im Gegensatz dazu, dass auch Graphen mit n Knoten existieren, deren Hinderniszahl mindestens $\Omega(n/\log n)$ beträgt. Diese untere Schranke haben sich anschließend Dujmović und Morin [DM15] auf $\Omega(n/(\log \log n)^2)$ erhöht. Des

Weiteren zeigten Gimbel et al. [GPV17], dass die *planare Hinderniszahl* eines planaren Graphen mit n Knoten auf $n - 3$ beschränkt ist. Die planare Hinderniszahl ist eine spezielle Variante der Hinderniszahl, die die kleinste Anzahl an benötigten Hindernissen angibt, um einen Graphen darzustellen, ohne dass sich zwei Kanten kreuzen. Eine allgemeine obere Schranke der Hinderniszahl wurde von Balko et al. [BCV18] vorgestellt. Diese zeigt, dass für jeden Graphen mit n Knoten die Hinderniszahl durch $n \lceil \log n \rceil - n + 1$ beschränkt ist.

Ein weiterer Vergleichspunkt von Graphen mit Hindernisrepräsentation ist die Anordnung der Hindernisse. Chaplick et al. [CLPW16] haben zwischen Außenhindernisrepräsentation und Innenhindernisrepräsentation unterschieden, da die zwei Klassen der beiden möglichen Darstellungen nicht miteinander vergleichbar sind. Sie zeigte, dass ein Graph mit elf Knoten existiert, der eine Innenhindernisrepräsentation besitzt, aber keine Außenhindernisrepräsentation. Des Weiteren zeigten Chaplick et al. [CLPW16], dass es für jeden Graphen mit höchstens sieben Knoten eine Außenhindernisrepräsentation gibt.

Firman et al. [FKK⁺22] beschäftigten sich ausschließlich mit der Darstellung von Graphen durch Außenhindernisse, das heißt, mit der Frage, ob für einen gegebenen Graphen ein einzelnes Außenhindernis existiert, sodass der Graph mit diesem dargestellt werden kann. Dafür wurden drei verschiedene Fälle betrachtet.

Der erste Fall ist die konvexe Außenhindernisrepräsentation, bei der die Knoten lediglich konvex angeordnet werden müssen (siehe Abbildung 1.2a). Diese Anordnung ist die allgemeinste der drei.

Die zweite Möglichkeit ist die kreisförmige Außenhindernisrepräsentation, bei der alle Knoten auf einem Kreis angeordnet werden müssen, unabhängig vom Radius und der Entfernung zwischen den einzelnen Knoten (siehe Abbildung 1.2b).

Der dritte betrachtete Fall ist die regelmäßige Außenhindernisrepräsentation, bei dem die Knoten auf einem regelmäßigen n -Gon angeordnet werden (siehe Abbildung 1.2c). Dabei haben alle Knoten die gleiche Entfernung zum nächsten Knoten. Für einen Graphen mit 7 Knoten werden die Knoten auf einem Siebeneck angeordnet, wobei die Reihenfolge der Knoten dabei keine Rolle spielt.



Abb. 1.2.: Die drei verschiedenen Anordnungen der Knoten

Firman et al. [FKK⁺22] stellten dabei zum einem notwendige Bedingung vor, damit Graphen keine konvexe Außenhindernisrepräsentation besitzen. Zum anderen zeigten sie

auch, dass all kubischen Graphen (mit maximal 16 Knoten) außer dem Petersongraph eine konvexe Außenhindernisrepräsentation besitzen. Des Weiteren konnten sie beweisen, dass der Radgraph W_6 keine konvexe Außenhindernisrepräsentation besitzt, sondern lediglich eine Außenhindernisrepräsentation. Außerdem zeigten Firman et al. [FKK⁺22], dass jeder 2-Baum eine *reduzierbare* Außenhindernisrepräsentation besitzt, das heißt, dass alle Kanten inzident zur äußeren Facette sind. Besitzt ein Graph G eine solche reduzierbare Außenhindernisrepräsentation, dann besitzt auch jeder Teilgraph G' von G eine reduzierbare Außenhindernisrepräsentation.

Alpert et al. [AKL10] zeigten bereits, dass jeder außenplanare Graph (siehe 2.1) eine Außenhindernisrepräsentation besitzt. Diese Eigenschaft wollen wir für den Fall einer regelmäßigen Außenhindernisrepräsentation untersuchen.

1.2. Mein Beitrag

Im Folgenden beschäftige ich mich zuerst mit der Frage, ob jeder außenplanare Graphen mit sieben Knoten eine regelmäßige Außenhindernisrepräsentation besitzt. Da dies der Fall ist, betrachte ich anschließend alle *planaren* Graphen und untersuche die Graphen mit sieben Knoten, für die diese Darstellung nicht möglich ist, genauer. Die regelmäßige Außenhindernisrepräsentation von außenplanare Graphen mit acht Knoten wurde bereits von Firman et al. [FKK⁺22] untersucht. Ich zeige mit Hilfe eines Algorithmus, dass der Graph in Abbildung 3.5 der einzige Graph mit acht Knoten ist, der keine regelmäßige Außenhindernisrepräsentation hat. Anschließend betrachte ich alle planaren Graphen mit acht Knoten und untersuche die Graphen genauer, die keine regelmäßige Außenhindernisrepräsentation haben.

2. Grundlagen

In diesem Kapitel gehe ich auf Grundlagen ein, auf die ich mich im späteren Verlauf der Arbeit beziehen werde. Zuerst stelle ich die Klasse der außenplanaren Graphen vor und danach eine spezielle Methode mit der bestimmte Graphen erzeugt werden können, diese nenne ich hier *Stapelgeneration*.

