

Bachelorarbeit

# Orthogonales Zeichnen als Färbeproblem in perfekten Graphen

Lukas Brückner

Abgabedatum: 26.03.2021  
Betreuer: Prof. Dr. Alexander Wolff  
Johannes Zink, M.Sc.



Julius-Maximilians-Universität Würzburg  
Lehrstuhl für Informatik I  
Algorithmen und Komplexität

# Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersuchen wir das geometrische Problem, Strecken, welche zwischen zwei parallelen Geraden verlaufen, optimal in *Orthogonaldarstellung*, also als Folge ausschließlich vertikaler und horizontaler Segmente, zu zeichnen. Die Problemstellung findet im Bereich des lagenbasierten Graphenzeichnens bei der *Kantenführung*, genauer bei der Verbindung zwischen Knoten, die auf verschiedenen Lagen angeordnet sind, Verwendung. Vor allem in technischen Anwendungen, wie dem automatischen Zeichnen von Schaltplänen, wird auf dieses Verfahren zurückgegriffen. Wir abstrahieren dieses geometrische Problem so, dass es als kombinatorisches beziehungsweise als graphentheoretisches Problem aufgefasst werden kann. Die Grundlage der Problembetrachtung bildet ein Konfliktgraph, durch den wir die Abhängigkeiten der Strecken, die gezeichnet werden müssen, darstellen und die Validität dieser Darstellungen sicherstellen können. Wir beweisen, dass sich die Problemlösung auf bekannte graphentheoretische Probleme, wie das Färbeproblem oder die Bestimmung einer minimalen azyklischen Orientierung, zurückführen lässt. Zusätzlich zeigen wir auf, dass dieser Graph perfekt ist, die zugrundeliegenden Probleme also theoretisch effizient lösbar sind. Des Weiteren stellen wir eine Bijektion zwischen der Menge möglicher Eingaben und perfekten Matchings im vollständigen Graphen vor.

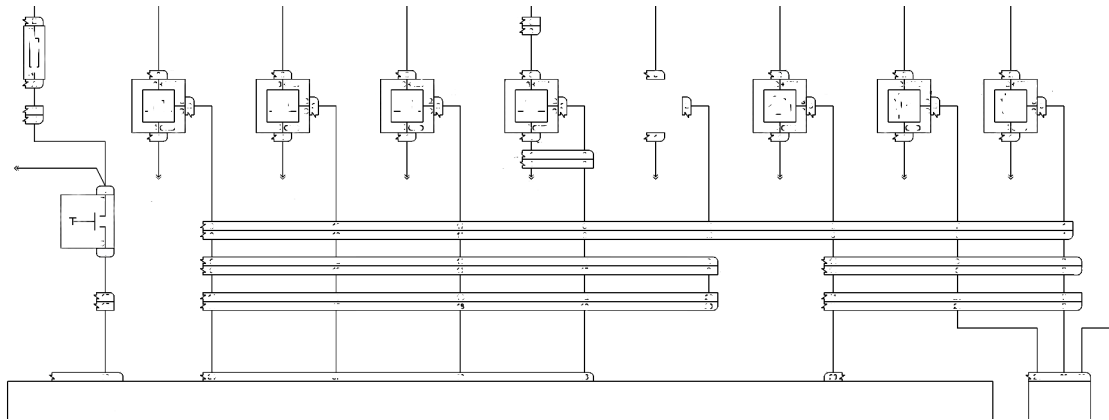
Durch die theoretische Modellierung, sowie die Übertragung auf andere Probleme, konnte ein detaillierter Überblick über die Gesamtheit der Probleme, deren Lösung für eine optimale Darstellung des orthogonalen Kantenverlaufs notwendig ist, gewonnen werden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	5
1.2	Verwandte Literatur . . . . .	6
1.3	Beitrag . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Graphentheoretische Grundlagen</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Grundlegende Problemeigenschaften</b>	<b>10</b>
3.1	Kanten in Orthogonaldarstellung . . . . .	10
3.2	Eigenschaften der Menge möglicher Eingaben . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Problemabstraktion</b>	<b>17</b>
4.1	Die Eingabedaten als Intervallmodell . . . . .	17
4.2	Konflikte in der Darstellung verschiedener Kanten . . . . .	19
4.3	Konfliktgraph . . . . .	22
4.4	Transitivität des Konfliktgraphen . . . . .	23
4.5	Eigenschaften des erweiterten Konfliktgraphen . . . . .	27
4.6	Repräsentation einer Darstellung als azyklische Orientierung . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Fazit</b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>Ausblick</b>	<b>36</b>
6.0.1	Obere Schranke für die Anzahl benötigter Ebenen . . . . .	36
6.0.2	Problembetrachtung für uneingeschränkte Probleminstanzen . . . . .	37
6.0.3	Idee für einen Lösungsalgorithmus . . . . .	37
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>39</b>

# 1 Einleitung

Im Maschinenbauwesen verwenden Techniker spezielle Schaltpläne, um die Funktionalität von Maschinen zu überprüfen. Diese Schaltpläne bestehen aus einzelnen elektronischen Komponenten, bei denen die spezifischen Ports mit Kabeln verbunden werden. Das Augenmerk bei der Darstellung dieser Schaltpläne liegt in einer möglichst präzisen Repräsentation der Verschaltung, die zugleich lesbar und übersichtlich für die Techniker sein muss. Diese sind mit handgefertigten Zeichnungen solcher Pläne vertraut. Abbildung 1.1 zeigt einen solchen Schaltplan, der im *orthogonalen Zeichenstil* angefertigt wurde. Dieser ist dadurch gekennzeichnet, dass Knoten in Form von Rechtecken auf ei-



**Abb. 1.1:** Ein handgefertigter Schaltplan. Beschriftungen wurden bewusst unkenntlich gemacht oder entfernt [WZBW20].

nem – in der finalen Darstellung nicht sichtbaren – Gitter platziert werden und Kanten, als Folge ausschließlich vertikaler und horizontaler Segmente – welche alle entlang der Linien des Gitters verlaufen – gezeichnet werden. Diese Kanten verbinden dabei jedoch nur Knoten, die auf unterschiedlichen horizontalen Ebenen angeordnet sind.

Der *Sugiyama-Algorithmus* [STT81] ist ein Verfahren zur Anfertigung solcher *lagenbasierter* Zeichnungen, also Zeichnungen, in welchen die Knoten auf horizontalen Geraden, auch *Lagen* genannt, angeordnet werden. Das Ziel dieses Verfahrens ist es, Hierarchien möglichst genau wiederzugeben. Walter et al. [WZBW20] beschäftigen sich in ihrer Forschungsarbeit mit genau dieser Aufgabe und bauen dazu auf dem Sugiyama-Algorithmus auf, um solche Schaltpläne darzustellen.

Der Sugiyama-Algorithmus teilt das Erstellen einer Zeichnung in mehrere Phasen auf. Wir wollen die letzte Phase des Algorithmus, die Erstellung des Kantenverlaufs, genauer betrachten. Zu Beginn dieser Phase ist die Position aller Knoten und Ports bereits

genau festgelegt. Die Aufgabe besteht demnach darin, Kabel zwischen den zu verbindenden Ports einzuzichnen. Damit der Kabelverlauf nachvollziehbar bleibt, muss die Anordnung dieser Kabel gewisse Kriterien erfüllen, um eine optimale Kabelführung zu garantieren. Die Kabelführung beeinflusst die Lesbarkeit eines Schaltplans maßgeblich. Eine schlecht konstruierte Kabelführung erschwert es dem Techniker, zusammenhängende Komponenten zu identifizieren, und erhöht somit auch die Gefahr, Fehler zu begehen.

Walter et al. [WZBW20] lösen dieses Problem mit einem Greedy-Algorithmus, weisen jedoch darauf hin, dass dies nicht immer zu optimalen Darstellungen führt. Wir wollen deshalb in dieser Arbeit ein geometrisches beziehungsweise kombinatorisches Problem, das der optimalen Kabelführung zugrunde liegt, vorstellen und genauer betrachten.

## 1.1 Problemstellung

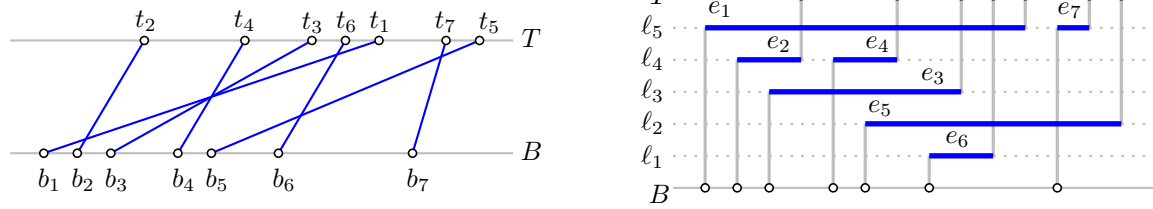
Eine Probleminstanz  $X$  ist eine Menge bestehend aus  $n$  Strecken. Jede Strecke wird durch ein Tupel  $(t, b) \in \mathbb{N}^2$  beschrieben, das die x-Koordinaten des Start- und Endpunkts der Strecke definiert. Die Start- und Endpunkte der Strecken liegen auf den Basisgeraden  $T$  und  $B$ , die parallel zur x-Achse angeordnet sind, so dass für eine Strecke  $(t, b)$ , jeweils  $t$  die Koordinate des Endpunkts auf der Basisgerade  $T$  und  $b$  die Koordinate des Startpunkts auf der Basisgerade  $B$  festlegt und die beiden Koordinaten  $t$  und  $b$  unter allen Koordinaten anderer Strecken eindeutig sind. Zu beachten ist hierbei, dass die Basisgerade  $T$  über  $B$  angeordnet ist. Wir bezeichnen deshalb  $t$  und  $b$  auch als *obere* und *untere* Koordinate.

Gesucht ist nun eine Darstellung der Strecken  $x_1, \dots, x_n \in X$ , welche die folgenden Validitätskriterien erfüllt:

- (V1) Die Darstellung erfolgt im *Orthogonal-Stil*, also als Sequenz von ausschließlich horizontalen Teilstücken (HT) und vertikalen Teilstücken (VT).
- (V2) HTs liegen auf parallelen horizontalen Geraden  $\ell_1, \dots, \ell_m \in L$ , die in dieser Reihenfolge zwischen  $B$  und  $T$  angeordnet sind. Fortlaufend nennen wir die Gerade  $\ell_i$  auch *Ebene  $i$* .
- (V3) VTs dürfen andere VTs nicht schneiden.
- (V4) HTs dürfen andere HTs nicht schneiden.
- (V5) Die Darstellungen von zwei Kanten dürfen sich höchstens einmal schneiden.

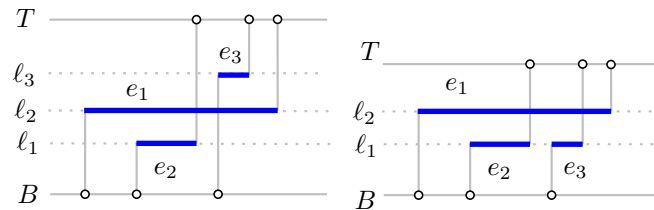
Abbildung 1.2 visualisiert eine Probleminstanz und eine Darstellung, welche die Validitätskriterien erfüllt. Verletzen die Darstellungen von zwei Strecken gegenseitig keines dieser Kriterien, so sind die Darstellungen untereinander *valide*. Um eine möglichst strukturierte und übersichtliche Darstellung zu erzeugen, wollen wir ein weiteres Kriterium für eine Darstellung einführen:

- (V\*) Es existiert keine andere valide Darstellung der Probleminstanz, die weniger Ebenen – wie in Punkt (V2) beschrieben – verwendet.



**Abb. 1.2:** Die linke Abbildung visualisiert eine Probleminstance in der beschriebenen Umgebung. Die rechte Abbildung zeigt eine Darstellung dieser Probleminstance, welche die beschriebenen Validitätskriterien erfüllt. Blaue horizontale Linien stellen HTs und graue vertikale Linien VTs dar.

Eine valide Darstellung einer Probleminstance, welche dieses Kriterium erfüllt, bezeichnen wir fortlaufend auch als *optimal*. Abbildung 1.3 zeigt zwei valide Darstellungen einer Probleminstance, von welchen nur eine optimal ist.



**Abb. 1.3:** Für eine Eingabe kann es mehrere Darstellungen geben, welche die Validitätskriterien erfüllen.

## 1.2 Verwandte Literatur

Sugiyama et al. [STT81] haben in den frühen 80er Jahren den Grundstein für das lagenbasierte Zeichnen – die Art des Zeichnens wird deshalb auch als *Sugiyama-Stil* bezeichnet – gelegt. Lagenbasiertes Zeichnen ist eine Methode, Hierarchien, welche durch gerichtete Graphen beschrieben werden, grafisch darzustellen.

Das Verfahren wurde seitdem stetig verbessert und an die individuellen Bedürfnisse verschiedener Branchen angepasst. Vor allem in technischen Bereichen, wie beispielsweise der Visualisierung von Datenfluss in Programmcode [SSv14], der Darstellung von Ventilationsnetzwerkssystemen in Kohleminen [jDL14], jedoch auch bei der Visualisierung von Evaluationsstrukturen [OKS<sup>+</sup>17], findet die Sugiyama-Methode Verwendung.

Walter et al. [WZBW20] bauen auf die Sugiyama Methode auf, um Schaltpläne komplexer und individuell konfigurierter Maschinen zu zeichnen.

Das Problem, welches wir in dieser Arbeit betrachten und in Abschnitt 1.1 beschrieben wird, hängt mit der letzten Phase des Sugiyama Verfahrens zusammen, dem *edge-routing*, also dem Einzeichnen der Kanten zwischen den Knoten. Walter et al. [WZBW20] lösen dies mithilfe eines greedy-Algorithmus. Dazu werden als erstes die linksläufigen Strecken betrachtet und nach der Koordinate der Startpunkte sortiert. In dieser Reihenfolge

werden die HTs der Strecken nun auf der untersten verfügbaren Ebene angeordnet. Anschließend werden die rechtsläufigen Strecken in der gleichen Reihenfolge jeweils auf der höchsten verfügbaren Ebene angeordnet. Anschließend werden die HTs der rechtsläufigen Strecken gemeinsam so weit wie möglich nach unten gezogen. Der Algorithmus hat eine quadratische Laufzeit in Abhängigkeit der darzustellenden Strecken, löst das Problem jedoch nicht immer optimal. Es kann also vorkommen, dass eine Darstellung mehr Ebenen nutzt, als eigentlich notwendig wären.

### 1.3 Beitrag

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung eines Lösungsansatzes des in Abschnitt 1.1 beschriebenen Problems.

Wir beginnen in Kapitel 2 mit einigen Grundlagen, die für das Verständniss der Arbeit notwendig sind.

