

Bachelorarbeit

Vergleich von Zeichenstilen für planare Graphen

Sebastian Müller

Abgabedatum: 3. Juli 2020
Betreuer: Prof. Dr. Alexander Wolff
Prof. Dr. Jörn Steuding



Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen, Komplexität und wissensbasierte Systeme

Zusammenfassung

Es gibt unzählige Möglichkeiten einen Graphen zu zeichnen. Je allgemeiner der vorausgesetzte Zeichenstil ist, desto breiter ist das Spektrum. Da man an einer möglichst anschaulichen Zeichnung interessiert ist, stellt sich die Frage, inwiefern eine Verschärfung der Anforderungen an die Zeichnung qualitative Auswirkungen haben könnte.

In der vorliegenden Arbeit werden wir geradlinige gegenüber k -geknickten planaren Zeichnungen bezüglich der vier Qualitätsmaße Winkelauflösung, Flächenbedarf, Kantenlängenverhältnis und Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis vergleichen. Als Ergebnis der Untersuchungen werden je nach betrachtetem Qualitätsmaß untere Schranken für die Qualitätsverhältnisse zwischen dem k -geknickten planaren Zeichenstil und dem geradlinigen planaren Zeichenstil präsentiert (vgl. Tabelle 4.1).

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 4 |
| 2 | Grundlagen | 5 |
| 2.1 | Visualisierung von Graphen | 5 |
| 2.2 | Qualitätsverhältnisse von Zeichnungen | 7 |
| 3 | Planare Zeichnungen mit geradlinigen gegenüber geknickten Kanten | 10 |
| 3.1 | Winkelauflösung | 11 |
| 3.2 | Flächenbedarf | 16 |
| 3.3 | Kantenlängenverhältnis | 18 |
| 3.4 | Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis | 20 |
| 4 | Fazit und Ausblick | 25 |
| | Literaturverzeichnis | 27 |

1 Einleitung

Die Beschreibung von Beziehungen zwischen Objekten mit Hilfe von Graphen ist sowohl im Alltag als auch in der Wissenschaft eine weit verbreitete Technik. Insbesondere bei einer großen Menge an Informationen ist es unerlässlich, diese übersichtlich und verständlich zu präsentieren. Die gängigste Repräsentationsform eines Graphen ist die Zeichnung. Bei der Erstellung einer Zeichnung sollte die Struktur möglichst so dargestellt werden, dass besondere Eigenschaften hervorgehoben werden und Muster erkannt werden können. Ein limitierender Faktor ist dabei der verwendete Zeichenstil, durch den festgelegt wird, welche Eigenschaften die Zeichnung erfüllen muss.

Der Vergleich von Zeichenstilen ist ein aktuelles Forschungsthema in der Graphentheorie. Hoffmann et al. [HvKKR14] haben Qualitätsverhältnisse zwischen folgenden Zeichenstilen untersucht:

- Planare geradlinige Zeichnungen mit festgelegter gegenüber freier Einbettung,
- planare Zeichnungen mit geradlinigen gegenüber gebogenen Kanten und
- planare gegenüber nicht-planaren Zeichnungen mit geradlinigen Kanten.

Die genannten Vergleiche wurden jeweils für planare Graphen und Bäume durchgeführt. Des Weiteren erforschte van Kreveld [vK11] für planare Graphen, inwieweit sich planare geradlinige Zeichnungen qualitativ von geradlinigen Zeichnungen unterscheiden können, bei denen ausschließlich rechtwinklige Kreuzungen von Kanten zugelassen werden. Wir werden in dieser Arbeit Qualitätsverhältnisse zwischen planaren Zeichnungen untersuchen, die eine bestimmte Anzahl an Knicken in den Kanten erlauben, und solchen, die nur geradlinige Kanten zulassen. Dabei beschränken wir uns auf die Betrachtung von planaren Graphen.

In der vorliegenden Arbeit werden in Kapitel 2 zunächst grundlegende Begriffe wie planarer Graph, Zeichenstil, Qualitätsmaß und Qualitätsverhältnisse geklärt. Anschließend werden in Kapitel 3 durch die Betrachtung konkreter planarer Graphen untere Schranken für die Qualitätsverhältnisse zwischen k -geknickten und geradlinigen planaren Zeichnungen bezüglich der Qualitätsmaße Winkelauflösung, Flächenbedarf, Kantenlängenverhältnis und Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis ermittelt. Die Arbeit schließt in Kapitel 4 mit einem Fazit und einem Ausblick für die weitere Forschung.

2 Grundlagen

Im Folgenden definieren wir einige Begriffe, um ein wissenschaftliches Grundgerüst für unsere späteren Untersuchungen aufzubauen.

2.1 Visualisierung von Graphen

Ein *Graph* besteht aus Objekten, die miteinander in Verbindung stehen. Je nachdem, ob die Richtung dieser Verbindung von Interesse ist, wird ein Graph *gerichtet* oder *ungerichtet* genannt.

Definition 2.1 (gerichteter Graph). Ein gerichteter Graph G ist als ein Paar (V, E) definiert, welches aus einer endlichen nicht-leeren Menge V an Knoten und einer endlichen Menge E an gerichteten Kanten $E \subseteq V \times V = \{(u, v) \in V^2 \mid u \neq v\}$ besteht. Eine Kante $e = (u, v)$ startet in u und endet in v .