2.1. Außenplanare Graphen

Außenplanare Graphen sind eine spezielle Untergruppe der planaren Graphen. Ein Graph G ist außenplanar genau dann, wenn eine Zeichnung von G in der Ebene existiert, sodass sich keine Kanten schneiden und alle Knoten an der äußeren Facette liegen.

2.2. Stapelgeneration von Graphen

Bei der *Stapelgeneration* von Graphen wird bei einem bereits existierenden Graphen G eine Kante $uv \in E$ ausgewählt. Auf diese Kante wird dann ein Knoten mit zwei Kanten gestapelt, indem der neue Knoten w lediglich zu den zwei Knoten u und v benachbart ist (siehe Abbildung 2.1). Dadurch entsteht aus dem Graphen $G = (V, E)$ der neue Graph $G' = (V', E')$ mit $V' = V \cup \{w\}$ und $E' = E \cup \{uw, vw\}$. Mit Hilfe der Stapelgeneration kann man jeden 2-Baum erzeugen.

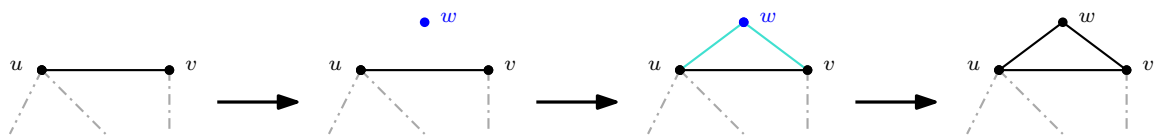


Abb. 2.1.: Stapelgeneration

3. Generierung und Überprüfung von kleinen (außen-)planaren Graphen

In diesem Kapitel beschäftige ich mich mit der Generierung und Überprüfung von (außen-)planaren Graphen mit sieben beziehungsweise acht Knoten und untersuche die Graphen genauer, für die keine regelmäßige Außenhindernisrepräsentation besitzen genauer.

Zuerst gehe ich auf die Generierung von außenplanaren Graphen mit sieben Knoten ein und zeige, wie diese mit Hilfe von `plantri` aus planaren Graphen mit acht Knoten erzeugt werden können. Danach stelle ich den Vorgang zum Überprüfen dieser Graphen auf die Existenz einer regelmäßigen Außenhindernisrepräsentation vor. Als Nächstes gehe ich auf die Generierung und Überprüfung von allen planaren Graphen mit sieben Knoten ein und untersuche die Graphen ohne regelmäßige Außenhindernisrepräsentation auf gemeinsame Eigenschaften. Im Anschluss gehe ich auf die Generierung und Überprüfung von außenplanaren Graphen mit acht Knoten ein, gefolgt von der Generierung und Überprüfung von planaren Graphen mit acht Knoten. Zum Schluss betrachte ich noch kurz die Laufzeit des zur Überprüfung verwendeten Algorithmus.

3.1. Generierung aller außenplanaren Graphen mit 7 Knoten

Zum Generieren aller außenplanaren Graphen mit sieben Knoten habe ich das Programm `plantri` [Pla, GUI] als Hilfe verwendet. `Plantri` ist ein Programm, das verschiedene Arten von planaren Graphen generieren kann, wobei für diese noch zusätzliche Eigenschaften, wie Konnektivität, kleinster Knotengrad oder maximale Facettengröße festgelegt werden können. Aber leider ist es mit `plantri` nicht möglich, außenplanare Graphen direkt zu berechnen und auszugeben. Um dennoch alle außenplanare Graphen zu erhalten, habe ich mir eine Eigenschaft dieser speziellen Graphen zu Nutze gemacht:

Fügt man zu einem außenplanaren Graph (mit n Knoten) einen weiteren Knoten hinzu, der zu allen Knoten benachbart/adjazent ist, erhält man einen Graphen (mit $n + 1$ Knoten), der ebenfalls planar ist.

Diese Eigenschaft kann auch umgekehrt verwendet werden. Hat man einen planaren Graphen mit x Knoten, wobei einer dieser Knoten zu allen anderen Knoten benachbart ist, erhält man durch Entfernen dieses Knotens einen außenplanaren Graphen mit $n - 1$ Knoten.

Um alle außenplanare Graphen mit sieben Knoten zu erhalten, habe ich `plantri` alle

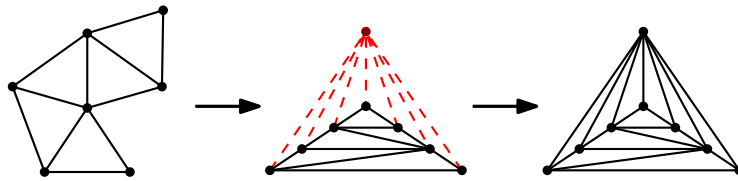


Abb. 3.1.: Schrittweise Überprüfen der Nicht-Kanten

planaren Graphen mit acht Knoten und Mindestkonnektivität zwei berechnen und als Textdatei speichern lassen. Die Mindestkonnektivität von zwei ist hierbei wichtig, um zu verhindern, dass durch Entfernen des Knotens mit $\deg(v) = 7$ keine kleineren voneinander unabhängigen Teilgraphen entstehen. Hierbei wird jeder Graph durch Adjazenzlisten dargestellt:

Bsp.:

1: 1[2 3 4 5 6 7 8] 2[1 8 4 3] 3[1 2 4] 4[1 3 2 8 7 6 5] 5[1 4 6] 6[1 5 4 7] 7[1 6 4 8] 8[1 7 4 2]
 Die Zahl vor dem „ : “ stellt dabei die Nummer des Graphens dar. Die Zahlen vor den jeweiligen eckigen Klammern stellen die Nummer des Knotens dar und die einzelnen Zahlen innerhalb der eckigen Klammern stellen die Knoten dar, zu dem der besagte Knoten benachbart ist.