Anschließend sollen in Abschnitt 3.1 grundsätzliche Eigenschaften der Problemstellung und der geforderten Lösung erarbeitet werden. Wir können dabei zeigen, dass sich Strecken in Orthogonaldarstellung, bis auf einen Fall, mit nur einem HT eindeutig beschreiben lassen. Um diesen Sonderfall auszuschließen, schränken wir die betrachteten Probleminstanzen so ein, dass dieser Fall nicht auftritt. In Abschnitt 3.2 stellen wir eine Bijektion zwischen diesen eingeschränkten Probleminstanzen der Länge  $n$  und perfekten Matchings im vollständigen Graph  $K_{2n}$  vor.

In Kapitel 4 entwickeln wir ein Modell, das Probleminstanzen verlustfrei repräsentiert und die individuellen Abhängigkeiten – die wir genauer als *Konflikte* definieren – zwischen den Strecken einer Instanz abbildet. Als Grundlage dient die Betrachtung einer Probleminstanz als Intervallmodell, indem jede Strecke durch ein Intervall dargestellt wird, welches den Bereich beschreibt, in dem das HT der Strecke verläuft. Zusammen mit den Validitätskriterien werden wir so eine konkrete Richtlinie ableiten, durch die wir Konflikte zwischen den Darstellungen verschiedener Strecken feststellen können. Wir betrachten eine Strecke als Knoten innerhalb dieses Konfliktgraphen, in dem zwei Knoten genau dann benachbart sind, wenn die Darstellungen der Strecken in Konflikt stehen.

Aufgrund einer beobachtbaren transitiven Eigenschaft dieser Konflikte können wir einen erweiterten Konfliktgraphen konstruieren, der alle Abhängigkeiten zwischen den Strecken abbildet. Wir werden zeigen, dass jede valide Darstellung einer Probleminstanz eine Färbung auf den zugehörigen erweiterten Konfliktgraphen induziert. Um zu zeigen, dass das zugrunde liegende Färbeproblem für den erweiterten Konfliktgraphen effizient gelöst werden kann, beweisen wir, dass dieser Graph perfekt ist. Anschließend stellen wir eine äquivalente Problemrepräsentation in Form einer azyklischen Orientierung vor. Anhand dieser Eigenschaft zeigen wir eine Dualität zwischen der Färbung und der azyklischen Orientierung von Graphen.

## 2 Graphentheoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige Konzepte und Begrifflichkeiten erklärt, die zum Verständnis der Arbeit notwendig sind.

Ein *Graph* ist ein Tupel  $G = (V, E)$  aus einer Knotenmenge  $V$  und einer Kantenmenge  $E$ . Wir nennen den Graphen *ungerichtet*, falls gilt:

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subset V \mid u \neq v\}.$$

Wir nennen den Graphen *gerichtet*, falls gilt:

$$E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Im gerichteten Fall beschreibt  $(u, v) \in E$  eine Kante, deren Startknoten  $u$  und Endknoten  $v$  ist. Für einen Graphen  $G$  bezeichnen wir die Kantenmenge mit  $E(G)$  und die Knotenmengen mit  $V(G)$ . Zwei Knoten nennen wir *adjazent* oder *benachbart* genau dann, wenn eine Kante existiert, welche die Knoten verbindet. Analog sind zwei Kanten, die einen gemeinsamen Knoten enthalten, *adjazent*. Zu  $G$  nennen wir den Graphen  $\overline{G}$  zu der Knotenmenge  $V(G)$  und der Kantenmenge

$$E(\overline{G}) = \{(v, u) : v \neq u \text{ und } (v, u) \notin E\}$$

den *Komplementgraphen* von  $G$ . Für eine Teilmenge der Knoten  $V' \subset V(G)$  nennen wir den Graphen  $G[V']$  mit der Knotenmenge  $V'$  *induzierten Subgraph von  $G$*  genau dann, wenn für alle Kanten  $e = \{u, v\} \in E$  gilt:

$$\{u, v\} \in E(G[V']) \text{ genau dann, wenn } u, v \in V'.$$

Eine Teilmenge  $M \subseteq E(G)$  der Kanten eines Graphen  $G$ , in welcher keine zwei Kanten aus  $M$  adjazent sind, nennt man *Matching*. Das Matching heißt *maximal*, falls für jede Kante  $e \notin M$  gilt, dass  $M \cup \{e\}$  kein Matching ist, und *perfekt*, falls  $2 \cdot |M| = |V(G)|$  gilt. Ein *Pfad*  $p = (v_1, \dots, v_k)$  ist eine Knotenfolge, so dass für  $i = 1, \dots, k - 1$  gilt:

$$\{v_i, v_{i+1}\} \in E.$$

Die Länge  $|p|$  von  $p$  ist die Anzahl an Kanten, die der Pfad hat. Ein Pfad ist *induziert* genau dann, wenn außer den Kanten, die entlang des Pfades verlaufen, keine anderen Kanten zwischen Knoten des Pfades existieren.

Einen Pfad, bei dem Start- und Endknoten gleich sind, bezeichnen wir als *Kreis*.

Ein gerichteter Graph  $G$  ist *azyklisch* genau dann, wenn  $G$  keine Kreise besitzt.



Eine surjektive Abbildung  $\sigma : V \rightarrow 1, \dots, k$  heißt *Knotenfärbung*, falls für jedes Paar adjazenter Knoten  $u, v$  gilt:  $\sigma(u) \neq \sigma(v)$ .

Die minimale natürliche Zahl  $k$ , für die gilt, dass eine Knotenfärbung für  $G$  mit  $k$  Farben existiert, heißt *chromatische Zahl* von  $G$  und wird mit  $\chi(G)$  abgekürzt.

Eine *Clique* ist eine Teilmenge der Knotenmenge  $C \subseteq V(G)$ , so dass für alle Paare verschiedener Knoten  $u, v \in C$  gilt, dass  $u$  und  $v$  adjazent sind. Die Größe der maximalen Clique wird *Cliquenzahl* genannt und auch durch  $\omega(G)$  abgekürzt. Für jeden Graphen  $G$  gilt grundsätzlich:

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

Eine Teilmenge  $U \subseteq V$  heißt *unabhängige* oder auch *stabile Menge*, falls kein Paar unterschiedlicher Knoten  $u, v \in U$  existiert, so dass  $u$  und  $v$  adjazent sind.

Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt *perfekt*, wenn für jeden induzierten Teilgraphen  $H$  von  $G$  gilt:  $\omega(H) = \chi(H)$ . Äquivalent zu dieser Definition ist die Eigenschaft, dass kein induzierter Teilgraph von  $G$  ein *ungerades Loch*, also ein Kreis ungerader Länge mindestens 5, oder ein *ungerades Antiloch*, also das Komplement eines Kreises ungerader Länge mindestens 5, ist [CRaT06].

## 3 Grundlegende Problemeigenschaften

In diesem Abschnitt sollen die grundsätzlichen Eigenschaften des Problems genauer betrachtet werden.

Dazu zeigen wir zunächst, dass sich die Orthogonaldarstellung jeder Strecke in einer optimalen Lösung, bis auf einen Sonderfall, durch ein einzelnes HT eindeutig beschreiben lässt. Daher schränken wir die betrachteten Probleminstanzen so ein, dass dieser Fall nicht auftritt, und stellen anschließend eine Bijektion zwischen der Menge möglicher Probleminstanzen und perfekten Matchings im vollständigen Graph  $K_n$  vor.

### 3.1 Kanten in Orthogonaldarstellung

Eine Kante in Orthogonaldarstellung ist eine Folge abwechselnd vertikaler und horizontaler Teilstücke und lässt sich formal als  $n$ -Tupel  $t = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  beschreiben, so dass jeder Eintrag ein Teilstück repräsentiert. Ein Teilstück kann beispielsweise durch die Angabe des Start- und Endpunkts mit

$$\gamma_i = ((\text{Startkoordinate}, \text{Startebene}), (\text{Endkoordinate}, \text{Endebene}))$$

definiert werden.

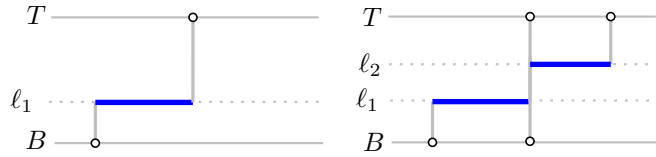
Nutzen wir diese Definition, so ist ein Teilstück  $\gamma_j$  genau dann horizontal, wenn die Startebene gleich der Endebene ist. Analog ist ein Teilstück vertikal, wenn die Startkoordinate gleich der Endkoordinate ist.

Da innerhalb der Basisgeraden  $T$  und  $B$  kein Teilstück verlaufen darf – siehe Punkt **(V4)**, denn wir können  $T$  und  $B$  als HTs auffassen – folgt, dass das erste und letzte Teilstück jeweils vertikal verlaufen muss.

Wir wissen, dass es ausreicht, entweder ausschließlich die VTs oder die HTs anzugeben, um eine Orthogonaldarstellung eindeutig zu beschreiben, denn betrachten wir ein Teilstück  $\gamma_{i+1}$  einer Orthogonaldarstellung, so verbindet es die Teilstücke  $\gamma_i$  und  $\gamma_{i+2}$ . Der Endpunkt des Teilstücks  $\gamma_i$  ist also genau der Startpunkt von  $\gamma_{i+1}$  und der Endpunkt von  $\gamma_{i+1}$  genau der Startpunkt von  $\gamma_{i+2}$ . Das Teilstück  $\gamma_{i+1}$  ist dementsprechend durch den Endpunkt von  $\gamma_i$  und den Startpunkt von  $\gamma_{i+2}$  eindeutig festgelegt.

Da das erste und letzte Teilstück jeweils vertikal ausgerichtet ist, gibt es mehr VTs als HTs. Entsprechend ist die Darstellung mittels HTs kürzer. Fortlaufend wird deshalb ausschließlich die Beschreibung mittels HTs verwendet.

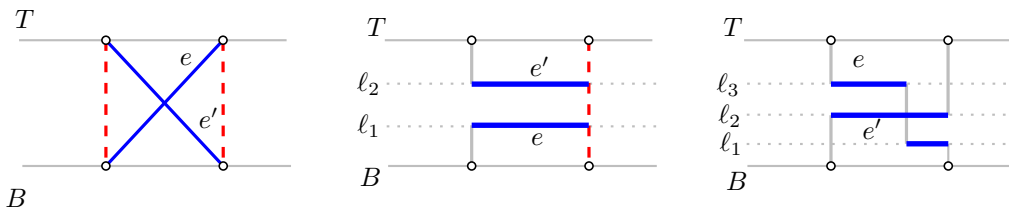
Eine einzelne Strecke lässt sich immer mit einem HT darstellen. Wollen wir jedoch mehrere Kanten darstellen, so können die Kantendarstellungen, wie Abbildung 3.1 zeigt, Validitätskriterien verletzen.



**Abb. 3.1:** Die rechte Abbildung stellt eine Verletzung des Validitätskriteriums Punkt (V3) dar, weil nicht mehr eindeutig erkennbar ist, welche Start- und Endpunkte miteinander verbunden werden.

Nun stellt sich die Frage, wie viele HTs gebraucht werden, um zwei beliebige Strecken in Orthogonaldarstellung darzustellen.

Wir zeigen nun, dass es nur einen Fall gibt, in dem für eine valide Darstellung von zwei Strecken mehr als ein HT pro Strecke notwendig ist. Abbildung 3.2 zeigt diesen Fall.



**Abb. 3.2:** Die Strecken  $e, e'$  stehen in einer Konstellation, durch die mindestens zwei HTs für die Darstellung einer der beiden Strecken notwendig sind.

**Lemma 1.** *Seien  $e, e'$  Strecken, so dass die obere Koordinate von  $e$  mit der unteren von  $e'$  und die untere von  $e$  mit der oberen von  $e'$  übereinstimmt, so gibt es keine valide Darstellung mit jeweils einem HT.*

*Beweis.* Seien  $e = (t, b), e' = (t', b'), t = b'$  und  $t' = b$ . Für eine beliebige Platzierung der HTs von  $e, e'$  auf Ebenen  $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$  gilt:

- Falls  $\ell > \ell'$ , so schneidet das obere VT von  $e'$  das untere VT von  $e$ .
- Falls  $\ell' > \ell$ , so schneidet das untere VT von  $e'$  das obere VT von  $e$ .
- Falls  $\ell = \ell'$ , so schneiden sich die HTs.

Jede mögliche Platzierung verletzt also eines der Validitätskriterien 1.1, entsprechend ist eine Darstellung mit einem HT nicht möglich.  $\square$

Wir wissen also, dass die in Abbildung 3.2 dargestellte Konstellation mindestens zwei HTs für die Darstellung einer der beiden Strecken notwendig macht.

Zusätzlich wollen wir jetzt zeigen, dass sich zwei Strecken, welche diese Konstellation nicht aufweisen, mit jeweils genau einem HT darstellen lassen.

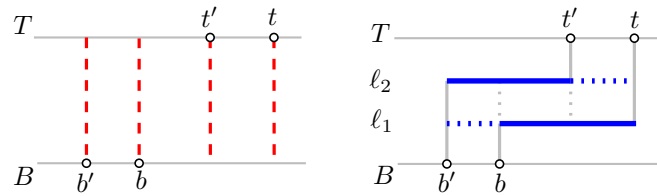
**Lemma 2.** *Falls zwei Strecken  $e, e'$  nicht die in Lemma 1 beschriebene Konstellation aufweisen, lassen sie sich mit jeweils einem HT darstellen.*

*Beweis.* Seien  $e = (b, t)$  und  $e' = (b', t')$ , dann ist mindestens die untere Koordinate einer Strecke ungleich der oberen Koordinate der anderen Strecke, denn sonst wäre die Konstellation wie in Lemma 1.

Gelte nun, dass  $t$  ungleich  $b'$  ist, so kann das untere VT von  $e'$  das obere VT von  $e$  nicht berühren. Wir wollen nun zwei Fälle unterscheiden:

Falls  $t'$  gleich  $b$  ist, so können wir das HT von  $e'$  über dem von  $e$  platzieren. Dadurch berühren sich die HTs nicht, das obere VT von  $e'$  schneidet keinen Teil der Darstellung von  $e$  und das untere VT von  $e$  schneidet keinen Teil der Darstellung von  $e'$ . In diesem Fall ist die entstandene Darstellung also valide.