Definition 2.2 (ungerichteter Graph). Ein ungerichteter Graph G ist als ein Paar (V, E) definiert, welches aus einer endlichen nicht-leeren Menge V an Knoten und einer endlichen Menge E an ungerichteten Kanten $E = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ besteht.

Graphen können beispielsweise durch Adjazenzmatrizen oder Adjazenzlisten repräsentiert werden. Ein Nachteil dieser Repräsentationsformen ist, dass die Grundstruktur der Informationen nicht einfach abzulesen ist. Um einen Graphen zu visualisieren, wird daher in der Regel eine *Zeichnung* verwendet.

Definition 2.3 (Zeichnung [DETT99]). Eine Abbildung $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt *Zeichnung*, falls

- $\Gamma(v) \in \mathbb{R}^2$ für alle $v \in V$ und
- $\Gamma(\{u, v\}) = \Gamma_{\{u, v\}}$ für alle $\{u, v\} \in E$ gilt, wobei $\Gamma_{\{u, v\}}: [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$ eine offene Jordankurve mit $\Gamma_{\{u, v\}}(0) = \Gamma(u)$ und $\Gamma_{\{u, v\}}(1) = \Gamma(v)$ ist.

Ein Graph, der ohne Kantenkreuzungen gezeichnet werden kann, wird *planarer Graph* genannt. Beispielhaft für planare Graphen sind die Skelette konvexer Polyeder. In den nachfolgenden Untersuchungen werden wir zwei bekannten Vertretern dieser Art begegnen. Dabei handelt es sich zum einen um den Ikosaeder, der sich aus 20 regelmäßigen Dreiecken zusammensetzt, zum anderen um den Tetraeder, der sich aus vier regelmäßigen Dreiecken zusammensetzt. Der Graph des Tetraeders wird K_4 genannt und ist in Abbildung 2.1 auf zwei unterschiedliche Arten gezeichnet. Die Zeichnung in Abbildung 2.1a

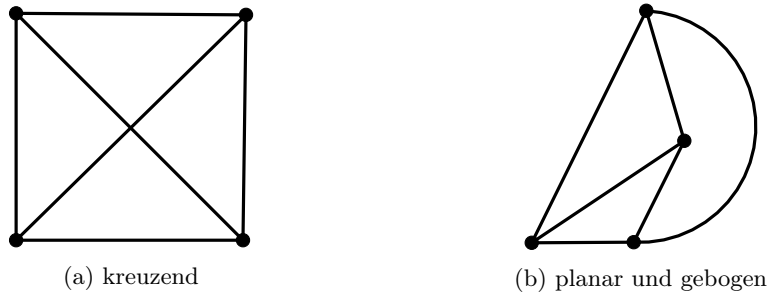


Abb. 2.1: Eine kreuzende und eine planar gebogene Zeichnung des K_4 .

beinhaltet sich kreuzende Kanten und wird daher *nicht-planar* genannt. Die Zeichnung in Abbildung 2.1b ist hingegen *planar* und hat zusätzlich die Eigenschaft, dass eine Kante durch einen Kreisbogen repräsentiert ist. Aufgrund dessen wird sie *gebogen* genannt. Um eindeutig festzulegen, welchen Anforderungen eine Zeichnung genügen soll, werden *Zeichenkonventionen* definiert.

Definition 2.4 (Zeichenkonventionen [DETT99]). Eine Zeichenkonvention ist eine global für die Zeichnung geltende Eigenschaft, die eine Zeichnung erfüllen muss.

Durch die Summe der festgelegten Zeichenkonventionen wird ein *Zeichenstil* S definiert. Eine Zeichnung gehört genau dann einem bestimmten Zeichenstil an, wenn alle Zeichenkonventionen des Zeichenstils erfüllt werden. Für Zeichnungen, die die Zeichenkonvention Planarität erfüllen, gilt die Eulersche Polyederformel. Diese liefert einen Zusammenhang zwischen Knotenanzahl, Kantenanzahl und Anzahl der durch die Zeichnung erzeugten Gebiete.

Satz 2.5 (Eulersche Polyederformel). Für eine planare Zeichnung eines Graphen mit n Knoten, m Kanten, f Gebieten und k Zusammenhangskomponenten gilt

$$n - m + f = k + 1.$$

Dabei wird genau ein unbeschränktes Gebiet, das sogenannte *Außengebiet* erzeugt. Alle anderen Gebiete sind beschränkt und heißen *Innengebiete*. Ein planarer Graph wird *maximal planar* genannt, wenn zu dem Graphen keine Kante hinzugefügt werden kann, ohne die Planarität zu verletzen [KN09].

Satz 2.6. Sei Γ eine planare Zeichnung eines Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten. Für $n \geq 3$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Der Graph G ist maximal planar.
2. An jedem Gebiet, welches durch die Zeichnung Γ erzeugt wird, liegen genau drei Knoten.
3. Es gilt $m = 3n - 6$.

2.2 Qualitätsverhältnisse von Zeichnungen

Neben den Zeichenkonventionen, die unbedingt eingehalten werden müssen, gibt es die sogenannten *Ästhetikkriterien*, die soweit wie möglich berücksichtigt werden sollten.

Definition 2.7 (Ästhetikkriterium [DETT99]). Ein Ästhetikkriterium ist eine Eigenschaft einer Zeichnung, die, soweit wie möglich, erreicht werden soll, um die Lesbarkeit und die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

Die Qualität einer Zeichnung ist davon abhängig, inwieweit die Ästhetikkriterien eingehalten werden. Um Zeichnungen bezüglich eines Ästhetikkriteriums vergleichen zu können, muss diesem ein *Qualitätsmaß* zugeordnet werden.