Da wir hier nur Graphen mit einstelliger Knotenanzahl betrachten, konnten alle Leerzeichen problemlos entfernt werden, um die Daten kompakter und übersichtlicher zu machen. Die Datei habe ich dann mit Hilfe eines Pythonscripts durchlaufen und für alle Knoten eines Graphen überprüft, ob dieser mit allen anderen Knoten benachbart ist, also Knotengrad $\deg(v) = 7$ hat (in diesem Fall sieben Ziffern innerhalb der eckigen Klammern). Falls ja, wurde der Graph in eine neue Textdatei geschrieben.

Die neue Textdatei enthält nun nur noch Graphen, die durch Entfernen eines Knotens zu außenplanaren Graphen werden können. Ein weiteres Pythonscript durchläuft die neue Textdatei und entfernt dabei bei jedem Graphen den Knoten mit $\deg(v) = 7$ und die dazugehörigen Kanten der anderen Knoten.

3.2. Überprüfung aller außenplanaren Graphen mit 7 Knoten

Um für die verbleibenden Graphen zu überprüfen, ob eine regelmäßige Außenhindernisrepräsentation für den betrachteten Graphen existiert, muss überprüft werden, ob es eine Anordnung der Knoten gibt, sodass alle Nicht-Kanten das Außenhindernis beziehungsweise die äußere Facette schneiden. Nicht-Kanten sind hierbei alle theoretisch möglichen Kanten, die aber nicht Teil des Graphes sind. Da es per Definition der Hindernisrepräsentation nur Kanten geben kann, deren Knoten sich sehen können, folgt daraus, dass alle Knoten, die im Graph nicht benachbart sind, sich nicht sehen dürfen. Also muss für eine gültige Hindernisrepräsentation die Sicht zwischen zwei nicht benachbarten Knoten durch ein Hindernis blockiert sein. Also müssen für jeden Graphen alle verschiedenen Anordnungen/Permutationen der Knoten betrachtet werden, bis eine passende Anord-

nung gefunden wurde. Wurden alle möglichen Permutationen durchlaufen, ohne dass eine passende Anordnung gefunden wurde, bedeutet dies, dass für diesen Graphen keine regelmäßige Außenhindernisrepräsentation existiert.

Die Idee zur Überprüfung besteht darin, für jede Nicht-Kante zu überprüfen, ob diese die äußere Facette des Graphen schneidet. Zur Berechnung dieser äußeren Facette habe ich den Programmcode von Jakob Geiger[GCH⁺21] verwendet. Zuerst habe ich den Code um eine Methode erweitert (`generateGraph2`), die die zuvor erstellte Textdatei einliest und für jeden Graphen einen Ordner mit 720 Textdateien erstellt. Jede dieser Textdateien stellt eine der Permutationen des ursprünglichen Graphens in GraphML dar. Es reicht hierbei aus, einem Knoten einen festen Platz auf dem Heptagon zuzuweisen und lediglich die anderen Knoten zu vertauschen, da wir sonst nur Graphen mit identischem Aufbau erhalten würden, die lediglich gedreht wurden.

Danach werden diese Graphen und ihre Permutationen nacheinander überprüft, ob sie die Anforderung erfüllen. Dafür wird für jede Permutation die äußere Facette durch Jakobs Methode `coveringPolygon` der `GraphKelper` Klasse berechnet. Des Weiteren werden für die Permutation alle Nicht-Kanten berechnet und für jede dieser Nicht-Kanten durch die Methode `removeNonEdgeCrossing` überprüft, ob diese die zuvor berechnete Außenfacette schneiden. Die Methode `removeNonEdgeCrossing` gibt dabei die Menge der Nicht-Kanten zurück, die die Außenfacette nicht schneiden. Für die verbleibenden Nicht-Kanten muss noch mit Hilfe der Methode `removeNonEdgeOuterFace` überprüft werden, ob sie in oder außerhalb des Graphens liegen. Dies geschieht, indem von einem Dummy-Knoten außerhalb des Graphens eine Dummy-Kante zum Mittelpunkt jeder verbleibenden Nicht-Kante erstellt wird, und für diese Kante überprüft wird, wie oft sie die rote Umrandung des Graphens schneidet. Bei einer geraden Anzahl an Schnittpunkten befindet sich die Kante in der äusseren Facette und kann aus der Menge der betrachteten Nicht-Kanten entfernt werden. Führt die neue Dummy-Kante allerdings zu einer ungeraden Anzahl an Schnittpunkten, befindet sich die betrachtete Nicht-Kante im inneren des Graphens und die aktuell betrachtete Permutation erfüllt die Anforderungen nicht (siehe Abbildung 3.2)].

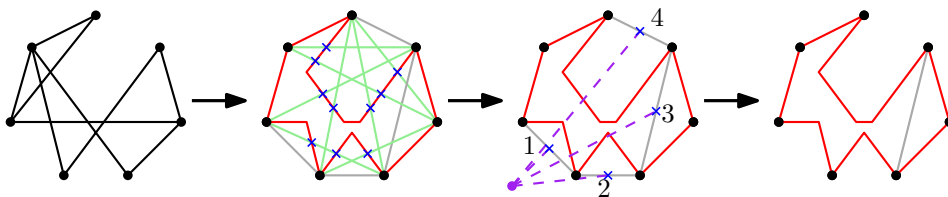


Abb. 3.2.: Erzeugen eines planaren Graphens aus einem außenplanaren Graphen

Schritt eins zeigt die zu überprüfende Permutation. Im zweiten Schritt sind alle Nicht-Kanten, die die in rot dargestellte Umrandung des Graphens schneiden, in hellgrün eingezeichnet, sowie die dazu gehörigen Schnittpunkte (blau) und die verbleibenden Nicht-Kanten in grau. Schritt drei zeigt die Überprüfung der verbleibenden Nicht-Kanten mit Hilfe des Dummy-Knotens (lila). Falls sie außerhalb des Graphens liegen, schneiden sie

folglich die äußere Facette und werden ebenfalls entfernt. Im letzten Schritt verbleiben lediglich Nicht-Kanten, die die äußere Facette nicht schneiden. Zurückgegeben wird die Menge der verbleibenden Nicht-Kanten. Befindet sich in der zurückgegebenen Menge keine Kanten mehr, schneiden folglich alle Nicht-Kanten die äußere Facette, wodurch der betrachtete Graph eine passende regelmäßige Außenhindernisrepräsentation besitzt.