Falls  $t'$  ungleich  $b$  ist, so wissen wir, dass es zu keiner Berührung zwischen VTs kommen kann. Wenn wir die HTs auf verschiedenen Ebenen anordnen, so wird folglich maximal das Validitätskriterium, das einen Mehrfachschnitt verbietet, verletzt. In diesem Fall schneidet demzufolge ein VT jeder Kante das HT der anderen Kante. Abbildung 3.3 stellt dies schematisch dar. Wir platzieren das HT von  $e$  nun auf der Ebene  $\ell_i$  und



**Abb. 3.3:** Die linke Abbildung zeigt eine Kombination zweier Strecken, bei der alle Koordinaten unterschiedlich sind. Rechts werden beide Platzierungsmöglichkeiten dargestellt. Die valide Darstellung ist hervorgehoben und die ungültige ist angedeutet sichtbar.

das HT von  $e'$  auf der Ebene  $\ell_{i+1}$ . Falls es nun zu einem Mehrfachschnitt kommt, so schneidet also das obere VT von  $e$  das HT von  $e'$  und das untere VT von  $e'$  das HT von  $e$ . Platzieren wir nun das HT von  $e'$  auf der Ebene  $\ell_{i-1}$ , ist dieser Konflikt behoben, denn das HT von  $e'$  wird jetzt von keinem VT mehr geschnitten. Die entstandene Darstellung ist also in beiden Fällen valide.  $\square$

Der in Lemma 1 beschriebene Fall kann nur entstehen, wenn es Strecken  $e, e'$  gibt, bei welchen die untere Koordinate von  $e$  gleich der oberen von  $e'$  und die obere von  $e$  gleich der unteren von  $e'$  ist. Die Voraussetzung für diesen Fall ist somit, dass  $e$  und  $e'$  in entgegengesetzte Richtung laufen.

Wir bezeichnen eine Strecke als *rechtsläufig*, wenn die obere Koordinate der Kante größer als die untere ist. Analog ist eine Strecke *linksläufig*, wenn die obere Koordinate kleiner als die untere ist.

Im Laufe der Arbeit betrachten wir das Problem für Eingabedaten, deren Strecken alle in dieselbe Richtung laufen. Infolgedessen verhindern wir dieses und weitere Probleme, welche mit unterschiedlich orientierten Strecken einhergehen. In einer orthogonalen Darstellung werden die Strecken dann in rechts- und linksläufige unterteilt und anschließend in getrennten Blöcken gezeichnet. Strecken, welche dieselbe untere und obere Koordinate haben, sind hier nicht relevant, denn wir können sie immer mit nur *einem* VT optimal darstellen.

Außerdem wollen wir festlegen, dass jede Koordinate, welche die Position eines Start- oder Endpunkts einer Strecke beschreibt, in keiner Beschreibung einer anderen Strecke auftritt, also in der gesamten Probleminstanz nur einmal vorkommt.

Die Allgemeinheit geht durch diese Beschränkung nicht verloren, denn wie wir in Abschnitt 4.2 sehen werden, lässt sich eine Konstellation, in welcher eine Koordinate in der Beschreibung von zwei Strecken genutzt wird, so anpassen, dass Abhängigkeiten der Strecken unverändert bleiben, die mehrfache Belegung einer Koordinate jedoch verhindert werden kann.

Fortlaufend gilt demgemäß, dass sich jede Strecke einer Probleminstanz mit genau einem HT darstellen lässt. Wir wollen deshalb den Begriff *Darstellung* noch einmal konkretisieren.

**Definition 3.** Sei  $X$  eine Probleminstanz, dann nennen wir die Abbildung  $\sigma : X \rightarrow \mathbb{N}$  eine Darstellung von  $X$ , wenn  $\sigma$  jeder Strecke  $x \in X$  die Ebene zuweist, auf der das zugehörige HT angeordnet wird.

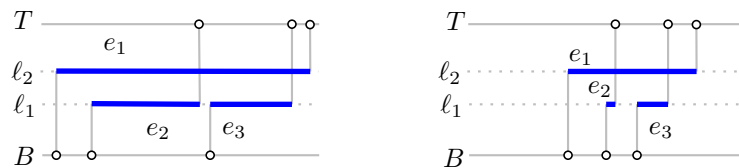
### 3.2 Eigenschaften der Menge möglicher Eingaben

Innerhalb dieses Abschnitts wollen wir eine *Bijektion* zwischen der Menge möglicher Eingaben aus  $n$  rechtsläufigen Strecken und Matchings im vollständigen Graphen  $K_{2n}$ , also eine Funktion, die jedem Matching in  $K_{2n}$  *genau* eine Probleminstanz zuordnet, vorstellen.

Im Abschnitt 3.1 haben wir festgelegt, dass jede Koordinate in der Beschreibung von *maximal* einer Strecke vorkommt. Da für die Beschreibung einer Strecke zwei Koordinaten notwendig sind, werden für eine Probleminstanz mit  $n$  Strecken genau  $2n$  verschiedenen Koordinaten benötigt.

Bisher haben wir eine Probleminstanz mit Blick auf die konkreten Koordinaten betrachtet, die von der Instanz verwendet werden. Entscheidend für die Struktur einer Probleminstanz sind jedoch nicht die konkreten Koordinaten, sondern die Reihenfolge der Start- und Endpunkte der Strecken.

Abbildung 3.4 zeigt eine valide Darstellung für zwei Probleminstanzen, die sich in den konkreten Koordinaten, nicht aber in der Reihenfolge der Start- und Endpunkte unterscheiden.



**Abb. 3.4:** Zwei valide Darstellungen von Probleminstanzen, welche die gleiche Reihenfolge der Start- und Endpunkte, jedoch unterschiedliche Koordinaten haben.

Sortieren wir die Koordinaten, welche die Start- und Endpunkte eine Probleminstanz beschreiben, aufsteigend als  $c_1, \dots, c_{2n}$  und ersetzen jede der Koordinaten  $c_i$  durch  $i$ ,

so entspricht das ausschließlich einer Verschiebung, nicht aber einer Umordnung der Start- und Endpunkte. Eine Lösung dieser Instanz entspricht also einer Lösung der Ursprungsinstanz, in welcher die gleichen Verschiebungen der Start- und Endpunkte vorgenommen wurden.

Daraus folgt, dass die Start- und Endpunkte jeder Problem Instanz so verschoben werden können, dass ausschließlich die Koordinaten  $\{1, \dots, 2n\}$  verwendet werden. Eine solche Problem Instanz nennen wir auch *normiert*. Weiterhin ist  $\mathcal{X}_n$  die Menge aller normierter Problem Instanzen mit genau  $n$  Strecken. Jede Problem Instanz entspricht also einer verschobenen Variante einer der normierten Problem Instanzen aus  $\mathcal{X}_n$ .

Wir wollen die Koordinaten solcher Instanzen  $X \in \mathcal{X}_n$  als Knoten in einem Graphen  $G_X$  auffassen. Eine Strecke  $e = (t, b)$  lässt sich folglich durch die Knoten  $t$  und  $b$  sowie eine Kante zwischen diesen Knoten im Graphen  $G_X$  beschreiben.

Da wir rechtsläufige Strecken betrachten, lässt sich eine Strecke so eindeutig definieren, denn wir wissen, dass die obere Koordinate größer als die untere ist, die Zuordnung ist also eindeutig.

Die Kantenmenge  $E(G_X)$  besteht demzufolge aus genau  $n$  Kanten, so dass kein Paar von Kanten in  $E$  adjazent ist. Da zusätzlich  $2|E(G_X)| = 2n = |V|$  gilt, ist  $E(G_X)$  ein *perfektes Matching* in  $G_X$ .

Wir wollen nun zeigen, dass es einen Graphen  $G'$  gibt, in welchem für jede Problem Instanz  $X \in \mathcal{X}_n$  gilt:

$$E(G_X) \text{ ist ein perfektes Matching in } G'.$$

Für diesen Graphen  $G'$  muss demgemäß gelten:

$$V(G_X) = V(G') \text{ und } E(G_X) \subseteq E(G').$$

Daraus folgt für die Kantenmenge von  $G'$ :

$$E(G') = \bigcup_{X \in \mathcal{X}_n} E(G_X).$$

Die Kantenmenge  $E(G')$  stellt also alle möglichen Kanten zwischen den Knoten  $V(G')$  dar, demnach gilt:

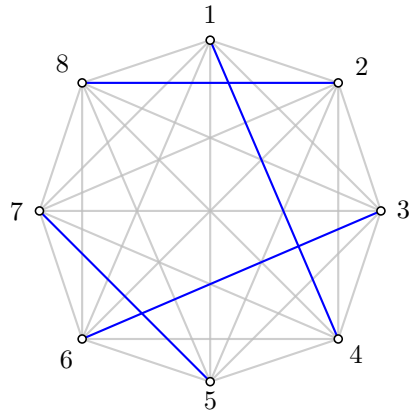
$$E(G') = \binom{V(G')}{2} = \{\{u, v\} \subset V(G') \mid u \neq v\}.$$

Der vollständige Graph  $K_{2n}$  zu der Knotenmenge  $V(G_X)$  hat *genau* diese Kantenmenge. Außerdem gilt für jede Problem Instanz  $X \in \mathcal{X}_n$ :

$$V(G_X) = V(K_{2n}) \text{ und } E(G_X) \subset E(K_{2n}).$$

Die Kanten  $E(G_X)$  sind infolgedessen ein perfektes Matching in  $K_{2n}$ .

Die Abbildung 3.5 stellt ein solches perfektes Matching grafisch dar. Jede normierte Problem Instanz  $X \in \mathcal{X}_n$  lässt sich also durch *genau* ein perfektes Matching in  $K_{2n}$



**Abb. 3.5:** Die durch  $((1, 4), (2, 8), (3, 6), (5, 7))$  festgelegte Problem Instanz als perfektes Matching im  $K_8$ .

beschreiben. Diese Zuordnung ist eindeutig, denn falls zwei verschiedene normierte Problem Instanzen das gleiche Matching hätten, wären alle Strecken der beiden Instanzen gleich. Folglich könnten die Instanzen nicht unterschiedlich sein.

Das beschriebene Verfahren liefert also eine Bijektion zwischen genau einer normierten Problem Instanz und einem perfektem Matching in  $K_{2n}$ .

Dadurch lässt sich die Anzahl verschiedener Eingaben fester Länge genau angeben.

Ein perfektes Matching in  $K_{2n}$  lässt sich als Partitionierung der Knoten in  $n$  Mengen  $M_1, \dots, M_n$ , die jeweils zwei Knoten beinhalten, auffassen. Wir gehen nun davon aus, dass wir diese Mengen nacheinander erzeugen, indem wir in jedem Schritt das kleinste Element wählen, welches noch nicht gematcht ist, und dieses mit einem der verbleibenden Elemente matchen. Um  $M_i$  zu erzeugen, wählen wir also das kleinste der verbleibenden  $2n - 2 \cdot (i - 1)$  Elemente. Für das zweite Element von  $M_i$  – somit auch insgesamt für  $M_i$  – haben wir nun

$$2n - 2(i - 1) - 1 = 2(n - i + 1) - 1$$

verschiedene Auswahlmöglichkeiten. Zusammengefasst gibt es dementsprechend insgesamt

$$\prod_{i=1}^n (2(n - i + 1) - 1) = \prod_{i=1}^n (2i - 1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$$

verschiedene Matchings. Dies lässt sich mithilfe der *Doppelfakultät* schlanker ausdrücken, diese ist durch

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n - 2) \cdot (n - 4) \cdot \dots \cdot 2, & \text{für } n \text{ gerade und } n > 0 \\ n \cdot (n - 2) \cdot (n - 4) \cdot \dots \cdot 1, & \text{für } n \text{ ungerade und } n > 0 \\ 1, & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

definiert<sup>1</sup>. Die Folge

$$a(n) := (2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$$

<sup>1</sup>Weisstein, Eric W. "Double Factorial." From MathWorld—A Wolfram Web Resource.

wird auch Doppelfakultät ungerader Zahlen genannt und ist eine bekannte Zahlenfolge, welche in vielen kombinatorischen Fragestellungen auftritt<sup>2</sup>. Die folgende Tabelle veranschaulicht das Wachstum dieser Folge, also auch das der Anzahl verschiedener normierter Eingaben.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a(n)$	1	3	15	105	945	10395	135135	2027025	34459425	654729075

---

<sup>2</sup>The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <https://oeis.org/A001147>



## 4 Problemabstraktion

Wir haben bereits gesehen, dass es Darstellungen gibt, welche die Validitätskriterien verletzen. In diesem Abschnitt soll deshalb ein Modell entwickelt werden, welches uns ermöglicht, ausschließlich valide Darstellungen für eine Prombleminstanz zu erzeugen. Wird die Orthogonaldarstellung einer Strecke festgelegt, kann das die Möglichkeiten, eine andere Strecke gemäß der Validitätskriterien darzustellen, einschränken. In so einem Fall sprechen wir von einem Konflikt der beiden Strecken.

Aus den Validitätskriterien lässt sich eine konkrete Richtlinie ableiten, mit deren Hilfe wir Konflikte zwischen beliebigen Strecken einer Instanz feststellen können. Diese Konflikte bilden die Grundlage für einen Konfliktgraphen, der eine Strecke als Knoten und einen Konflikt als Kante zwischen den beiden Knoten – die jeweils Strecken repräsentieren – darstellt.

Wir werden einige Eigenschaften dieses Konfliktgraphen evaluieren, anhand derer wir das zu lösende Problem auf andere bekannte Probleme der Graphentheorie, wie beispielsweise das Färbeproblem, zurückführen können.

### 4.1 Die Eingabedaten als Intervallmodell

Eine Strecke wurde bisher als Gerade zwischen zwei Punkten betrachtet.

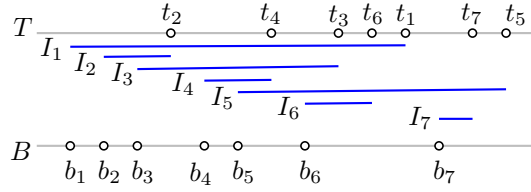
Da die Orthogonaldarstellung einer Strecke eindeutig durch ein HT festgelegt ist, wollen wir nun die Beziehung zwischen den HTs verschiedener Strecken genauer betrachten.

Für die Strecke  $e = (t, b)$  definiert  $I = [\min\{t, b\}, \max\{t, b\}]$  ein Intervall in  $x$ -Dimension, das jede Darstellung der Kante  $e$  durchläuft. Das Intervall  $I$  entspricht also genau dem horizontalen Abschnitt, der von dem HT von  $e$  durchlaufen werden muss. Würde das HT dieses Intervall nicht durchlaufen, so kann zumindest eines der beiden VTs nicht komplett vertikal verlaufen, anderenfalls gäbe es einen Sprung in der Darstellung.

Betrachten wir nun jede Strecke  $e_i$  der ursprünglichen Eingabedaten als Intervall  $I_i \in \mathcal{I}$ , so erhalten wir ein *Intervallmodell*, also eine Menge  $\mathcal{I}$ , die verschiedene Intervalle enthält. Abbildung 4.1 zeigt die Eingabedaten aus Abbildung 1.2 ähnlich dargestellt als Intervallmodell.