Definition 2.8 (Qualitätsmaß). Ein Qualitätsmaß M bezüglich eines Ästhetikkriteriums ist eine Abbildung $M: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, die jeder Zeichnung Γ einen nicht-negativen reellen Wert zuordnet.

Die Übersichtlichkeit einer Zeichnung ist von mehreren Kriterien abhängig. Im Folgenden werden die vier Qualitätsmaße nach Hoffmann et al. [HvKKR14] vorgestellt, nach denen die Untersuchungen in Kapitel 3 ausgerichtet sind.

Je kleiner die Winkel zwischen den Kanten sind, desto schwieriger ist es, die einzelnen Beziehungen zwischen den Objekten eindeutig zuzuordnen. Sehr kleine Winkel zwischen den Kanten sollten daher vermieden werden. Ein Maß dafür, inwieweit dieses Ästhetikkriterium in einer Zeichnung berücksichtigt wird, gibt die *Winkelauflösung* an.

Definition 2.9 (Winkelauflösung [HvKKR14]). Die Winkelauflösung M_1 einer Zeichnung ist durch den kleinsten Winkel gegeben, der von zwei Kanten eingeschlossen wird.

Des Weiteren ist man daran interessiert, den Bedarf an Platz für eine Zeichnung möglichst gering zu halten. Inwiefern dies umgesetzt wird, kann man dem *Flächenbedarf* entnehmen.

Definition 2.10 (Flächenbedarf [HvKKR14]). Der Flächenbedarf M_2 einer Zeichnung ist durch das minimale Produkt $h \cdot v$ der Anzahl h der horizontalen und der Anzahl v der vertikalen Gitterlinien gegeben, auf denen der Graph gezeichnet werden kann. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Gitterlinien geradlinig sind und die Knoten nur auf dem Gitter liegen dürfen.

Ein weiteres Augenmerk liegt auf der Gleichmäßigkeit der Kantenlängen. Das *Kantenlängenverhältnis* gibt Aufschluss darüber.

Definition 2.11 (Kantenlängenverhältnis [HvKKR14]). Das Kantenlängenverhältnis M_3 einer Zeichnung ist durch den Quotienten l/k der Länge l der längsten und Länge k der kürzesten Kante gegeben.

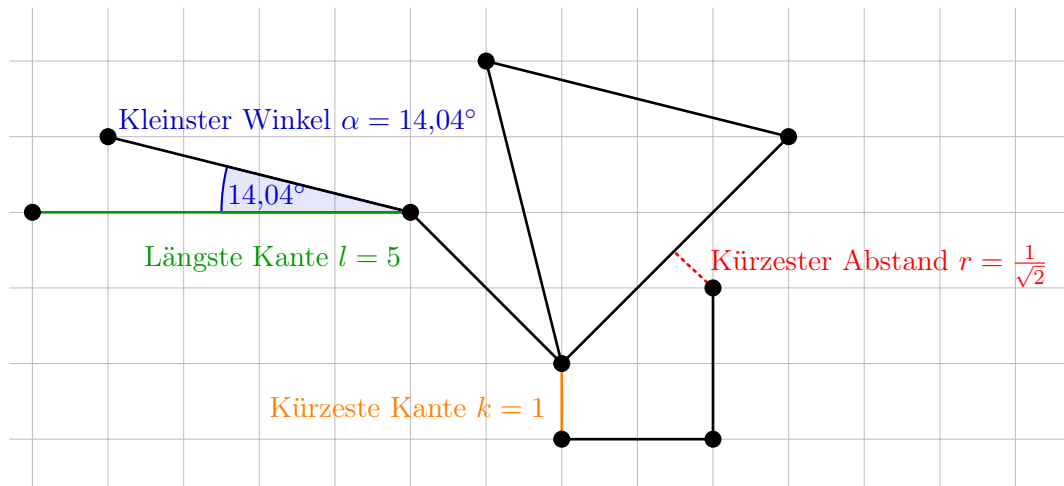


Abb. 2.2: Qualitätsmaße einer Graphenzeichnung Γ .

Die Ästhetik der Zeichnung ist beeinträchtigt, wenn Knoten zu nahe an Kanten platziert werden. Das *Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis* ist ein Maß, welches Aufschluss darüber gibt, inwieweit diese Problematik in einer Zeichnung vermieden wird.

Definition 2.12 (Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis [HvKKR14]). Das Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis M_4 einer Zeichnung ist durch den Quotienten l/r der Länge der längsten Kante l und dem kürzesten Abstand r eines Knotens zu einer Kante gegeben.