Als Ergebnis dieser Überprüfung kam heraus, dass für alle außenplanaren Graphen mit 7 Knoten eine regelmäßige Außenhindernisrepräsentation existiert.

3.3. Generierung und Überprüfung aller planaren Graphen mit 7 Knoten

Anschließend habe ich mit Hilfe von `plantri` alle planaren Graphen mit sieben Knoten direkt generieren lassen. Diese habe ich, wie zuvor auch, einlesen lassen und nach gleichem Schema überprüft. Im Gegensatz zu den zuvor untersuchten außenplanaren Graphen konnte für einige Graphen keine regelmäßige Außenhindernisrepräsentation gefunden werden. Für die folgenden Graphen konnte keine Permutation mit passender Außenfacette gefunden werden (Abbildung 3.3):

Die Graphen 3, 55, 68, 343, 606, 730, 756, 757, 764, 817, 824, 830, 1832, 1833, 1834, 1850, 2007, 2008, 2009, 2010 können dabei in maximal 3 Schritten auf den Radgraphen W_6 reduziert werden, siehe Appendix A. Ein Schritt kann dabei das Entfernen einer einzelnen Kante, das Entfernen eines einzelnen Knotens und dessen Kanten oder das Vereinen zweier Knoten sein. Der W_6 ist hierbei besonders interessant, da dieser selbst auch keine regelmäßige Außenhindernisrepräsentation besitzt [FKK⁺22].

Die Graphen 76, 345, 607, 872, 1707, 1840, 1851, 1900, 1908 enthalten alle den K_4 und können durch Erweiterung des K_4 durch schrittweises Hinzufügen von Knoten, die jeweils zu zwei benachbarten Knoten Kanten besitzen, erzeugt werden. Dieses Erweitern ähnelt dabei sehr der Konstruktion von 2-Bäumen (Appendix B).

Übrig bleibt Graph 1835.

3.4. Generierung und Überprüfung aller außenplanaren Graphen mit 8 Knoten

Zum Generieren der außenplanaren Graphen mit 8 Knoten bin ich genauso vorgegangen, wie zuvor für Graphen mit 7 Knoten auch. Zuerst ließ ich mir alle einfachen planaren Graphen mit 9 Knoten und Mindestkonnektivität von zwei durch `plantri` berechnen. Aus diesen habe ich mit Hilfe eines Pythonscripts alle Graphen rausgefiltert, die einen Knoten mit Grad 8 enthalten und anschließend diesen Knoten inklusive seiner Kanten entfernt.

Zum Überprüfen der einzelnen Graphen habe ich eine für Achtecke/Oktagons angepasste