Laut dem Kriterium (V4) dürfen sich HTs niemals berühren. Wenden wir diese Anforderung auf unser Intervallmodell an, so wird deutlich, dass die HTs zweier Strecken, deren Intervalle eine nicht leere Schnittmenge haben, nicht auf derselben Ebene platziert werden dürfen, denn sonst würden sich die beiden HTs in mindestens einem Punkt berühren.

Betrachten wir nun Strecken  $e, e'$ , deren Intervalle  $I, I'$  einen nicht leeren Schnitt haben, dann kann, wenn noch keine der Platzierungen einer anderen Strecke festgelegt ist,



**Abb. 4.1:** Die Darstellung der Eingabedaten als Intervallmodell hebt die Platzierung des HTs der verschiedenen Kanten hervor.

das HT von einer der beiden Strecken auf beliebigen Ebenen angeordnet werden. Legen wir aber eine konkrete Ebenenzuordnung des HTs von  $e$  fest, kann das HT von  $e'$  nicht mehr auf dieser Ebene angeordnet werden, denn sonst würden sich die HTs berühren. Eine Platzierung des HTs von  $e$  schränkt demzufolge die Platzierungsmöglichkeiten des HTs von  $e'$  ein.

In so einem Fall sind die Darstellungen von  $e$  und  $e'$  *voneinander abhängig*, fortlaufend bezeichnen wir eine solche Abhängigkeit als *Konflikt*.

**Definition 4.** *Schränkt die Platzierung des HTs einer Strecke  $e$  die Platzierungsmöglichkeiten des HTs einer Strecke  $e'$  ein, so sind  $e$  und  $e'$  in Konflikt.*

Wir haben diese Eigenschaft zuvor anhand einer nicht leeren Schnittmenge der Intervalle von zwei Strecken beschrieben. Daraus folgt das nächste Lemma.

**Lemma 5.** *Ist die Schnittmenge der Intervalle von zwei Strecken  $e, e'$  nicht leer, so stehen  $e$  und  $e'$  in Konflikt.*

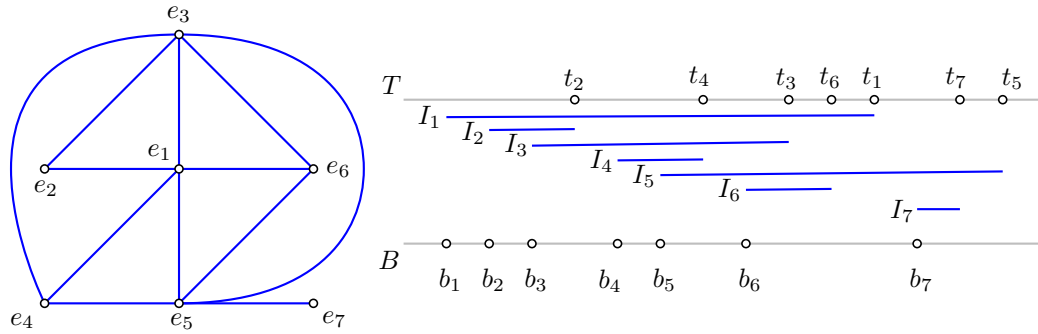
Wir können diese gegenseitigen Abhängigkeiten der Strecken innerhalb unserer Eingabedaten als Graph darstellen. Innerhalb dieses Graphen repräsentiert ein Knoten eine Strecke samt deren Intervall und eine Kante einen Konflikt zwischen den beteiligten Knoten, die jeweils Strecken sind.

Ein solcher ungerichteter Graph  $G = (\mathcal{I}, E)$ , der Schnittmengen zwischen verschiedenen Intervallen  $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_n\}$  durch Kanten darstellt, wird *Intervallgraph* genannt. In einem Intervallgraphen sind zwei Knoten genau dann benachbart, wenn die Schnittmenge der Intervalle, die durch die Knoten repräsentiert werden, nicht leer ist, also gilt[KN09]:

$$E = \{(I_i, I_j) : I_i \neq I_j \wedge I_i \cap I_j \neq \emptyset\}.$$

Abbildung 4.2 visualisiert das in Abbildung 4.1 dargestellte Intervallmodell als einen solchen Intervallgraphen.

Betrachten wir einen solchen Intervallgraphen  $G$  zu einer Problem Instanz, fällt auf, dass alle Knoten einer Clique von  $G$  untereinander in Konflikt stehen. Um eine Menge mehrerer Strecken darzustellen, deren Knoten eine Clique  $C \subseteq V(G)$  bilden, werden also mindestens  $|C|$  Ebenen benötigt.



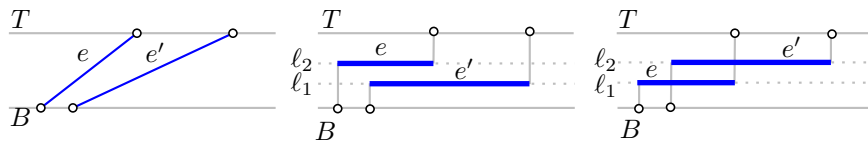
**Abb. 4.2:** In einem Intervallgraphen sind zwei Knoten genau dann benachbart, wenn die Schnittmenge der durch die Knoten repräsentierten Intervalle nicht leer ist.

## 4.2 Konflikte in der Darstellung verschiedener Kanten

Betrachten wir eine Kante des Intervallgraphen zu einer Problem Instanz, so wissen wir, dass die HTs der beiden Strecken auf verschiedenen Ebenen angeordnet werden müssen. Abbildung 4.3 zeigt zu einer Problem Instanz zwei mögliche Darstellungen, welche die Konflikte, die durch den Intervallgraph ausgedrückt werden, beachten.

Trotzdem verletzt die rechte Darstellung das Validitätskriterium **(V5)**, denn die Darstellungen der Strecken  $e$  und  $e'$  schneiden sich mehr als einmal.

Es gibt folglich noch zusätzliche Einschränkungen bezüglich der Platzierung der HTs, die der Intervallgraph nicht abbildet.



**Abb. 4.3:** Beide Darstellungen der links abgebildeten Problem Instanz setzen die im Abschnitt 4.1 erarbeitete Platzierungseinschränkung um. Jedoch ist nur die linke der beiden Darstellung valide.

Wir werden nun eine Richtlinie entwickeln, die es uns erlaubt, alle Konflikte zweier Strecken festzustellen und als Abhängigkeit auszudrücken.

Aus den Validitätskriterien in Abschnitt 1.1 lassen sich die zu verhindernden Konflikte ableiten. Davon beschreiben **(V1)** und **(V2)** grundsätzliche Anforderungen an die Darstellung, die keine Aussagen über mögliche Konflikte zwischen Strecken beschreiben. Die durch **(V3)** beschriebene Regel, dass sich VTs nicht gegenseitig schneiden dürfen, wird bereits durch die Einschränkung der Eingabedaten – genauer dadurch, dass Koordinaten in der Beschreibung maximal einer Strecke vorkommen – erfüllt, denn jedes VT verläuft dadurch entlang einer Koordinate, welche von keinem anderen VT belegt wird. Die grundlegende Konflikteigenschaft **(V4)**, die verhindert, dass sich HTs gegenseitig schneiden, haben wir bereits durch die Konstruktion des Intervallgraphen abgebildet. Zur Entwicklung der Richtlinie fehlt also nur noch das letzte Kriterium **(V5)**, welches

sich auf Mehrfachsnitte bezieht.

Um die Konstellation, die zu einem Mehrfachschnitt führt, genauer zu charakterisieren, betrachten wir noch einmal Abbildung 4.3.

Betrachten wird die Intervalle  $I, I'$ , die durch das HT von  $e$  und  $e'$  festgelegt werden, so ist sichtbar, dass ein Teil des Intervalls  $I$  nicht in dem Intervall  $I'$  liegt, ein Teil von  $I'$  nicht in  $I$  liegt, die Schnittmenge der beiden Intervalle aber trotzdem nicht leer ist. Wir zeigen nun, dass genau diese Konstellation einen Mehrfachschnitt ermöglicht.

**Lemma 6.** *Seien  $e = (t, b), e' = (t', b')$  Strecken und  $I, I'$  die zugehörigen Intervalle. Ist der Schnitt  $I \cap I'$ , sowie  $I \setminus I'$  und  $I' \setminus I$  nicht leer, so kann es in der Darstellung zu einem Mehrfachschnitt kommen.*

*Beweis.* Angenommen, es gibt eine Konstellation, die einen Mehrfachschnitt ermöglicht und nicht so, wie in Lemma 6 behauptet ist, dann sind  $e$  und  $e'$  in Konflikt, denn sonst kann es zu keinem Schnitt kommen, es gilt folglich:

$$I \cap I' \text{ ist nicht leer.}$$

Sei weiterhin  $b > b'$  – das beschränkt die Allgemeinheit nicht, denn eine der beiden unteren Koordinaten muss größer als die andere sein –, so gilt:

$$I' \setminus I \text{ ist nicht leer.}$$

Bereits zwei Bedingungen der Behauptung sind demzufolge erfüllt, daraus folgt, dass  $I$  komplett im Intervall  $I'$  liegen muss, denn sonst würde zusätzlich gelten:

$$I \setminus I' \text{ ist nicht leer.}$$

Entsprechend wäre die Konstellation wie in Lemma 6 ein Widerspruch zur Annahme.

Das HT von  $e$  kann also kein VT von  $e'$  berühren. Da das bei einem Mehrfachschnitt jedoch notwendig ist, folgt daraus ein Widerspruch.  $\square$

Ist zwischen rechtsläufigen Strecken  $e, e'$  ein Mehrfachschnitt möglich, muss das HT der Strecke mit der kleineren unteren Koordinate über dem der anderen Strecke platziert werden (in Abbildung 4.3 erkennbar). Bei linksläufigen Strecken ist diese Regel genau umgekehrt. Fortlaufend beschreibt

$$e > e'$$

eine Konstellation, in welcher das HT von  $e$  über dem von  $e'$  angeordnet werden muss. Wir können diese Beziehung als Relation  $\sim$  auf die Knotenmenge von  $K$  auffassen. Gilt nun  $e > e'$  oder  $e < e'$ , so sagen wir fortlaufend:

$$e \sim e'.$$

Diese Ausdrucksweise unterscheidet nicht, welches der beiden HTs weiter oben angeordnet werden muss, sondern bezieht sich nur darauf, dass zwischen den beiden Strecken eine solche Abhängigkeit besteht. In Fällen, in denen die konkrete Ausprägung der Relation wichtig ist oder gleich bleiben muss, erwähnen wir dies explizit.

Eine ähnliche Notation wollen wir für Strecken  $e, e'$  einführen, die in Konflikt stehen, ohne dass  $e \sim e'$  gilt. In so einem Fall liegt offensichtlich entweder das Intervall von  $e$  komplett in dem von  $e'$  und wir sagen  $e$  liegt in  $e'$ , oder das von  $e'$  in dem von  $e$  und wir sagen  $e'$  liegt in  $e$ . Außerdem sagen wir  $e \neq e'$  falls die Start- und Endpunkte der beiden Strecken verschieden sind.

Da der Mehrfachschnitt das einzige noch nicht ausgedrückte Kriterium war, haben wir nun eine Richtlinie für das Auffinden aller Konflikte, die ein Validitätskriterium verletzen können, erstellt.

Der Algorithmus 1 beschreibt, wie diese Konflikte festgestellt werden können. Die Methoden *top*, *bottom* und *intervall* bestimmen dabei die Koordinaten auf den Basisgeraden  $T$  und  $B$  sowie das durch die beiden Koordinaten definierte Intervall. Dazu werden die Bedingungen für die verschiedenen Konflikte – wie beschrieben – zwischen allen Knotenpaare überprüft und eingetragen. Die Laufzeit beträgt  $\mathcal{O}(n^2)$ , wobei  $n$  die Streckenanzahl einer Problem Instanz ist.

---

**Algorithmus 1:** KonflikteErstellen(Problem Instanz  $X$ )

---

**Eingabe:** Problem Instanz  $X$

**Ausgabe:** Matrix, welche jedem Knoten die Konflikte zu anderen Knoten zuweist.

```

1 constraints  $\leftarrow n \times n$  Matrix
2  $i \leftarrow 1$ 
3 while  $i \leq |X|$  do
4    $e \leftarrow X[i]$ 
5    $j \leftarrow i + 1$ 
6   while  $j \leq |X|$  do
7      $e' \leftarrow X[j]$ 
8     if  $\text{intervall}(e) \cap \text{intervall}(e') \neq \emptyset$  then
9       if  $\text{bottom}(e) \leq \text{bottom}(e')$  und  $\text{top}(e) \leq \text{top}(e')$  then
10         $\text{cons} \leftarrow \text{ABOVE}$ 
11       else if  $\text{bottom}(e) \geq \text{bottom}(e')$  und  $\text{top}(e) \geq \text{top}(e')$  then
12         $\text{cons} \leftarrow \text{BELOW}$ 
13       else
14         $\text{cons} \leftarrow \text{ABOVE\_OR\_BELOW}$ 
15
16         $\text{constraints}[i][j] \leftarrow \text{cons}$ 
17         $\text{constraints}[j][i] \leftarrow \text{cons}^{-1}$ 
18      $j++$ 
19    $i++$ 
20 return constraints

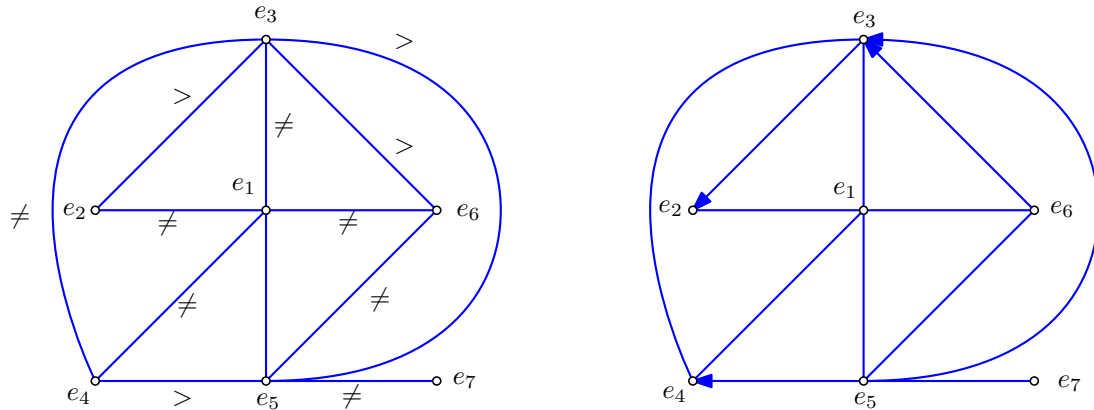
```

---

### 4.3 Konfliktgraph

In diesem Kapitel werden wir den Intervallgraphen  $G$ , mithilfe der durch Algorithmus 1 bestimmten Konflikte so erweitern, dass Kanten die individuellen Abhängigkeiten zwischen Strecken, also auch die Relation  $\sim$ , darstellen.