Betrachten wir den Beispielgraphen in Abbildung 2.2. Der kleinste Winkel, der in der Zeichnung Γ von zwei Kanten eingeschlossen wird, ist blau markiert und beträgt ungefähr 14° . Dies entspricht nach Definition 2.9 der Winkelauflösung $M_1(\Gamma)$. Insgesamt werden elf horizontale und sechs vertikale Gitterpunkte benötigt, um die Zeichnung einzugrenzen. Der Flächenbedarf $M_2(\Gamma)$ berechnet sich daher nach Definition 2.10 durch $11 \cdot 6 = 66$. Die grün markierte längste Kante ist fünf Einheiten und die gelb markierte kürzeste Kante eine Einheit lang. Nach Definition 2.11 ergibt sich daher für die Zeichnung ein Kantenlängenverhältnis $M_3(\Gamma)$ von $5/1 = 5$. Der rot markierte kürzeste Abstand zwischen einem Knoten zu einer Kante ist durch $1/\sqrt{2}$ gegeben. Nach Definition 2.12 entspricht das Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis $M_4(\Gamma)$ in dieser Zeichnung folglich $5/(1/\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}$. Um eine Aussage darüber zu treffen, inwieweit sich zwei Zeichenstile bezüglich eines Qualitätsmaßes unterscheiden, wird das *Qualitätsverhältnis* definiert.

Definition 2.13 (Qualitätsverhältnis [HvKKR14]). Sei S_2 ein allgemeinerer Zeichenstil als S_1 . Das Qualitätsverhältnis QV zwischen S_2 und S_1 bezüglich eines Qualitätsmaßes M ist entweder gegeben durch

$$QV(S_2 : S_1, M) = \sup_G \frac{M(\text{beste } S_2\text{-Zeichnung von } G)}{M(\text{beste } S_1\text{-Zeichnung von } G)},$$

wenn das Qualitätsmaß M maximiert werden soll, oder durch

$$QV(S_2 : S_1, M) = \sup_G \frac{M(\text{beste } S_1\text{-Zeichnung von } G)}{M(\text{beste } S_2\text{-Zeichnung von } G)},$$

wenn das Qualitätsmaß M minimiert werden soll.

3 Planare Zeichnungen mit geradlinigen gegenüber geknickten Kanten

Eine Zeichnung, die eine maximale Anzahl k an Knicken pro Kante besitzt, wird k -geknickt genannt. In Abbildung 3.1 ist jeweils ein Beispiel für eine geradlinige, eine 1-geknickte und eine 2-geknickte Zeichnung des K_4 gegeben. Wir stellen uns im Folgenden die Frage, inwieweit sich Qualitätsmaße planarer geradliniger Zeichnungen von planaren Graphen verbessern lassen, wenn Knicke in den Kanten zugelassen werden. Wir definieren hierfür den zugehörigen Zeichenstil S_k .

Definition 3.1 (k -geknickter planarer Zeichenstil). Der k -geknickte planare Zeichenstil S_k ist ein Zeichenstil, der nur planare Zeichnungen mit höchstens k Knicken pro Kante zulässt.

Der Definition 3.1 kann entnommen werden, dass für $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ und $k_1 < k_2$ der Zeichenstil S_{k_2} allgemeiner als der Zeichenstil S_{k_1} ist. Des Weiteren ist der S_0 derjenige Zeichenstil, der ausschließlich geradlinige planare Zeichnungen erlaubt. Das Qualitätsverhältnis bezüglich eines Qualitätsmaßes M zwischen planaren Zeichnungen mit k -geknickten Kanten und geradlinigen Kanten ist nach Definition 2.13 entweder gegeben durch

$$QV(S_k : S_0, M) = \sup_G \frac{M(\text{beste } S_k\text{-Zeichnung von } G)}{M(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung von } G)},$$

wenn das betrachtete Qualitätsmaß M wie bei der Winkelaufösung M_1 maximiert werden soll, oder durch

$$QV(S_k : S_0, M) = \sup_G \frac{M(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung von } G)}{M(\text{beste } S_k\text{-Zeichnung von } G)},$$

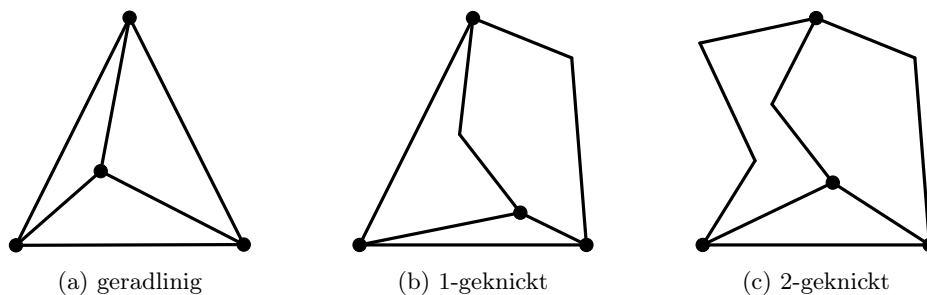


Abb. 3.1: Eine geradlinige, eine 1-geknickte und eine 2-geknickte Zeichnung des K_4 .

wenn das betrachtete Qualitätsmaß M wie bei dem Flächenbedarf M_2 , dem Kantenlängenverhältnis M_3 oder dem Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis M_4 minimiert werden soll.

3.1 Winkelauflösung

Wir beginnen mit der Untersuchung der Qualitätsverhältnisse zwischen S_k und S_0 bezüglich der Winkelauflösung, welche nach Definition 2.9 durch die Größe des kleinsten Winkels α gegeben ist, der von zwei Kanten eingeschlossen wird. Da die Ästhetik der Zeichnung durch starke Knicke in den Kanten leidet, die bei Verwendung des Zeichenstils S_k auftreten können, sollte die Definition der Winkelauflösung einer k -geknickten Zeichnung erweitert werden.