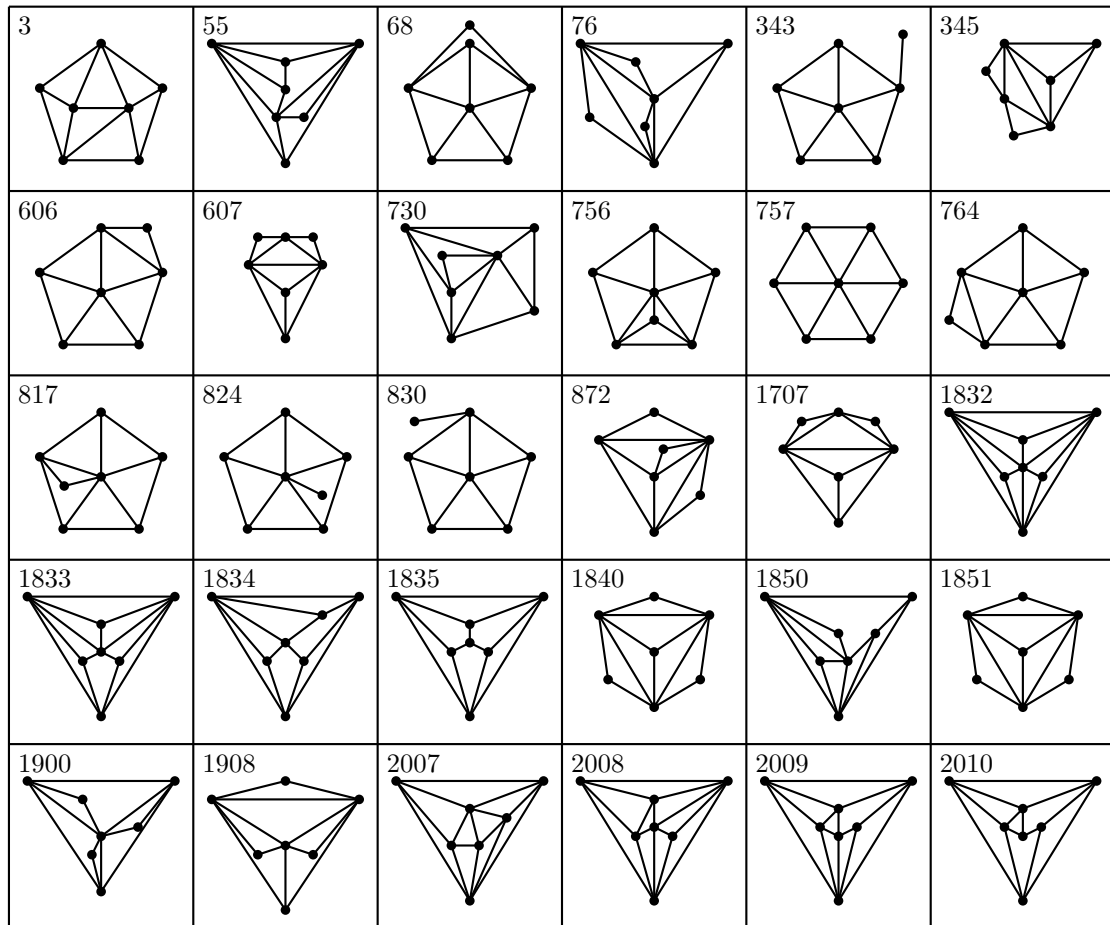


Abb. 3.3.: Planare Graphen mit 7 Knoten, ohne regelmäßige Außenhindernisrepräsentation

Version der zuvor verwendeten Methoden genutzt. Dies war nötig, da es beim Oktagon der Fall sein kann, dass sich mehr als zwei Kanten im Mittelpunkt schneiden und das Programm zum Berechnen der äußeren Facette diesen mehrfachen Schnittpunkt nicht für alle beteiligten Kanten erfasst.

Im Gegensatz zu außenplanaren Graphen mit 7 Knoten, konnte diesmal nicht für alle betrachteten Graphen eine passende regelmäßige Außenhindernisrepräsentation gefunden werden. Der einzige Graph, für den keine regelmäßige Außenhindernisrepräsentation existiert, ist der von Firman et al. [FKK⁺22] vorgestellte Graph in Abbildung 3.5.

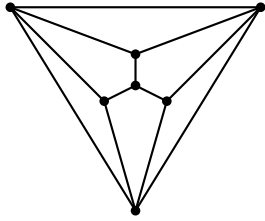


Abb. 3.4.: Graph 1835

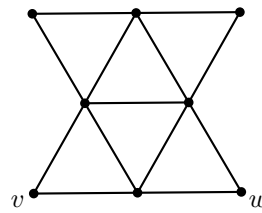


Abb. 3.5.: außenplanarer Graph ohne regelmäßige Hindernisrepräsentation (8 Knoten) [FKK⁺22]

3.5. Generierung und Überprüfung aller planaren Graphen mit 8 Knoten

Wie zuvor habe ich plantri zur Generierung aller planaren Graphen mit acht Knoten verwendet. Danach habe ich, mit dem zuvor für außenplanare Graphen mit acht Knoten verwendeten Programm, die generierten Graphen überprüft, indem für jeden Graphen alle Permutationen betrachtet wurden, bis eine passende gefunden wurde. Die Graphen, die keine passende Permutation besitzen, habe ich anschließend mit Hilfe eines weiteren Programms auf die bereits bekannten Eigenschaften von planaren Graphen mit 7 Knoten ohne passende Permutation überprüft. Die meisten dieser Graphen konnten wie zuvor auf den W_6 oder den K_4 reduziert werden oder enthalten diesen. Des Weiteren konnten einige der verbleibenden Graphen auf den zuvor gefundenen Graphen 1835 reduziert werden. Die verbleibenden Graphen entsprachen dem von Firman et al. [FKK⁺22] vorgestellten Graphen in Abbildung 3.5 beziehungsweise diesem und einer Kante, die die beiden Knoten v und w verbindet.

3.6. Laufzeit

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ werden $(|V| - 1)!$ mögliche Anordnungen der einzelnen Knoten betrachtet. Da eine Rotation des Graphens in unserem Fall keinen Unterschied macht, können wir für einen Knoten eine feste Position wählen und lediglich die verbleibenden $|V| - 1$ Knoten vertauschen. Für jede dieser Permutationen muss zuerst die äußere Facette berechnet werden, was jeweils eine Laufzeit von $|E|^4$ hat. Danach werden lediglich noch alle Nicht-Kanten berechnet und überprüft, wobei dieser Teilschritt eine Laufzeit von $\mathcal{O}(|V|^2)$ benötigt. Dies hat eine asymptotische Gesamtlaufzeit für x Graphen von $\mathcal{O}(x \cdot (|V| - 1)! \cdot (|V|^2 + |E|^4))$ zur Folge.

4. Fazit

Zuerst habe ich gezeigt, dass jeder außenplanare Graph mit sieben Knoten eine regelmäßige Außenhindernisrepräsentation besitzt. Für alle planaren Graphen mit sieben Knoten ohne regelmäßige Außenhindernisrepräsentation habe ich überprüft, welche Eigenschaften diese Graphen haben. Diese lassen sich entweder in 3 Schritten auf den W_6 reduzieren oder mit Hilfe von Stapelgeneration aus dem K_4 erzeugen. Des Weiteren existiert ein Graph, der diese Eigenschaften nicht besitzt (Graph 1835). Anschließend habe ich gezeigt, dass der von Firman et al. vorgestellte Graph (siehe Abbildung 3.5) der einzige außenplanare Graph mit acht Knoten ist, der keine regelmäßige Außenhindernisrepräsentation besitzt. Zuletzt habe ich alle planaren Graphen mit acht Knoten ohne regelmäßige Außenhindernisrepräsentation auf die zuvor gefundenen Eigenschaften überprüft. Die meisten dieser Graphen lassen sich auf den W_6 reduzieren oder enthalten den K_4 . Die verbleibenden Graphen lassen sich auf den Graph 1835 reduzieren beziehungsweise in einem Schritt auf den Graphen in Abbildung 3.5. Dies lässt die Frage offen, inwiefern (außen-)planare Graphen ohne regelmäßige Hindernisrepräsentation mit neun oder mehr Knoten mit den hier gefundenen Knoten zusammenhängen oder deren Eigenschaften besitzen.