Wir haben zwei Möglichkeiten betrachtet, diese zusätzlichen Informationen in  $G$  zu integrieren, zuerst, Informationen bezüglich  $\sim$  als Kantenbeschriftung hinzuzufügen, und zuletzt, als Kantenorientierung darzustellen. Die Abbildung 4.4 zeigt beide Möglichkeiten. Es hat sich gezeigt, dass die Betrachtung des Konfliktgraphen mit gerichteten



**Abb. 4.4:** Die Abbildung zeigt den in Abbildung 4.2 dargestellten Konfliktgraphen und dessen Konflikte. Diese lassen sich durch die Kanten des Konfliktgraphen darstellen. Während die linke Abbildung beschriftete Kanten nutzt, stellt die rechte Abbildung die  $\sim$  Relation durch gerichtete Kanten dar.

Kanten vorteilhafter ist. Das liegt einerseits an der besseren Lesbarkeit, andererseits daran, dass, sobald  $K$  aus der Perspektive eines Lösungsalgorithmus betrachtet wird, diese Form der Darstellung eine gute Übertragbarkeit auf andere bekannte Probleme zulässt.

**Definition 7.** Für einen Intervallgraphen  $G$  einer Problem Instanz bezeichnen wir den Graphen  $K$  mit der Knotenmenge  $V(G)$ , der sowohl gerichtete als auch ungerichtete Kanten enthält, als Konfliktgraphen genau dann, wenn für alle Paare verschiedener Knoten  $u, v \in V(G)$  gilt:

$$(u, v) \in E(K) \text{ genau dann, wenn } u < v \text{ gilt.}$$

$$\{u, v\} \in E(K) \text{ genau dann, wenn } u \neq v \text{ gilt.}$$

Wir zeigen nun einige grundsätzliche Eigenschaften bezüglich der Struktur von  $K$ , die später noch nützlich sein werden.

**Lemma 8.** Es existiert kein induzierter Pfad, der aus mindestens vier Knoten und ausschließlich ungerichteten Kanten besteht.

*Beweis.* Sei  $(a, b, c)$  ein induzierter, ungerichteter Pfad. Würde  $b$  in  $a$  liegen, so könnte  $b$  nicht mit  $c$  in Konflikt stehen, ohne dass  $a$  mit  $c$  in Konflikt steht,  $a$  muss also in  $b$  liegen. Daraus folgt, dass  $c$  in  $b$  liegen muss, denn sonst wäre die Schnittmenge der Intervalle von  $a$  und  $c$  nicht leer und es existiert eine Kante  $(a, c)$ .

Wollen wir nun  $(a, b, c)$  zu  $(a, b, c, d)$  erweitern, gilt entweder:

- $c$  in  $d$ , und da  $c$  in  $b$  liegt, folgt, dass die Schnittmenge der Intervalle von  $b$  und  $d$  nicht leer ist.
- $d$  in  $c$ , und da  $c$  in  $b$  liegt, folgt, dass die Schnittmenge der Intervalle von  $b$  und  $d$  nicht leer ist.

Aus beiden Fällen folgt, dass  $b$  und  $d$  in Konflikt stehen und es eine zusätzliche Kante zwischen  $b$  und  $d$  gibt. Der Pfad kann demnach nicht induziert sein, was ein Widerspruch zur Behauptung ist.  $\square$

**Lemma 9.** *Es existiert kein induzierter Pfad  $(a, b, c, d)$ , der aus mindestens vier Knoten besteht und zwei aufeinanderfolgende ungerichtete Kanten enthält.*

*Beweis.* Sei  $(a, b, c)$  der gleiche Pfad wie im vorherigen Beweis, so dass  $c$  und  $a$  jeweils in  $b$  liegen. Wollen wir nun  $(a, b, c)$  zu einem induzierten Pfad der Länge 3 erweitern, so gilt entweder:

- Falls  $(u, a, b, c)$ , so muss  $u$  mit  $b$  in Konflikt stehen, denn  $a$  liegt in  $b$ .
- Falls  $(a, b, c, u)$ , so muss  $u$  mit  $b$  in Konflikt stehen, denn  $a$  liegt in  $b$ .

Es gibt also in jedem Fall eine Kante zwischen  $b$  und  $u$ , der Pfad kann also nicht induziert sein, was zu einem Widerspruch führt.  $\square$

Der Konfliktgraph ist strukturell noch ein Intervallgraph und unterscheidet sich von diesem ausschließlich durch die Existenz gerichteter Kanten. Da jeder Intervallgraph chordal ist, gehört auch der Konfliktgraph zur Klasse der chordalen Graphen [GH64]. In chordalen Graphen lässt sich die Berechnung von Parametern wie der Cliquenzahl und der chromatischen Zahl, die für beliebige Graphen NP-schwer sind, in Linearzeit durchführen [Hou06].

## 4.4 Transitivität des Konfliktgraphen

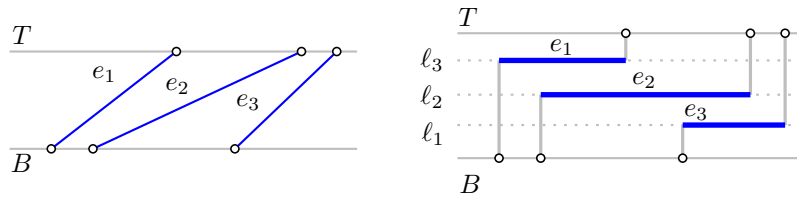
In Abschnitt 4.1 haben wir beschrieben, dass für die Darstellung einer Menge mehrerer Strecken, deren Knoten im Intervallgraph eine Clique  $C$  bilden, mindestens  $|C|$  Ebenen benötigt werden. Wir haben eine Clique also als Knotenmenge, bei der die HTs der zugehörigen Strecken auf verschiedenen Ebenen angeordnet werden müssen, betrachtet. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass nicht jede Knotenmenge mit dieser Eigenschaft im Konfliktgraphen eine Clique bildet.

Wir wollen den Konfliktgraphen in diesem Abschnitt so erweitern, dass die Knoten von Strecken, deren HTs alle auf unterschiedlichen Ebenen angeordnet werden müssen, eine Clique bilden.

Betrachten wir die in Abbildung 4.5 schematisch dargestellte Probleminstanz, so gilt:

$$e_1 > e_2 \text{ und } e_2 > e_3.$$

Die Knoten  $e_1, e_2$ , sowie  $e_2, e_3$  sind also offensichtlich in  $K$  benachbart. Da die Schnittmenge der Intervalle von  $e_1$  und  $e_3$  leer ist, lässt sich aus den Eingabedaten mit unseren aktuellen Methoden kein direkter Konflikt ableiten. Die beiden Knoten sind folglich nicht in  $K$  benachbart und obwohl für die Darstellung drei Ebenen notwendig sind, befinden sich die zugehörigen Knoten nicht in einer Clique der Größe 3. Wir werden nun zeigen,



**Abb. 4.5:** Eine Probleminstanz mit den Konflikten  $e_1 > e_2$  und  $e_2 > e_3$  und ihre optimale Darstellung.

dass die Relation  $\sim$  transitiv ist und dass dementsprechend eine Platzierung des HTs von  $e_1$  die Platzierungsmöglichkeiten des HTs von  $e_3$  einschränkt.

Eine Relation  $R \subseteq M \times M$  heißt *transitiv*, wenn gilt:

$$\forall a, b, c \in M : a \sim b \wedge b \sim c \implies a \sim c.$$

**Lemma 10.** *Die Relation  $\sim$  auf die Knotenmenge des Konfliktgraphen ist transitiv.*

*Beweis.* Seien  $e_1, e_2, e_3$  Strecken und gelte:

$$e_1 < e_2 \text{ und } e_2 < e_3.$$

In jeder gültigen Darstellung von  $K$  werden also  $e_1, e_2, e_3$  auf Ebenen  $g_1, g_2, g_3$  platziert, so dass  $g_1 < g_2$  und  $g_2 < g_3$  gilt und infolgedessen auch  $g_1 < g_2 < g_3$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Es existieren demzufolge Konflikte zwischen den Knoten in  $K$ , die nicht durch  $K$  abgebildet werden.

Innerhalb eines gerichteten Pfades  $p = (v_1, \dots, v_k)$  gilt für ein festes  $\sim$ :

$$\forall i \in \{1, \dots, k-1\} : v_i \sim v_{i+1}.$$

Daraus folgt:

$$j \in \mathbb{N}, \forall i \in \{j+1, \dots, k\} : v_j \sim v_i.$$



Knoten  $u$  und  $v$  stehen infolgedessen genau dann in Relation  $u \sim v$ , falls es einen gerichteten Pfad zwischen den beiden Knoten gibt. Falls  $u$  der Startknoten und  $v$  der Endknoten ist, gilt  $u < v$ , analog gilt  $u > v$  genau dann, wenn  $v$  der Startknoten und  $u$  der Endknoten ist.

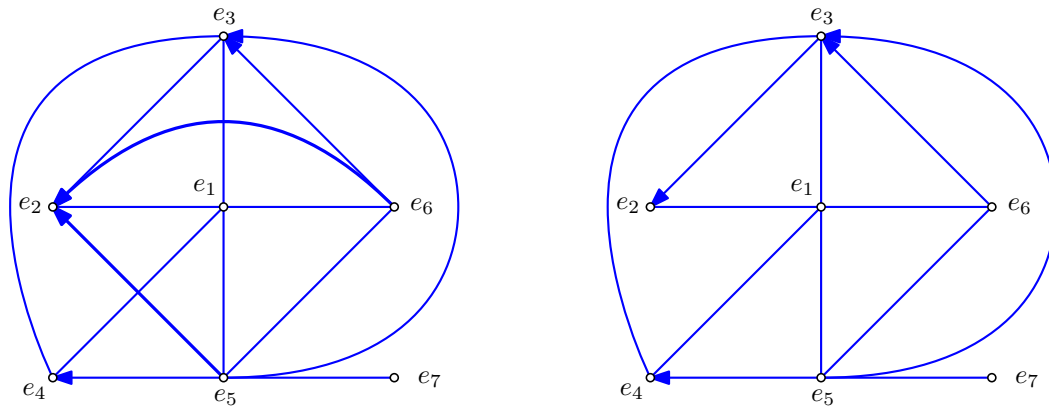
Wir erweitern nun die Kantenmenge von  $K$ , um auch transitive Konflikte ausdrücken zu können, und bezeichnen den entstehenden *erweiterten Konfliktgraphen* im Folgenden als  $K^+$ .

**Definition 11.** Zu einem Konfliktgraphen  $K$  nennen wir den Graphen  $K^+$  zu der Knotenmenge  $V(K)$  den erweiterten Konfliktgraph, wenn für alle Paare verschiedener Knoten  $u, v \in V(K)$  gilt:

$(u, v) \in E(K^+)$  genau dann, wenn ein gerichteter Pfad  $(u, \dots, v)$  existiert.

$\{u, v\} \in E(K^+)$  genau dann, wenn  $\{u, v\} \in E(K)$  ist.

Abbildung 4.6 zeigt den erweiterten Konfliktgraphen des aus Abbildung 4.4 bekannten Konfliktgraphen.



**Abb. 4.6:** Die linke Abbildung zeigt den erweiterten Konfliktgraphen, welcher aus dem rechts abgebildeten Konfliktgraphen entstanden ist. Transitive Kanten wurden hervorgehoben.

$K^+$  lässt sich aus  $K$  erzeugen, indem zuerst eine *topologische Sortierung*  $S$  des Graphen  $K$  bestimmt wird. Eine topologische Sortierung ist eine Sortierung der Knoten eines gerichteten Graphen, sodass, falls eine gerichtete Kante von  $u$  nach  $v$  existiert,  $u$  in der Sortierung vor  $v$  kommt. Anschließend durchlaufen wir für  $i = 1, \dots, |V(K)|$  die Knoten in der durch  $S$  definierten Reihenfolge und fügen für jeden Knoten  $u$ , von dem ein gerichteter Pfad zu  $S[i]$  existiert, eine Kante  $(u, S[i])$  zu  $K^+$  hinzu. Dabei müssen wir jedoch nur Pfade der Länge 2 betrachten, denn für alle Knoten, die eine gerichtete Kante mit  $S[i]$  als Endknoten haben, wurden die transitiven Kanten bereits hinzugefügt. Diesen Prozess bezeichnen wir auch als *transitive Vervollständigung*. Algorithmus 2 beschreibt diesen Prozess.

---

**Algorithmus 2:** Erweiterten Konfliktgraphen erstellen(Konfliktgraph  $K$ )

---

**Eingabe:** Konfliktgraph  $K$   
**Ausgabe:** Erweiterter Konfliktgraph

```
1  $S \leftarrow \text{TopologischeSortierung}(V(K))$ 
2  $K^+ \leftarrow K$ 
3 for  $i \leftarrow 1$  to  $|V(K)|$  do
4    $v \leftarrow S[i]$ 
5   foreach  $(u, v) \in \text{EingehendeKanten}(v)$  do
6     foreach  $(v', u) \in \text{EingehendeKanten}(u)$  do
7        $E(K^+) \leftarrow E(K^+) \cup \{(v', v)\}$ 
8 return  $K^+$ 
```

---

Durch die Erweiterung erhalten wir nun eine erste aussagekräftige untere Schranke für die Ebenenanzahl, die für eine optimale Darstellung notwendig ist. Als Resultat der transitiven Vervollständigung ist nun auch jeder gerichtete Pfad in  $K$  eine Clique in  $K^+$ . Für die Darstellung einer Clique  $C \subseteq V(K^+)$  sind also mindestens  $|C|$  Knoten notwendig. Daraus können wir ableiten, dass für eine optimale Darstellung einer Probleminstanz mindestens  $\omega(K^+)$  Ebenen notwendig sind.

Wir wissen, dass eine Darstellung, jeder Strecke die Ebene auf der das zugehörige HT angeordnet werden soll, zuordnet. Übertragen wir das auf den erweiterten Konfliktgraphen, so folgt, dass jede valide Darstellung auch eine Färbung des erweiterten Konfliktgraphen ist.

**Lemma 12.** *Eine valide Darstellung  $\sigma$  induziert eine Färbung auf  $K^+$ .*

*Beweis.* Da  $\sigma$  eine valide Darstellung ist, gilt für jedes Paar adjazenter Knoten  $u, v \in V(K^+)$ :

$$\sigma(u) \neq \sigma(v).$$

Dies entspricht genau der Definition einer Färbung. □

Da eine Darstellung auf  $k$  Ebenen eine  $k$ -Färbung induziert, folgt, dass die chromatische Zahl des erweiterten Konfliktgraphen eine untere Schranke für die Anzahl nötiger Ebenen ausdrückt.