Definition 3.2 (Winkelauflösung von S_k -Zeichnungen). Die Winkelauflösung M_1 einer S_k -Zeichnung Γ ist durch den kleinsten Winkel α gegeben, der entweder von zwei Kanten eingeschlossenen, oder durch einen Knick in einer Kante verursacht wird.

Um eine untere Schranke für das Qualitätsverhältnis $QV(S_k : S_0, M_1)$ anzugeben, genügt es, einen konkreten Graphen G zu betrachten und eine beste S_0 - und eine beliebige S_k -Zeichnung von G bezüglich der Winkelauflösung zu bestimmen. Es gilt

$$QV(S_k : S_0, M_1) \geq \frac{M_1(\text{beliebige } S_k\text{-Zeichnung von } G)}{M_1(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung von } G)}.$$

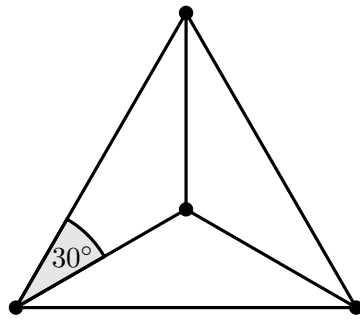
Wir werden stets versuchen, die beste S_k -Zeichnung des betrachteten Graphen G zu finden, um die untere Schranke möglichst hoch anzusetzen.

Wir betrachten zunächst den K_4 . Dieser besitzt als Graph des Tetraeders vier Knoten und sechs Kanten. Nach der Eulerschen Polyederformel wird folglich durch jede beliebige planare Zeichnung ein unbeschränktes Außengebiet und drei Innengebiete erzeugt. Da die Gleichung $m = 3n - 6$ für $n = 4$ und $m = 6$ erfüllt ist, handelt es sich beim K_4 nach Satz 2.6 um einen maximal planaren Graphen. In einer planaren geradlinigen Zeichnung des K_4 werden also alle Gebiete durch Dreiecke begrenzt. Wir können daher insbesondere folgende Beobachtung festhalten.

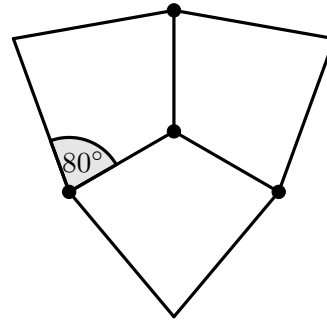
Beobachtung 3.3. *In einer planaren geradlinigen Zeichnung des K_4 wird das Außengebiet durch ein Dreieck berandet.*

Satz 3.4. *Der K_4 kann unter Voraussetzung des geradlinigen planaren Zeichenstils mit einer bestmöglichen Winkelauflösung von 30° gezeichnet werden.*

Beweis. Da die Zeichnung des K_4 insgesamt vier Knoten besitzt, wovon drei nach Beobachtung 3.3 die Eckpunkte eines äußeren Dreiecks bilden, muss der vierte Knoten im Inneren des Dreiecks platziert und jeweils mit den Eckknoten verbunden werden. Dadurch werden die Innenwinkel des äußeren Dreiecks jeweils in zwei Teile geteilt (vgl.



(a) geradlinig



(b) 1-geknickt

Abb. 3.2: Eine beste S_0 -Zeichnung des K_4 mit Winkelauflösung 30° und eine beste S_1 -Zeichnung des K_4 mit Winkelauflösung 80° .

Abbildung 3.2a). Da die Summe der Innenwinkel des äußeren Dreiecks auf insgesamt sechs Winkel aufgeteilt werden muss, gilt

$$M_1(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des } K_4) = \frac{(3-2) \cdot 180^\circ}{6} = 30^\circ.$$

□

Mit Hilfe von Knicken in den Kanten ist es möglich, das äußere Dreieck in ein n -Eck umzuformen. Dadurch kann eine Verbesserung der Winkelauflösung erreicht werden.

Satz 3.5. *Der K_4 kann unter Voraussetzung des S_k mit einer bestmöglichen Winkelauflösung von*

$$M_1(\text{beste } S_k\text{-Zeichnung des } K_4) = \min \left(\frac{(3k+1) \cdot 180^\circ}{3k+6}, 120^\circ \right)$$

gezeichnet werden.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass der K_4 höchstens mit einer Winkelauflösung von 120° gezeichnet werden kann, da von jedem Knoten drei Kanten ausgehen. Die S_k -Zeichnung des K_4 ist insofern eingeschränkt, als dass das Außengebiet durch ein Dreieck abgegrenzt wird. Jedoch kann mit Hilfe von k Knicken in den äußeren Kanten aus dem äußeren Dreieck geometrisch betrachtet ein $3(k+1)$ -Eck gebildet werden. Die Innenwinkelsumme dieses $3(k+1)$ -Ecks muss auf die sechs Innenwinkel an den äußeren Knoten und auf die $3k$ Innenwinkel an den Kantenknicken verteilt werden, sodass gilt

$$M_1(\text{beste } S_k\text{-Zeichnung des } K_4) = \min \left(\frac{(3(k+1)-2) \cdot 180^\circ}{3k+6}, 120^\circ \right).$$