A. Appendix

A.1. Graphen, die den K_4 enthalten

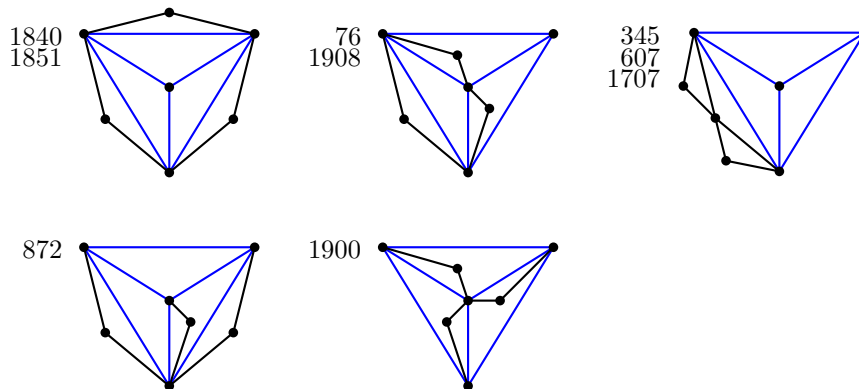


Abb. A.1.: Graphen, die mit Hilfe von Stapeloperation aus dem K_4 erzeugt werden können

Die Abbildung A.1 zeigt alle Graphen mit sieben Knoten, die den K_4 enthalten und durch schrittweises Hinzufügen von Knoten, die lediglich zu zwei benachbarten Knoten adjazent sind, erstellt werden können. Dieses Vorgehen ähnelt zudem der Generation von 2-Bäumen.

A.2. Graphen, die auf den W_6 reduziert werden können

Die folgenden Abbildungen Abbildung A.2, Abbildung A.3 und Abbildung A.4 zeigen die Graphen, die entweder den Teilgraphen W_6 enthalten, oder auf diesen reduziert werden können. Für den ersten Fall sind hierbei jeweils im zweiten Schritt die zu entfernenden Kanten und Knoten rot markiert und anschließend entfernt. Für den zweiten Fall sind die zwei zu vereinenden Knoten rot markiert und mit einer umkreist. Die betroffenen Kanten sind dabei blau gefärbt.