**Lemma 13.** *Für die optimale Darstellung einer Probleminstanz sind mindestens  $\chi(K^+)$  Ebenen notwendig.*

Betrachten wir nun einen erweiterten Konfliktgraphen, der ausschließlich ungerichtete Kanten hat, so folgt, dass *jede gültige Färbung* eine valide Darstellung ist. Für einen solchen Konfliktgraphen kann eine optimale Darstellung folglich bereits durch eine gewöhnliche minimale Färbung bestimmt werden. Entsprechend lässt sich für diesen Fall die Anzahl benötigter Ebenen genau angeben.

**Lemma 14.** *Enthält  $K^+$  ausschließlich ungerichtete Kanten, so verwendet eine optimale Darstellung genau  $\chi(K^+)$  Ebenen.*

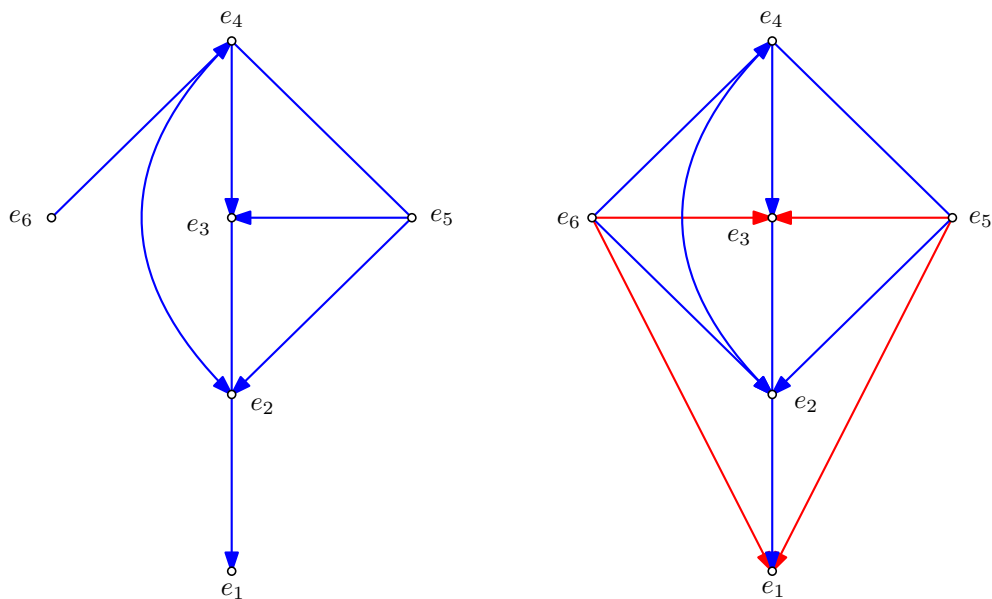
Nun stellt sich die Frage, inwiefern dasselbe für Konfliktgraphen mit gerichteten Kanten gilt, und ob eine minimale Färbung des erweiterten Konfliktgraphen überhaupt effizient bestimmt werden kann.

## 4.5 Eigenschaften des erweiterten Konfliktgraphen

Wir haben im vorherigen Abschnitt den Zusammenhang zwischen der chromatischen Zahl des erweiterten Konfliktgraphen und der Ebenenanzahl, die für eine optimale Darstellung notwendig ist, vorgestellt.

Grundsätzlich ist die Bestimmung von Parametern wie der chromatischen Zahl, der Cliquenzahl oder von unabhängigen Mengen NP-schwer und dementsprechend nicht effizient berechenbar [KN09]. Der Konfliktgraph  $K$  ist chordal, gehört also zu einer Klasse von Graphen, für welche die genannten Parameter effizient bestimmt werden können. Anhand des in Abbildung 4.7 dargestellten Gegenbeispiels sehen wir, dass diese Eigenschaft durch die transitive Vervollständigung verloren geht. Diese Parameter sind somit nur hilfreich, falls sie effizient bestimmt werden können.

Wir wollen nun zeigen, dass  $K^+$  zur Klasse der perfekten Graphen – die oben genannten sowie einige weitere Parameter lassen sich für diese Graphen in Polynomialzeit bestimmen – gehört [Hou06].



**Abb. 4.7:** Der linke Graph zeigt den Konfliktgraphen der Eingabedaten  $((2, 0), (7, 1), (6, 3), (10, 4), (8, 5), (11, 9))$ . Der rechte Graph ist der zugehörige transitive vervollständigte erweiterte Konfliktgraph  $K^+$ . Farblich hervorgehoben ist ein induzierter Kreis der Länge 4, der einen Widerspruch zur Chordalität darstellt.

Um zu zeigen, dass  $K^+$  perfekt ist, werden wir zuerst zeigen, dass kein induzierter Teilgraph von  $K^+$  sowie  $\overline{K^+}$  ein ungerades Loch ist. Ein Kreis ist genau dann ein induzierter Teilgraph eines Graphen, wenn der Kreis induziert ist. Dementsprechend reicht es zu zeigen, dass weder  $K^+$ , noch  $\overline{K^+}$  einen induzierten Kreis ungerader Länge von mindestens 5 besitzt.

In gerichteten Graphen beschreibt ein Kreis normalerweise einen *gerichteten Kreis*, also einen Kreis, in dem auch die Richtung der Kanten einen Kreis bildet. Die Eigenschaft, dass ein Graph perfekt ist, ist aber unabhängig davon, ob Kanten orientiert sind oder nicht. Wir wollen deshalb auch Kreise aus Kanten betrachten, die keinen gerichteten Kreis bilden.

Als erstes zeigen wir, dass falls ein solcher Kreis in  $K^+$  existiert, dieser ausschließlich aus gerichteten Kanten bestehen muss. Diese Aussage hilft uns anschließend zu zeigen, dass ein solcher Kreis nicht existieren kann.

**Lemma 15.** *Falls ein induzierter Kreis der Länge mindestens 4 in  $K^+$  existiert, so ist jede Kante des Kreises gerichtet.*

*Beweis.* Wir nehmen an, es existiert entgegen der Behauptung ein induzierter Kreis  $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$ , so dass eine der Kanten ungerichtet ist. Sei  $\{v_1, v_2\}$  diese ungerichtete Kante und liege  $v_1$  in  $v_2$ . Es muss demnach  $v_1 \sim v_4$  und  $v_2 \sim v_3$  gelten, denn sonst gäbe es laut Lemma 9 eine Abkürzung.

Die Kante zwischen  $v_1$  und  $v_4$  kann nur durch transitive Vervollständigung eines gerichteten Pfades zwischen den beiden Knoten entstanden sein, denn sonst wäre die Schnittmenge der Intervalle von  $v_1$  und  $v_4$  nicht leer. Da  $v_1$  in  $v_2$  liegt, wäre folglich auch die Schnittmenge der Intervalle von  $v_2$  und  $v_4$  nicht leer. Es gäbe also eine Kante zwischen  $v_2$  und  $v_4$ , wodurch  $C$  nicht induziert sein könnte.

Sei nun  $p = (v_1, t_1, \dots, t_i, v_4)$  dieser gerichtete Pfad, der zu der vervollständigten Kante zwischen  $v_1$  und  $v_4$  führt.

Es muss einen Knoten  $t_j$  in dem Pfad geben, ab dem jeder darauffolgende Knoten nicht mit  $v_2$  in Konflikt steht. Das gilt mindestens für  $t_i$ , denn  $v_4$  steht nicht mit  $v_2$  in Konflikt.

Demzufolge steht  $t_j$  noch mit  $v_2$  in Konflikt, da aber  $t_{j+1}$  nicht mit  $v_2$  in Konflikt steht, liegt ein Teil des Intervalls von  $t_j$  nicht mehr in dem von  $v_2$ , denn sonst hätte auch  $t_{j+1}$  einen Konflikt zu  $v_2$ .

Daraus folgt  $v_2 \sim t_j$  und da durch den Pfad  $p$  für festes  $\sim$  gilt:

$$v_1 \sim t_1 \sim \dots \sim t_j \sim t_{j+1} \sim \dots \sim v_4,$$

folgt aufgrund von  $v_2 \sim t_j$  für das gleiche  $\sim$ :

$$v_2 \sim t_j \sim t_{j+1} \sim \dots \sim v_4.$$

Die beiden Knoten  $v_2$  und  $v_4$  sind somit durch einen gerichteten Pfad verbunden, weshalb es aufgrund der transitiven Vervollständigung eine Kante zwischen  $v_2$  und  $v_4$  gibt. Infolgedessen kann der Kreis nicht induziert sein, was ein Widerspruch zur Annahme ist.  $\square$

Jeder induzierte Kreis der Länge 4 muss demgemäß vollständig aus gerichteten Kanten bestehen. Betrachten wir einen solchen potentiellen Kreis, wird deutlich, dass es innerhalb des Kreises keinen gerichteten Pfad geben darf, der aus zwei oder mehr Kanten besteht, denn sonst gäbe es eine Abkürzung – durch transitive Vervollständigung – und der Pfad wäre nicht induziert. In einem solchen Kreis müssen deshalb alle Kanten entgegengesetzt der zu ihnen adjazenten Kanten des Kreises orientiert sein.

Wir zeigen nun, dass kein solcher Kreis mit einer ungeraden Anzahl an Knoten existieren kann.

**Lemma 16.**  *$K^+$  enthält keinen induzierten Kreis ungerader Länge mindestens 5.*

*Beweis.* Wir nehmen entgegen der Behauptung an,  $C_k = (v_1, \dots, v_{2k+1}, v_1)$  wäre ein solcher Kreis. Zeigt die Kante zwischen  $v_1$  und  $v_2$  von  $v_1$  nach  $v_2$ , so muss also die Kante zwischen  $v_2$  und  $v_3$  nach  $v_2$  zeigen. Setzen wir diese Regel fort, so gilt grundsätzlich:

Die Kante zwischen  $v_{2i+1}$  und  $v_{2i+2}$  muss nach  $v_{2i+2}$  zeigen.

Die Kante zwischen  $v_{2k+1}$  und  $v_1$  zeigt also auf  $v_1$  und da  $v_1$  nach  $v_2$  zeigt, gibt es einen gerichteten Pfad von  $v_{2k+2}$  nach  $v_2$  und somit eine Abkürzung. Dies ist ein Widerspruch zur Behauptung, denn der Kreis ist nicht induziert.  $\square$

Um zu zeigen, dass  $K^+$  perfekt ist, müssen wir also nur noch zeigen, dass auch  $\overline{K^+}$  kein ungerades Loch enthält. Im folgenden Beweis werden wir zusätzlich zeigen, dass  $\overline{K^+}$  kein Loch enthält. Dazu wollen wir einen induzierten Kreis  $C_k$  der Länge  $k$ , welcher in  $\overline{K^+}$  existiert, sowie die Struktur  $T_k = K^+[C_k]$ , die durch die Knoten von  $C_k$  in  $K^+$  induziert wird, betrachten. Da  $C_k$  ein Loch ist, ist  $T_k$  ein Antiloch.

**Lemma 17.** *In der Struktur  $T_k$  mit  $k$  mindestens 5 ist jede Kante gerichtet.*

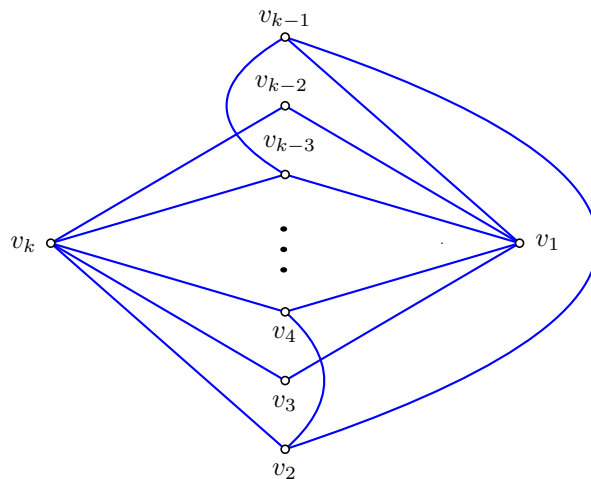
*Beweis.* Wir betrachten nun einen induzierten Kreis  $C_k = (v_0, \dots, v_{k-1}, v_0)$ <sup>1</sup> der Länge mindestens 5 in  $\overline{K^+}$ .

In  $T_k = K^+[C_k]$  sind Knoten  $v_i, v_j$  – mit Ausnahme der Knoten  $v_0$  und  $v_{k-1}$ , die in  $T_k$  nicht benachbart sind – nur dann in  $T_k$  benachbart, wenn gilt  $|i - j| > 1$ , also genau dann wenn die Knoten in  $C_k$  nicht benachbart sind. Die Abbildung 4.8 zeigt  $T_k$  schematisch. Es genügt, den Fall  $k \geq 6$  zu betrachten, denn das Komplement eines induzierten Kreises der Länge 5 ist wieder ein induzierter Kreis der Länge 5 und wir wissen, dass dieser nicht in  $K^+$  und folglich auch nicht in  $\overline{K^+}$  existieren kann.

Wir zeigen zuerst, dass für jedes  $k \geq 6$  gilt, dass  $T_k$  ausschließlich aus gerichteten Kanten besteht. Dazu wollen wir die Menge  $W$  betrachten, die alle induzierten Kreise der Länge 4 in  $T_k$  enthält, sowie eine Funktion  $f : E(T_k) \rightarrow W$ , die jeder Kante  $(v_i, v_j)$  mit  $i < j$  einen induzierten Kreis zuweist, welcher die Kante enthält.

$$f((v_i, v_j)) = \begin{cases} (v_i, v_{j-1}, v_{i+1}, v_j, v_i), & \text{falls } j + 2 \pmod k = i \\ (v_i, v_{j+1 \pmod k}, v_{i-1 \pmod k}, v_j, v_i), & \text{falls } j = i + 2 \\ (v_i, v_{j+1 \pmod k}, v_{i+1}, v_j, v_i), & \text{falls } j > i + 2 \end{cases}$$

<sup>1</sup>Normalerweise beginnen die Indizes mit 1, aufgrund der gleich definierten Funktion beginnen wir hier mit dem Index 0



**Abb. 4.8:** Die Abbildung zeigt schematisch die Struktur des Komplements eines induzierten Kreises der Länge  $k$ . Damit die Darstellung übersichtlich bleibt, liegt der Fokus auf den Knoten  $v_1$  und  $v_k$ . Außerdem werden nicht alle Kanten abgebildet.

Um die Korrektheit der Funktion zu zeigen, wollen wir nun die verschiedenen Fälle unterscheiden, so dass sichtbar wird, dass die Knoten verbunden sind, also die Differenz der Indizes aufeinanderfolgender Knoten größer als 1 ist und der Kreis induziert ist, also ein Knoten nur mit zwei der drei anderen Knoten adjazent ist.