□

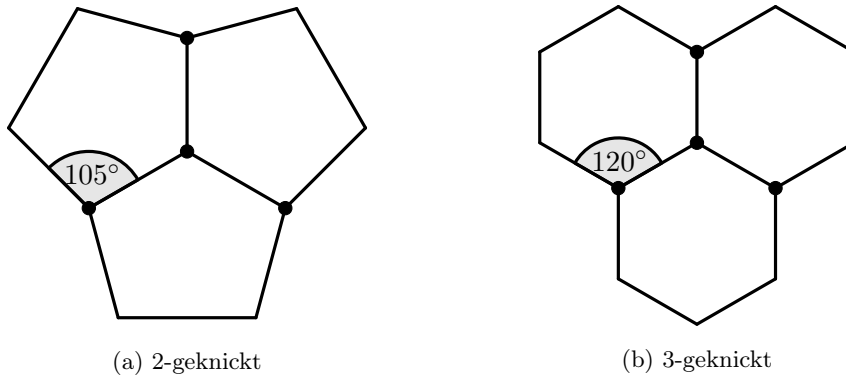


Abb. 3.3: Eine beste S_2 -Zeichnung des K_4 mit Winkelauflösung 105° und eine beste S_3 -Zeichnung des K_4 mit Winkelauflösung 120° .

In Abbildung 3.2b ist eine beste S_1 - und in Abbildung 3.3 jeweils eine beste S_2 - und S_3 -Zeichnung des K_4 bezüglich der Winkelauflösung zu sehen. Für das Qualitätsverhältnis zwischen S_k und S_0 können bezüglich der Winkelauflösung die unteren Schranken

$$\begin{aligned}
 QV(S_1 : S_0, M_1) &\geq \frac{M_1(\text{beste } S_1\text{-Zeichnung des } K_4)}{M_1(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des } K_4)} = \frac{80^\circ}{30^\circ} \approx 2,6667, \\
 QV(S_2 : S_0, M_1) &\geq \frac{M_1(\text{beste } S_2\text{-Zeichnung des } K_4)}{M_1(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des } K_4)} = \frac{105^\circ}{30^\circ} = 3,5 \text{ und} \\
 QV(S_3 : S_0, M_1) &\geq \frac{M_1(\text{beste } S_3\text{-Zeichnung des } K_4)}{M_1(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des } K_4)} = \frac{120^\circ}{30^\circ} = 4
 \end{aligned}$$

angegeben werden.

Bessere untere Schranken für das Qualitätsverhältnis $QV(S_k : S_0, M_1)$ erhalten wir, wenn wir anstatt des K_4 den Graphen des Ikosaeders betrachten. Der Ikosaedergraph besitzt zwölf Knoten und 30 Kanten, wobei von jedem Knoten fünf Kanten ausgehen. Da die Gleichung $m = 3n - 6$ für $n = 12$ und $m = 30$ erfüllt ist, handelt es sich beim Ikosaedergraphen nach Satz 2.6 ebenfalls um einen maximal planaren Graphen. In einer planaren geradlinigen Zeichnung des Ikosaedergraphen werden also alle Gebiete durch Dreiecke begrenzt. Wie beim K_4 kann daher folgende Beobachtung festgehalten werden.

Beobachtung 3.6. *Bei einer planaren geradlinigen Zeichnung des Ikosaedergraphen wird das Außengebiet durch ein Dreieck berandet.*

Satz 3.7. *Der Ikosaedergraph kann unter Voraussetzung einer geradlinigen planaren Zeichnung mit einer bestmöglichen Winkelauflösung von 15° gezeichnet werden.*

Beweis. Nach Beobachtung 3.6 ist jede planare Zeichnung des Ikosaedergraphen von einem Dreieck berandet. Da von jedem Knoten jeweils fünf Kanten ausgehen, muss die

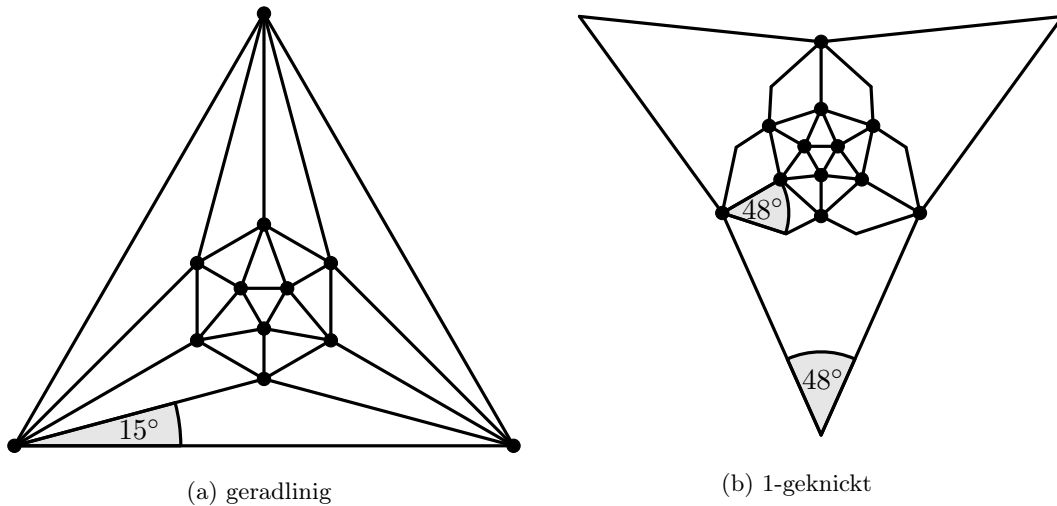


Abb. 3.4: Eine beste S_0 -Zeichnung des Ikosaedergraphen mit Winkelauflösung 15° und eine beste S_1 -Zeichnung des Ikosaedergraphen mit Winkelauflösung 48° .