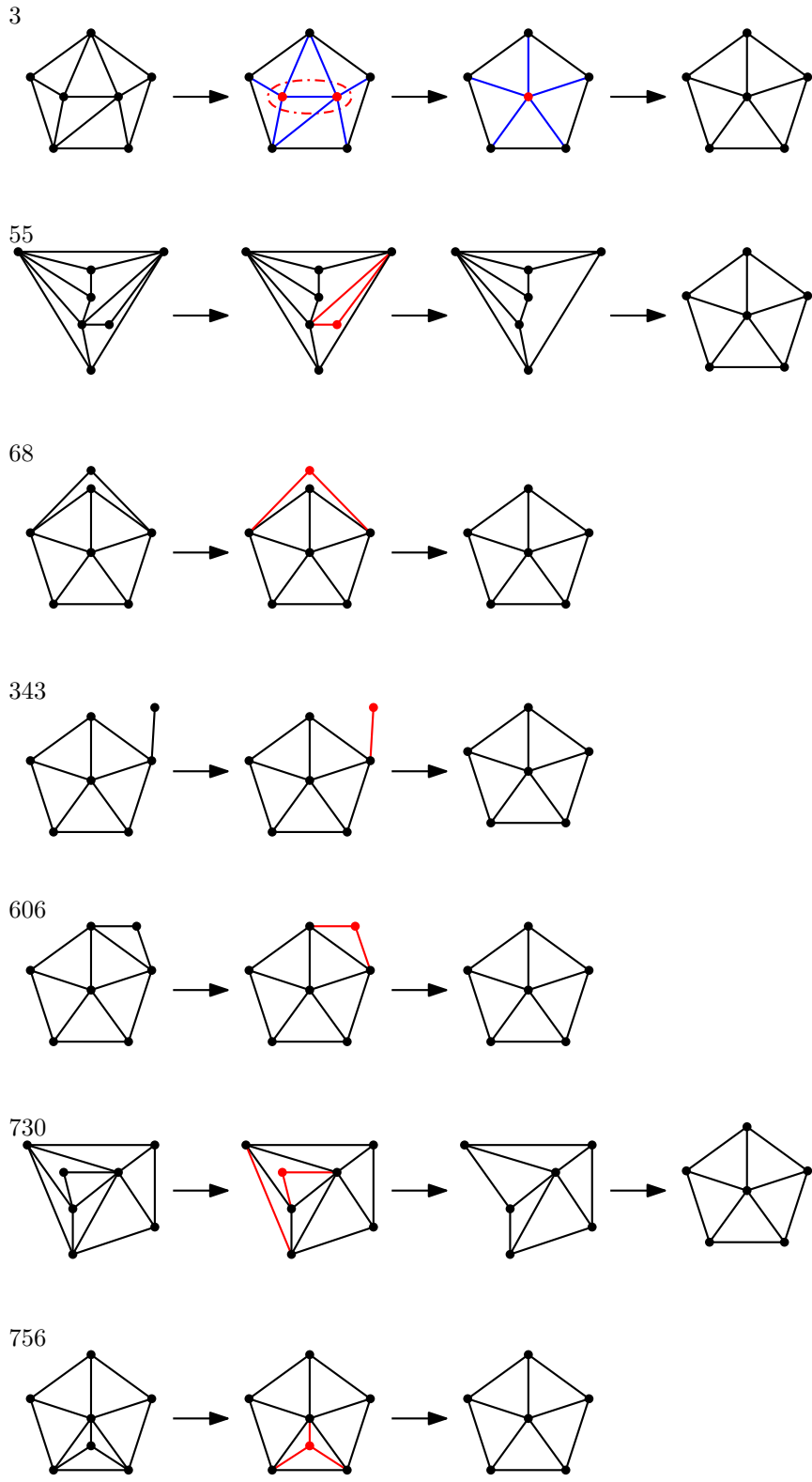


Abb. A.2.: Graph 1 bis 7

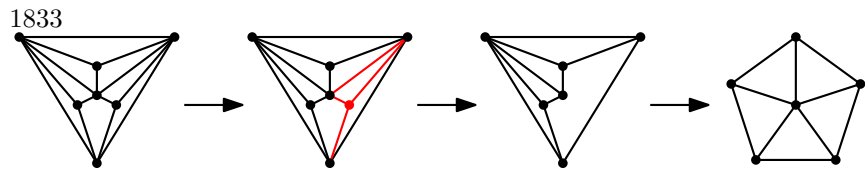
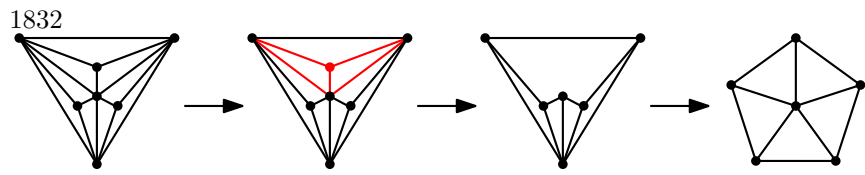
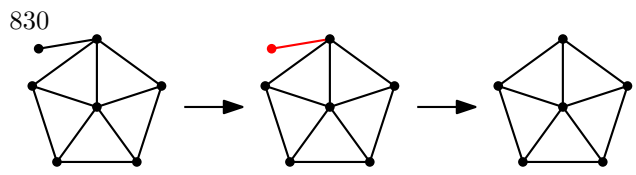
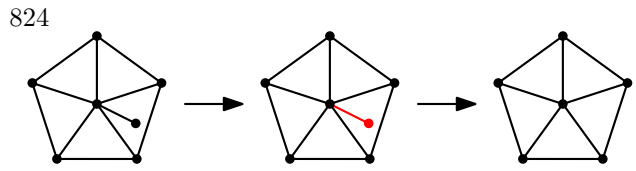
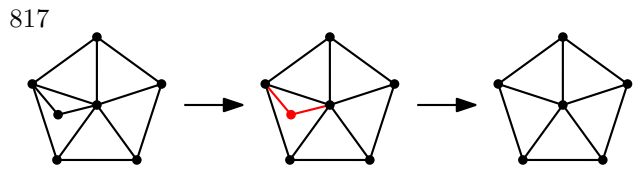
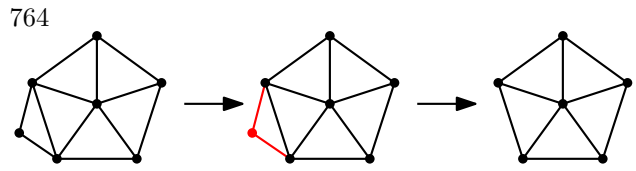
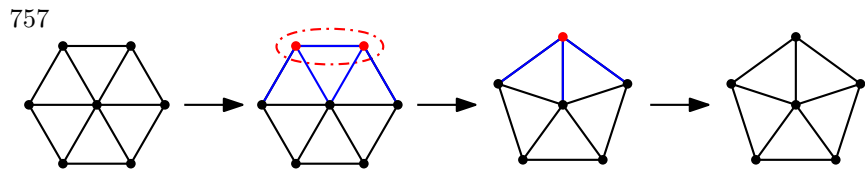