Für  $j + 2 \bmod k = i$  gilt:

$$(v_i, v_{j-1}, v_{i+1}, v_j, v_i) = (v_i, v_{i-3 \bmod k}, v_{i+1}, v_{i-2 \bmod k}, v_i).$$

Für  $j = i + 2$  gilt:

$$(v_i, v_{j+1 \bmod k}, v_{i-1 \bmod k}, v_j, v_i) = (v_i, v_{i+3 \bmod k}, v_{i-1 \bmod k}, v_{i+2}, v_i).$$

Die Korrektheit der ersten beiden Fälle ist eindeutig, wir wollen nun noch einmal auf den Letzten eingehen. Dieser tritt ein, falls  $j > i + 2$  gilt. Wir unterscheiden hier wieder zwei Fälle:

Falls  $j + 1 = k$  gilt:

$$(v_i, v_{j+1 \bmod k}, v_{i+1}, v_j, v_i) = (v_i, v_0, v_{i+1}, v_j, v_i).$$

Da  $i > 2$  – denn sonst würde der erste Fall gelten – und  $i+1 \leq j+2$  folgt die Korrektheit.

Falls  $j + 1 \neq k$  gilt:

$$(v_i, v_{j+1 \bmod k}, v_{i+1}, v_j, v_i) = (v_i, v_{j+1}, v_{i+1}, v_j, v_i).$$

Da  $j > i + 2$  folgt die Korrektheit.

Wir haben in Lemma 15 gezeigt, dass ein induzierter Kreis der Länge mindestens 4 keine ungerichteten Kanten enthalten kann. Da  $f$  jeder Kante einen induzierten Kreis der Länge 4 zuweist, in dem sie enthalten ist, folgt, dass alle Kanten in  $T_k$  gerichtet sind.  $\square$

**Lemma 18.**  $\overline{K^+}$  enthält keinen induzierten Kreis der Länge mindestens 5.

*Beweis.* Wir nehmen an, es existiert entgegen der Behauptung ein induzierter Kreis  $C_k = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$  der Länge  $k \geq 5$  in  $\overline{K^+}$ . Aufgrund von Lemma 17 wissen wir bereits, dass alle Kanten in  $T_k = K^+[C_k]$  gerichtet sind.

Wie wir jetzt zeigen, wird die Orientierung aller Kanten in  $T_k$  durch die Orientierung einer beliebigen Kante, die  $v_1$  oder  $v_k$  enthält, festgelegt.

Sei  $i \in \{3, \dots, k-1\}$ , so gilt:

$$v_i \sim v_1.$$

Nun muss für das gleiche  $\sim$  auch

$$v_{i+1} \sim v_1$$

gelten, denn ansonsten gäbe es zwischen den Knoten  $v_i, v_1, v_{i+1}$  einen gerichteten Pfad, dementsprechend auch eine direkte Kante zwischen  $v_i$  und  $v_{i+1}$ , was ein Widerspruch zur Struktur von  $T_k$  wäre.

Der Knoten  $v_1$  ist folglich entweder Start- oder Endknoten aller Kanten, die  $v_1$  enthalten. Es ist leicht erkennbar, dass das gleiche auch für Kanten, die  $v_k$  enthalten, gilt. Diese müssen so orientiert sein, dass kein gerichteter Pfad zwischen  $v_1$  und  $v_k$  entsteht, denn ansonsten wären aufgrund der transitiven Vervollständigung  $v_1$  und  $v_k$  in  $T_k$  benachbart, was ein Widerspruch zur Struktur des Graphen ist.

Die Orientierung aller Kanten, die  $v_1$  oder  $v_k$  enthalten, ist demzufolge festgelegt. Für diese Kanten gibt es nur zwei mögliche Orientierungen. Abbildung 4.9 stellt beide Möglichkeiten grafisch dar. Die Kante zwischen  $v_2$  und  $v_{k-1}$  ist rot hervorgehoben und noch nicht orientiert. Es wird deutlich, dass jede Orientierung dieser Kante zu einem gerichteten Pfad der Länge 2 zwischen  $v_{k-1}$  und  $v_k$  oder  $v_1$  und  $v_2$  führt. Dadurch existiert nun entweder eine Kante zwischen  $v_1, v_2$  oder  $v_k, v_{k-1}$ . Da beides im Widerspruch zur Struktur von  $T_k$  steht, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 19.**  $K^+$  ist perfekt.

*Beweis.* Aus Lemma 18 und Lemma 16 folgt, dass kein induzierter Subgraph von  $K^+$  ein ungerades Loch oder Antiloch ist.  $K^+$  ist somit perfekt.  $\square$

Wir wissen nun, dass für den erweiterten Konfliktgraphen jeder Problem Instanz gilt:

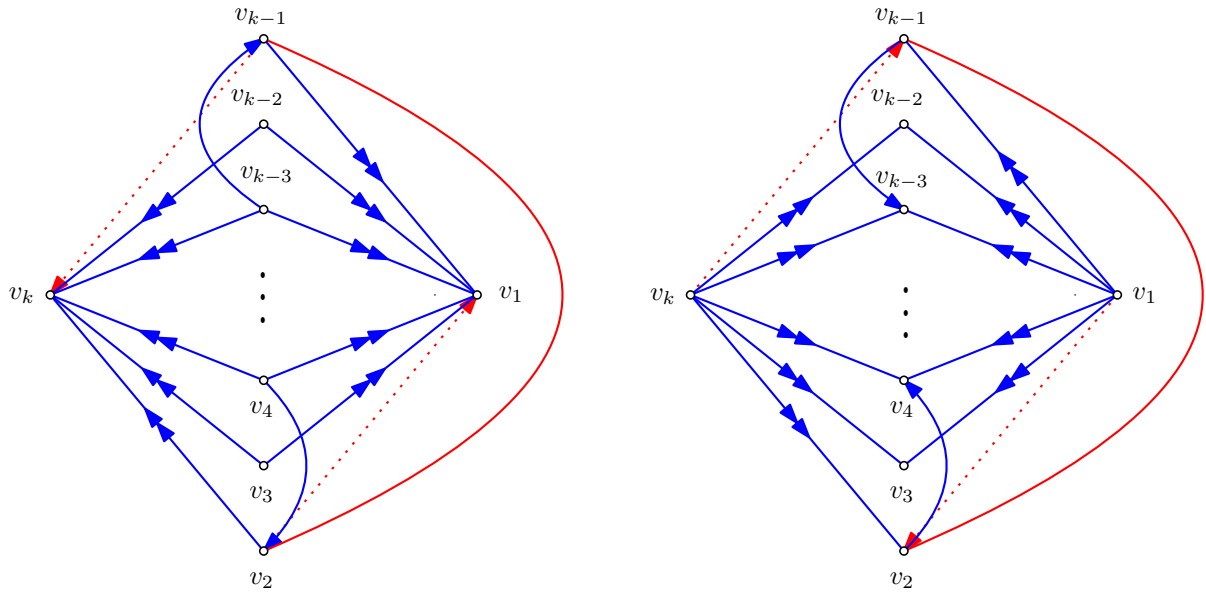
$$\chi(K^+) = \omega(K^+).$$

Wir haben außerdem die folgende Vermutung:

**Vermutung 20.**  $K^+$  ist schwach chordal.

Ein Graph  $G$  ist schwach chordal, wenn weder  $G$  noch  $\overline{G}$  einen induzierten Kreis der Länge mindestens 5 enthält[HHM90]. Das haben wir bereits für  $\overline{K^+}$  zeigen können, für  $K^+$  jedoch noch nicht.

Falls  $K^+$  zur Klasse der schwach chordalen Graphen gehört, hat dies einige algorithmische Vorteile. Maximale Cliques, die chromatische Zahl, unabhängige Mengen und viele weitere Parameter lassen sich hier in  $\mathcal{O}(|V(G)|^3)$  berechnen[HSS07]. Auch für perfekte Graphen existieren solche Polynomialzeit-Algorithmen, diese Verfahren sind jedoch kompliziert und deren Laufzeit ist durch ein Polynom hohen Grades beschränkt[GLS88].



**Abb. 4.9:** Die Abbildung zeigt beide möglichen Orientierungen von  $T_k$ . Die Kante zwischen  $v_2$  und  $v_{k-1}$  ist rot hervorgehoben. Jede Orientierung dieser Kante führt zu der Entstehung einer der rot gepunkteten, transitiven Kanten.

## 4.6 Repräsentation einer Darstellung als azyklische Orientierung

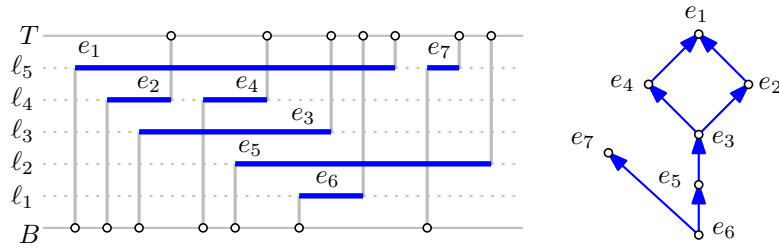
Bisher haben wir eine Darstellung als Funktion  $\sigma$  betrachtet, die jeder Kante der Eingabedaten die Platzierung des zugehörigen HTs zuweist, und anhand dessen den Zusammenhang mit dem Färbeproblem aufgezeigt. In diesem Abschnitt wollen wir eine andere Repräsentation einer Lösung vorstellen, die den Zusammenhang der Kantenorientierung von Konfliktgraphen mit sowohl ungerichteten und gerichteten Kanten und einer Problemlösung verdeutlicht.

Sei  $\sigma$  eine Darstellung, so lässt sich diese durch den Konfliktgraphen  $K^+$  darstellen, indem alle ungerichteten Kanten  $\{u, v\}$  des Konfliktgraphen nach den Regeln:

- Falls  $\sigma(u) > \sigma(v)$ , so ersetze die ungerichtete Kante  $\{u, v\}$  durch  $(v, u)$
- Falls  $\sigma(u) < \sigma(v)$ , so ersetze die ungerichtete Kante  $\{u, v\}$  durch  $(u, v)$

orientiert werden. Sind alle Kanten orientiert, so ist der entstandene Graph  $H_\sigma$  eine Orientierung des Graphen  $K^+$ . Wir wissen, dass jede Orientierung  $H_\sigma$ , die mithilfe einer Darstellung  $\sigma$  aus einem Konfliktgraphen entsteht, azyklisch ist, denn sonst gäbe es einen gerichteten Kreis  $c = (v_1, v_2, \dots, v_1)$  in  $H_\sigma$ . Daraus würde folgen, dass das HT der Strecke  $v_1$  gleichzeitig über und unter dem HT der Strecke  $v_2$  platziert wird. Die Darstellung  $\sigma$  kann demgemäß nicht valide sein, was im Widerspruch zur (oben beschriebenen) Annahme steht.





**Abb. 4.10:** Die Abbildung zeigt eine Lösung der in Abbildung 1.2 dargestellte Problem Instanz als azyklische Orientierung. Transitive Kanten wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit bewusst nicht abgebildet.

Der Graph  $H_\sigma$  ist also eine *azyklische Orientierung* des erweiterten Konfliktgraphen  $K^+$ . Abbildung 4.10 zeigt eine solche azyklische Orientierung, welche eine valide Darstellung repräsentiert.

Im Ausgangszustand besteht der Konfliktgraph aus gerichteten und ungerichteten Kanten. Während des Lösungsprozesses muss dementsprechend jede der ungerichteten Kanten orientiert werden.

Betrachten wir nun einen beliebigen Pfad  $p = (v_1, \dots, v_k)$  von  $H_\sigma$ , so wird deutlich, dass für  $i = 1, \dots, k - 1$  jeweils  $\sigma(v_i) < \sigma(v_{i+1})$  gilt. Die HTs der Knoten des Pfades  $p$  werden also auf  $|p| + 1$  verschiedenen Ebenen angeordnet. Für die Darstellung von  $\sigma$  werden also mindestens so viele Ebenen belegt, wie der längste Pfad von  $H_\sigma$  Knoten hat.

Die Lösung einer Problem Instanz ist entsprechend genau dann optimal, wenn die zugehörige azyklische Orientierung – bezogen auf die Länge des längsten gerichteten Pfades – minimal ist, es also keine andere azyklische Orientierung des Konfliktgraphen gibt, deren längster Pfad kürzer ist.

Das Bestimmen einer Lösung lässt sich somit darauf zurückführen, eine azyklische Orientierung des erweiterten Konfliktgraphen zu bestimmen, deren längster gerichteter Pfad minimale Länge hat. Wir haben bereits beschrieben, dass eine valide Darstellung auch eine gültige Färbung ist und jede valide Darstellung als azyklische Orientierung ausgedrückt werden kann.

Die folgende bekannte Dualität zwischen Färbungen und azyklischen Orientierungen eines Graphen verdeutlicht diese Beobachtung.

**Satz 21** (Gallai, Roy, Vitaver, Hasse [HL09]). *Sei  $G$  ein ungerichteter Graph und  $H$  eine Orientierung von  $G$  und  $l(H)$  der längste gerichtete Pfad in  $H$ , dann gilt:*

$$\chi(G) \leq 1 + |l(H)|.$$

Weiterhin existiert eine Orientierung  $H'$ , so dass gilt

$$\chi(G) = 1 + |l(H')|.$$

Ein Graph  $G$  ist genau dann  $k$ -färbbar, wenn eine Orientierung von  $G$  existiert, in welcher der längste Pfad aus genau  $k$  Knoten besteht.

Wir haben bereits beschrieben, wie sich eine Darstellung durch eine azyklische Orientierung beschreiben lässt. Nun wollen wir noch die andere Richtung beschreiben, also den Prozess eine Darstellung aus einer azyklischen Orientierung zu erzeugen.

Während  $\sigma$  jedem HT eine konkrete Ebene zuweist, geht diese spezifische Zuordnung durch  $H_\sigma$  verloren, denn  $H_\sigma$  definiert ausschließlich eine *topologische Ordnung* auf die Knoten, gibt also für jeden Knoten  $u$  an, welche HTs anderer Knoten über und unter dem HT des Knotens  $u$  angeordnet werden. Es gibt zu einer azyklischen Orientierung folglich keine eindeutige Darstellung.

Betrachten wir eine azyklische Orientierung  $H$  eines erweiterten Konfliktgraphen, so lässt sich daraus wie folgt eine Darstellung erstellen.