Innenwinkelwinkelsumme des äußeren Dreiecks auf zwölf Winkel aufgeteilt werden (vgl. Abbildung 3.4a). Es ergibt sich somit eine Winkelauflösung von

$$M_1(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen}) = \frac{(3-2) \cdot 180^\circ}{12} = 15^\circ.$$

□

Satz 3.8. *Der Ikosaedergraph kann unter Voraussetzung des S_k mit einer bestmöglichen Winkelauflösung von*

$$M_1(\text{beste } S_k\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen}) = \min \left(\frac{(3k+1) \cdot 180^\circ}{3k+12}, 72^\circ \right)$$

gezeichnet werden.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass der Ikosaedergraph höchstens mit einer Winkelauflösung von 72° gezeichnet werden kann, da von jedem Knoten fünf Kanten ausgehen. Durch k Knicke pro Kante ist es möglich, das äußere Dreieck zu einem $3(k+1)$ -Eck aufzubiegen. Da die Innenwinkelsumme dieses $3(k+1)$ -Ecks für die zwölf Innenwinkel an den äußeren Knoten und die $3k$ Innenwinkel an den Kantenknicken zur Verfügung steht, gilt

$$M_1(\text{beste } S_k\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen}) = \min \left(\frac{(3(k+1)-2) \cdot 180^\circ}{3k+12}, 72^\circ \right).$$

□

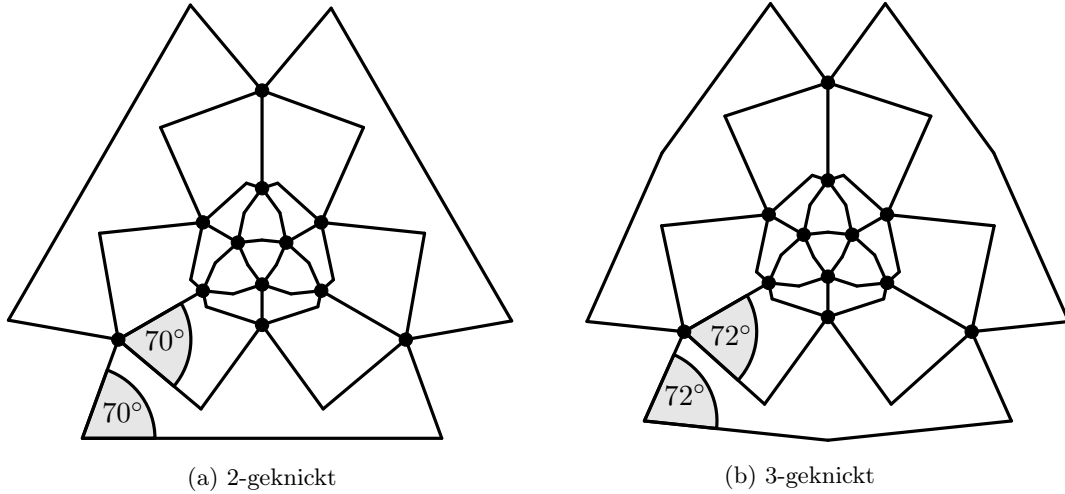


Abb. 3.5: Eine beste S_2 -Zeichnung des Ikosaedergraphen mit Winkelauflösung 70° und eine beste S_3 -Zeichnung des Ikosaedergraphen mit Winkelauflösung 72° .

In Abbildung 3.4b ist eine beste S_1 - und in Abbildung 3.5 jeweils eine beste S_2 - und S_3 -Zeichnung des K_4 bezüglich der Winkelauflösung zu sehen. Bezüglich des Qualitätsverhältnisses zwischen S_k und S_0 erhalten wir die verbesserten unteren Grenzen

$$QV(S_1 : S_0, M_1) \geq \frac{M_1(\text{beste } S_1\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen})}{M_1(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen})} = \frac{48^\circ}{15^\circ} = 3,2,$$

$$QV(S_2 : S_0, M_1) \geq \frac{M_1(\text{beste } S_2\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen})}{M_1(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen})} = \frac{70^\circ}{15^\circ} \approx 4,6667 \text{ und}$$

$$QV(S_3 : S_0, M_1) \geq \frac{M_1(\text{beste } S_3\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen})}{M_1(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen})} = \frac{72^\circ}{15^\circ} = 4,8.$$

Da wir für den K_4 und den Graphen des Ikosaeders jeweils die beste S_1 -, S_2 - und S_3 -Zeichnung bezüglich der Winkelauflösung gefunden haben, können wir als Nebenprodukt unserer Untersuchungen durch

$$QV(S_2 : S_1, M_1) \geq \frac{M_1(\text{beste } S_2\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen})}{M_1(\text{beste } S_1\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen})} = \frac{70^\circ}{48^\circ} \approx 1,4583,$$

$$QV(S_3 : S_1, M_1) \geq \frac{M_1(\text{beste } S_3\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen})}{M_1(\text{beste } S_1\text{-Zeichnung des Ikosaedergraphen})} = \frac{72^\circ}{48^\circ} = 1,5 \text{ und}$$

$$QV(S_3 : S_2, M_1) \geq \frac{M_1(\text{beste } S_3\text{-Zeichnung des } K_4)}{M_1(\text{beste } S_2\text{-Zeichnung des } K_4)} = \frac{120^\circ}{105^\circ} \approx 1,1429$$

Abschätzungen für die Qualitätsverhältnisse zwischen S_{k_2} und S_{k_1} mit $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3\}$ und $k_1 < k_2$ angeben.