Abb. A.3.: Graph 8 bis 14

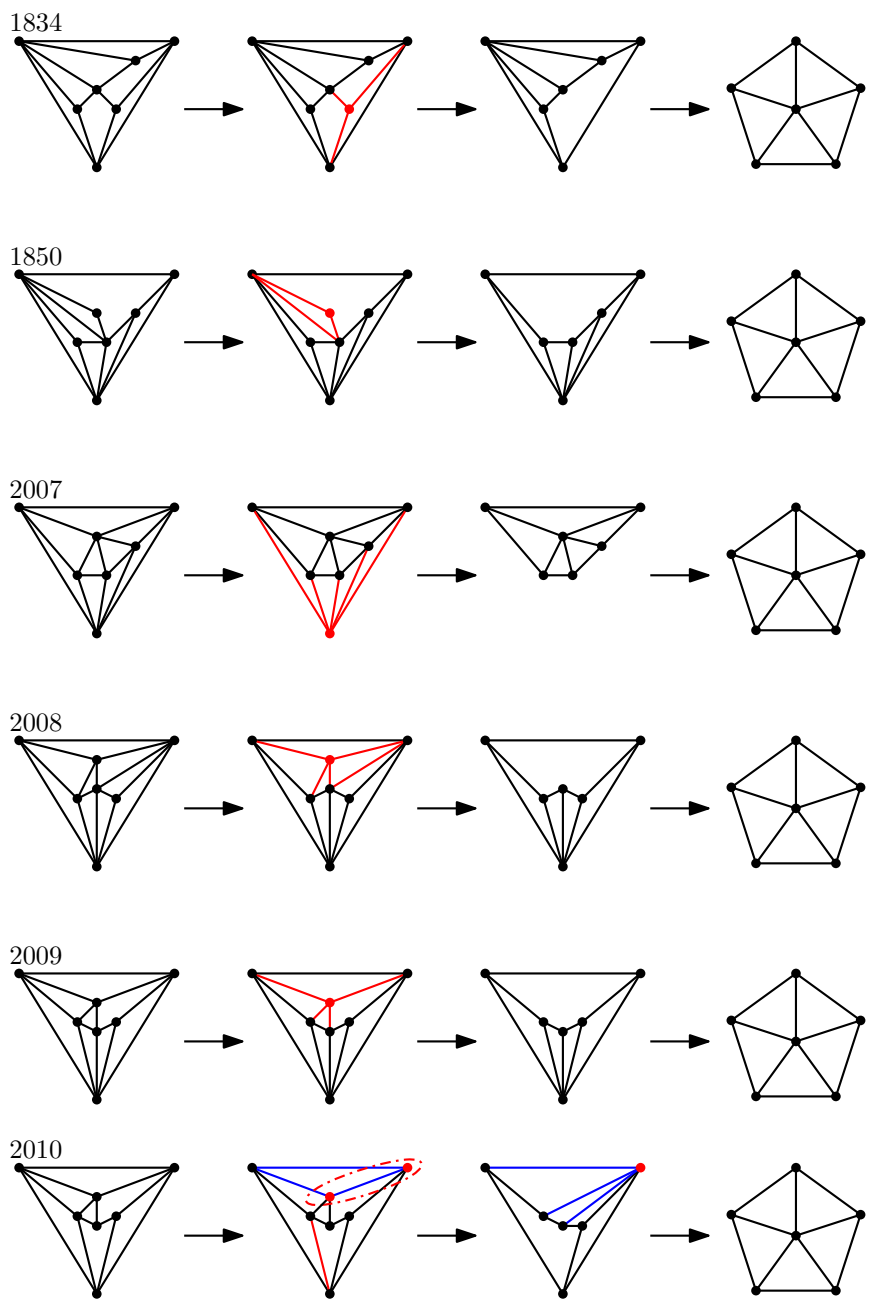


Abb. A.4.: Graph 15 bis 20

Literaturverzeichnis

- [AKL10] Hannah Alpert, Christina Koch und Joshua D. Laison: Obstacle Numbers of Graphs. *Discrete Comput. Geom.*, 44(1):223–244, 2010, 10.1007/s00454-009-9233-8.
- [BCF⁺17] Leah Wrenn Berman, Glenn G. Chappell, Jill R. Faudree, John Gimbel, Chris Hartman und Gordon I. Williams: Graphs with Obstacle Number Greater than One. *JGAA*, 21(6):1107–1119, 2017, 10.7155/jgaa.00452.
- [BCV18] Martin Balko, Josef Cibulka und Pavel Valtr: Drawing Graphs Using a Small Number of Obstacles. *Discrete Comput. Geom.*, 59(1):143–164, 2018, 10.1007/s00454-017-9919-2.
- [CLPW16] Steven Chaplick, Fabian Lipp, Ji-won Park und Alexander Wolff: Obstructing Visibilities with One Obstacle. In: Yifan Hu und Martin Nöllenburg (Herausgeber): *Proc. 24th Int. Symp. Graph Drawing & Network Vis. (GD)*, Band 9801 der Reihe *Lect. Notes in Comput. Sci.*, Seiten 295–308. Springer Verlag, 2016, 10.1007/978-3-319-50106-2_23. <http://arxiv.org/abs/1607.00278>.
- [DM15] Vida Dujmović und Pat Morin: On Obstacle Numbers. *Electr. J. Combin.*, 22(3):paper #P3.1, 7 pages, 2015, 10.37236/4373. <http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v22i3p1>.
- [FKK⁺22] Oksana Firman, Philipp Kindermann, Jonathan Klawitter, Boris Klemz, Felix Klesen und Alexander Wolff: Outside-Obstacle Representations with All Vertices on the Outer Face. In: Emilio Di Giacomo und Fabrizio Montecchiani (Herausgeber): *Proc. 38th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG'22)*, Seiten 54:1–8, 2022, 10.48550/ARXIV.2202.13015. <https://eurocg2022.unipg.it/booklet/EuroCG2022-Booklet.pdf>.
- [GCH⁺21] Jakob Geiger, Sabine Cornelsen, Jan-Henrik Haunert, Philipp Kindermann, Tamara Mchedlidze, Martin Nöllenburg, Yoshio Okamoto und Alexander Wolff: ClusterSets: Optimizing Planar Clusters in Categorical Point Data. *Comput. Graph. Forum*, 40(3):471–481, 2021, 10.1111/cgf.14322.
- [GPV17] John Gimbel, Patrice Ossona de Mendez und Pavel Valtr: Obstacle numbers of planar graphs. In: Fabrizio Frati und Kwan Liu Ma (Herausgeber): *Int. Symp. Graph Drawing and Network Vis.*, *Lect. Notes in Comput. Sci.*, Seiten 67–80. Springer, 2017, 10.48550/ARXIV.1706.06992.
- [GUI] plantri GUI. <http://compos.org/plantri>. Zugegriffen am 11.05.2022.

- [MPP12] Padmini Mukkamala, János Pach und Dömötör Pálvölgyi: Lower bounds on the obstacle number of graphs. *Electr. J. Combin.*, 19(2):paper #P32, 8 pages, 2012, 10.48550/ARXIV.1103.2724. <http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v19i2p32>.
- [Pla] plantri. <https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/plantri/>. Zugegriffen am 11.05.2022.

Erklärung

Hiermit versichere ich die vorliegende Abschlussarbeit selbstständig verfasst zu haben, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben, und die Arbeit bisher oder gleichzeitig keiner anderen Prüfungsbehörde unter Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt zu haben.

Würzburg, den 31. Mai 2022

.....

León Lang