Wir bestimmen zunächst eine topologische Sortierung  $S$  von  $H$ . Anschließend wählen wir für  $i = 1, \dots, n$  den Knoten  $S[i]$  und betrachten alle eingehenden Kanten  $(u, S[i])$  des Knotens  $S[i]$ . Da  $S[i]$  der Endknoten dieser Kanten ist, gilt für jede dieser Kanten  $(u, S[i])$ , dass der Knoten  $u$  in der Sortierung vor  $S[i]$  kommt. Dem Knoten  $u$  wurde also bereits eine Ebene zugewiesen. Wir weisen dem Knoten  $S[i]$  nun die Ebene über der des am höchsten angeordneten Nachbarn von  $S[i]$  zu, also

$$\sigma(S[i]) := \begin{cases} 1 + \max\{\sigma(u) \mid (u, S[i]) \in E(H)\}, & \text{falls } S[i] \text{ eingehende Kanten hat} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Daraus folgt außerdem, dass die resultierende Darstellung genauso viele Ebenen belegt, wie der längste Pfad Knoten besitzt.

**Satz 22.** *Eine azyklische Orientierung  $H$  von  $K^+$  beschreibt eine Darstellung  $\sigma$  auf  $|l(H)| + 1$  Ebenen und induziert eine valide Färbung auf  $K^+$ , wobei  $l(h)$  der längste gerichtete Pfad in  $H$  ist.*

## 5 Fazit

Mit dem (erweiterten) Konfliktgraphen konnten wir ein theoretisches Modell entwickeln, das eine Probleminstanz verlustfrei repräsentiert und deren valide Darstellungsmöglichkeiten aufzeigt. Anhand dieses Graphen konnte die Lösung unseres Problems auf verschiedene bekannte graphentheoretische Probleme zurückgeführt werden.

Die Grundlage dafür bildet die Betrachtung einer Strecke als Intervall und folglich einer Probleminstanz als Intervallmodell. Zusammen mit den Validitätskriterien entwickelten wir eine Richtlinie, durch die wir Abhängigkeiten zwischen den Strecken feststellen und ausdrücken konnten. Die Intervalle der Strecken und deren Konflikte lassen sich mit einem Konfliktgraphen, bestehend aus sowohl gerichteten und ungerichteten Kanten, modellieren, so dass dieser Konfliktgraph die Abhängigkeiten der Darstellungen zwischen verschiedenen Strecken darstellt. Die transitive Eigenschaft einer der Konflikte konnte ebenfalls nachgewiesen werden. Um dies abzubilden, haben wir den Konfliktgraphen durch transitive Vervollständigung zu dem erweiterten Konfliktgraphen, unserem finalen Modell, erweitert.

Anhand des erweiterten Konfliktgraphen konnten wir das Bestimmen einer optimalen Darstellung auf andere graphentheoretische Probleme zurückführen. Dabei induziert eine Lösung eine Färbung auf den erweiterten Konfliktgraphen, die zusätzliche Einschränkungen erfüllen muss, welche durch die transitive Relation  $\sim$  ausgedrückt werden. Gleichzeitig muss für eine optimale Darstellung eine minimale azyklische Orientierung des (erweiterten) Konfliktgraphen gefunden werden. Weiterhin konnten wir zeigen, dass der Graph zur Klasse der perfekten Graphen gehört. Dies ermöglicht die effiziente Lösung des Färbeproblems, außerdem konnten wir in Lemma 13 eine konkrete untere Schranke für die Anzahl – und zwar die chromatische Zahl des erweiterten Konfliktgraphen – benötigter Ebenen angeben.

## 6 Ausblick

An dieser Stelle wollen wir einige weiterführende Gedanken und Ideen formulieren, die nicht mehr im Rahmen dieser Forschungsarbeit liegen. Die Ebenenanzahl, welche für eine optimale Darstellung notwendig ist, hat sich bereits als wichtiges Thema abgezeichnet. Im Abschnitt 6.0.1 wollen wir nun unsere Vermutung präsentieren, die besagt, dass die Anzahl der Ebenen, die notwendig ist, um eine Probleminstance optimal darzustellen, gleich der chromatischen Zahl des erweiterten Konfliktgraphen ist.

Dies hängt eng mit dem folgenden Abschnitt 6.0.2 zusammen. Hier wollen wir die Konsequenzen beschreiben, die entstehen, wenn wir die in Abschnitt 3.1 beschriebenen Einschränkungen auf Probleminstanzen aufheben.

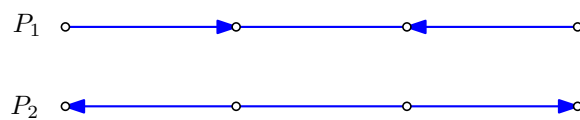
In Abschnitt 6.0.3, dem letzten Teil der Arbeit, werden wir einen Lösungsvorschlag vorstellen, der die Grundzüge des Prozesses beschreibt, die notwendig sind, um eine optimale Lösung zu bestimmen. Abschließend wollen wir ein Verfahren beschreiben, durch welches sich unter einigen Vermutungen eine Lösung in Polynomialzeit bestimmen lässt.

### 6.0.1 Obere Schranke für die Anzahl benötigter Ebenen

Wir haben die Vermutung, dass die Ebenenanzahl, die für eine optimale Lösung notwendig ist, gleich der chromatischen Zahl des erweiterten Konfliktgraphen ist. Analog bedeutet das, dass es eine azyklische Orientierung des erweiterten Konfliktgraphen gibt, in welcher der längste Pfad aus genau  $\chi(K^+)$  Knoten besteht.

Wir haben Computereperimente durchgeführt, bei welchen wir Probleminstanzen generiert haben und anschließend mit einem Brute-Force Algorithmus versucht haben, eine Darstellung zu berechnen, bei der die Anzahl benutzter Ebenen gleich der chromatischen Zahl des erweiterten Konfliktgraphen ist. Wir haben auf diese Weise über  $10^6$  verschiedene Probleminstanzen mit jeweils zehn Strecken überprüft und konnten keine Instanz finden, welche dieser Vermutung widerspricht.

Betrachten wir jedoch Probleminstanzen deren Strecken nicht einheitlich orientiert sind, so können Konfliktgraphen entstehen, für welche die Behauptung nicht gilt. Abbildung 6.1 zeigt die beiden kleinsten dieser Graphen.



**Abb. 6.1:** Die chromatische Zahl der Pfade  $P_1$  und  $P_2$  ist 2, der längste Pfad jeder azyklischen Orientierung der beiden Pfade besteht jedoch aus genau drei Knoten.

Dies führt zu der folgenden Annahme:

**Vermutung 23.** Sei  $G$  ein perfekter Graph, der sowohl gerichtete als auch ungerichtete Kanten enthält, so dass die gerichteten Kanten, wie in Definition 11 beschrieben, transitiv vervollständigt sind und keine Kreise bilden.

Ist  $P_1$  und  $P_2$  kein induzierter Subgraph von  $G$ , so existiert eine azyklische Orientierung  $H$  von  $G$ , so dass der längste Pfad in  $H$  aus genau

$$|l(H)| + 1 = \chi(G)$$

Knoten besteht.

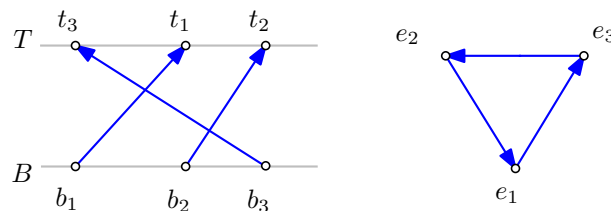
Dass die von uns betrachteten erweiterten Konfliktgraphen zu Probleminstanzen, bei denen alle Strecken die gleiche Orientierung haben,  $P_1$  und  $P_2$  nicht als induzierten Subgraphen besitzen, folgt trivial aus dem zu Lemma 15 geführten Beweis.

### 6.0.2 Problembetrachtung für uneingeschränkte Probleminstanzen

In Abschnitt 3.1 haben wir festgelegt, dass wir die betrachteten Probleminstanzen wie folgt einschränken

- Jede Koordinate kommt maximal in der Beschreibung einer einzigen Strecke vor.
- Alle Strecken sind *entweder* rechtsläufig oder linksläufig.

Diese Einschränkung haben wir vorgenommen, um den Fall zu verhindern, dass für die Darstellung einer Strecke mehrere HTs notwendig sind. Heben wir diese Einschränkung auf, so findet sich wie in Abschnitt 6.0.1 beschrieben ein Gegenbeispiel für die Annahme, dass die Anzahl benötigter Ebenen gleich der chromatischen Zahl des erweiterten Konfliktgraphen ist. Inwieweit das den Lösungsprozess erschwert, muss evaluiert werden. Weiterhin lassen sich so Probleminstanzen erzeugen, deren Konfliktgraphen nicht mehr azyklisch sind.



**Abb. 6.2:** In einer Probleminstanz mit nicht einheitlich orientierten Strecken gibt es Konstellationen, bei welchen der zugehörige Konfliktgraph gerichtete Kreise hat.

### 6.0.3 Idee für einen Lösungsalgorithmus

In diesem Abschnitt wollen wir eine erarbeitete Idee eines Lösungsalgorithmus vorstellen, der für Probleminstanzen, für welche die Vermutung 23 gilt, für den Fall, dass die Vermutung wahr ist, eine Lösung bestimmt.

Die Grundidee ist es, die finale Darstellung von oben nach unten aufzubauen. Wir betrachten dazu  $K^+$ . In jedem Schritt werden dabei Knoten aus  $K^+$  ausgewählt, auf der obersten freien Ebene platziert und anschließend aus  $K^+$  entfernt.

Da die Anzahl benötigter Ebenen gleich  $\chi(K^+)$  ist, wollen wir diese Knoten so wählen, dass das Entfernen dieser Knoten aus dem Graphen  $K^+$  die chromatische Zahl des Graphen um 1 verringert. Dementsprechend wiederholen wir diese Prozedur genau  $\chi(K^+)$  mal.

Damit das Entfernen einer Knotenmenge  $M \subseteq V(K^+)$  die chromatische Zahl von  $K^+$  reduziert, muss aus jeder Clique der Größe  $\chi(K^+)$  genau ein Knoten in  $M$  sein. Da wir die Knoten außerdem auf der obersten Ebene anordnen wollen, dürfen die Knoten keine ausgehenden Kanten haben und untereinander nicht benachbart sein.

Wir suchen also in jedem Schritt eine unabhängige Menge, deren Knoten keine ausgehenden Kanten haben und deren Entfernen aus  $K^+$  die chromatische Zahl um 1 reduziert. Anschließend werden diese Knoten auf der höchsten verfügbaren Ebene platziert und aus  $K^+$  entfernt. Ob sich diese Menge in Polynomialzeit bestimmen lässt, muss evaluiert werden. Das Verfahren lässt sich wie folgt durch Pseudocode schematisch beschreiben:

---

**Algorithmus 3:** Bestimmen einer Lösung(Probleminstanz  $X$ )

---

**Eingabe:** Probleminstanz  $X$

**Ausgabe:** Minimale azyklische Orientierung

```

1  $K^+ \leftarrow \text{ErweitertenKonfliktgraphErstellen}(X)$ 
2  $H \leftarrow K^+$ 
3 while  $|V(K^+)| > 0$  do
4    $M \leftarrow$  Knoten, die in einer Clique der Größe  $\chi(K^+)$  sind
5   foreach  $v \in M$  do
6     if  $\text{ausgehendeKanten}(v) \neq \emptyset$  then
7        $M \leftarrow M \setminus \{v\}$ 
8    $M \leftarrow \text{FindeUnabhängigeMinimierendeMenge}(K^+, M)$ 
9   foreach  $v \in M$  do
10    foreach ungerichtete Kante  $e = \{u, v\} \in E(H)$  die  $v$  enthält do
11       $e \leftarrow (u, v)$ 
12     $\text{EntferneKnoten}(K^+, v)$ 
13 return  $H$ 
```

---

# Literaturverzeichnis

- [CRaT06] Chudnovsky, Seymour Robertso and und Thomas: The Strong Perfect Graph Theorem. *Annals of Mathematics*, 164(1):51–229, 2006, 10.4007/annals.2006.164.51.
- [GH64] P. C. Gilmore und A. J. Hoffman: A Characterization of Comparability Graphs and of Interval Graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 16:539–548, 1964, 10.4153/CJM-1964-055-5.
- [GLS88] Martin Grötschel, Lászlo Lovász und Alexander Schrijver: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Band 2 der Reihe *Algorithms and Combinatorics*. Springer, 1988, ISBN 3-540-13624-X.
- [HHM90] Ryan Hayward, Chinh T. Hoàng und Frédéric Maffray: Optimizing Weakly Triangulated Graphs. *Graph. Comb.*, 6(1):33–35, März 1990, 10.1007/BF01787477.
- [HL09] Lih Hsing Hsu und Cheng Kuan Lin: *Graph theory and interconnection networks*. CRC Press, 2009, ISBN 978-1-4200-4481-2.
- [Hou06] Stefan Hougardy: Classes of perfect graphs. *Discrete Mathematics*, 306(19):2529–2571, 2006, 10.1016/j.disc.2006.05.021. Creation and Recreation: A Tribute to the Memory of Claude Berge.
- [HSS07] Ryan B. Hayward, Jeremy P. Spinrad und R. Sritharan: Improved Algorithms for Weakly Chordal Graphs. *ACM Trans. Algorithms*, 3(2):14–es, Mai 2007, 10.1145/1240233.1240237.
- [jDL14] Li jun Deng und J. Liu: New approach for ventilation network graph drawing based on Sugiyama method and GA-SA algorithm. *Computer Modelling and new Technologies*, 18(8):45–49, 2014.
- [KN09] Sven Oliver Krumke und Hartmut Noltemeier: *Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 2009, ISBN 978-3-8348-0629-1.
- [OKS<sup>+</sup>17] Yosuke Onoue, N. Kukimoto, N. Sakamoto, Kazuo Misue und K. Koyamada: Layered Graph Drawing for Visualizing Evaluation Structures. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 37:20–30, 2017, 10.1109/MCG.2016.40.

- [SSv14] Christoph Daniel Schulze, Miro Spönemann und Reinhard von Hanxleden: Drawing layered graphs with port constraints. *Journal of Visual Languages and Computing*, 25(2):89–106, 2014, 10.1016/j.jvlc.2013.11.005.
- [STT81] K. Sugiyama, S. Tagawa und M. Toda: Methods for Visual Understanding of Hierarchical System Structures. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 11(2):109–125, 1981, 10.1109/TSMC.1981.4308636.
- [WZBW20] Julian Walter, Johannes Zink, Joachim Baumeister und Alexander Wolff: Layered Drawing of Undirected Graphs with Generalized Port Constraints. In: David Auber und Pavel Valtr (Herausgeber): *Proceedings 28. International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization (GD'20)*, Seiten 220–234, 2020, 10.1007/978-3-030-68766-3.



# Erklärung

Hiermit versichere ich die vorliegende Abschlussarbeit selbstständig verfasst zu haben, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben, und die Arbeit bisher oder gleichzeitig keiner anderen Prüfungsbehörde unter Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt zu haben.

Würzburg, den 26.03.2021

.....  
Lukas Brückner