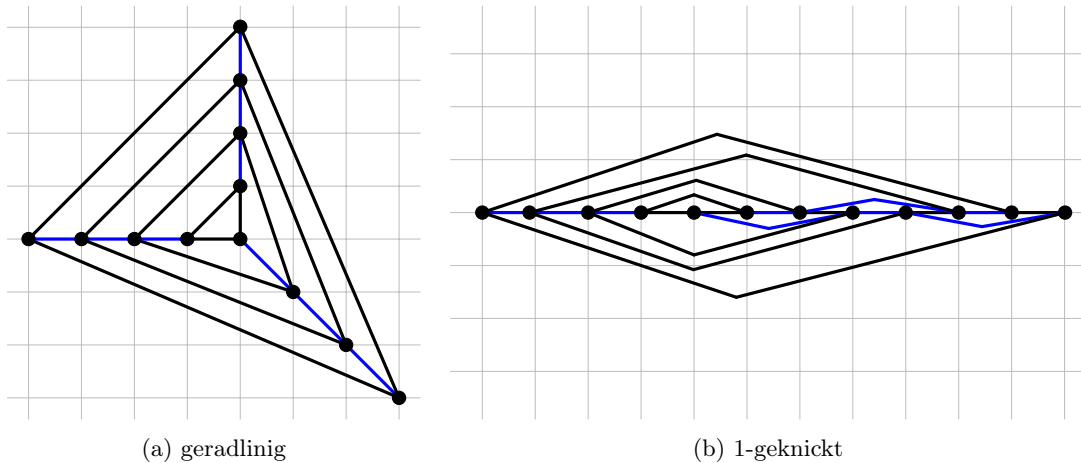


Abb. 3.6: Eine beste S_0 -Zeichnung des Graphen A_n mit Flächenbedarf $\Omega(n^2)$ und eine S_1 -Zeichnung des Graphen A_n mit Flächenbedarf $O(n)$, hier für $n = 12$.

3.2 Flächenbedarf

Wir widmen uns der Untersuchung der Qualitätsverhältnisse zwischen S_k und S_0 bezüglich des Flächenbedarfs M_2 . Wir werden zeigen, dass $QV(S_k : S_0, M_2)$ für $k \geq 1$ unendlich ist. Betrachten wir dazu den in Abbildung 3.6 angedeuteten Graphen A_n . Dies ist ein Graph mit der Knotenanzahl n . Er ist aus ineinander liegenden Dreiecken gebildet, deren Eckpunkte durch die blau markierten Kanten zu den benachbarten inneren und äußeren Dreiecken verbunden sind.

Satz 3.9. *Der Graph A_n kann unter Voraussetzung des planaren geradlinigen Zeichensstils bestenfalls mit einem Flächenbedarf von $\Omega(n^2)$ gezeichnet werden.*

Beweis. Die Anzahl der ineinander geschachtelten Dreiecke ist $\lfloor n/3 \rfloor$. Das innerste Dreieck kann auf ein 2×2 -Gitter gezeichnet werden. Für jedes Dreieck, das zu der Zeichnung hinzugefügt wird, vergrößert sich die benötigte Anzahl v der vertikalen und die benötigte Anzahl h der horizontalen Gitterpunkte jeweils um zwei. Es ergibt sich daher für die geradlinige Zeichnung des Graphen A_n ein Flächenbedarf von

$$M_2(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des Graphen } A_n) \geq \left(2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)^2.$$

□

Satz 3.10. *Der Graph A_n kann unter Voraussetzung des S_1 mit einem Flächenbedarf von $O(n)$ gezeichnet werden.*

Beweis. Unter Voraussetzung des S_1 ist es möglich, die Knoten auf einer horizontalen Gerade anzuordnen und die geforderten Kanten ober- und unterhalb dieser Gerade mit

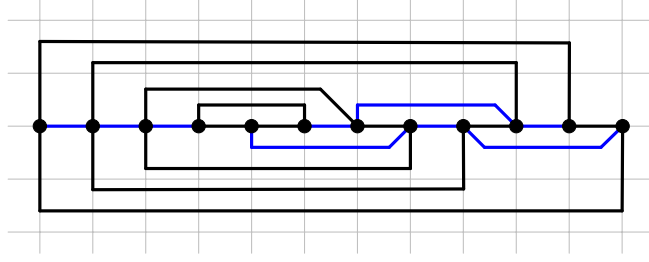


Abb. 3.7: Eine S_2 -Zeichnung des A_n mit Flächenbedarf $O(n)$ und Winkelauflösung 45° , hier für $n = 12$.

Hilfe eines Knicks verlaufen zu lassen. Dabei können die Kanten beliebig nahe an die Knotenlinie gedrückt werden. Falls der Abstand von der horizontalen Linie zum obersten und zum untersten Kantenknick jeweils höchstens 1 ist, müssen nur 3 vertikale Gitterpunkte eingefordert werden. Für die 1-geknickte Zeichnung des Graphen A_n wird daher ein Gitter der Größe

$$M_2(S_1\text{-Zeichnung des Graphen } A_n \text{ wie in Abbildung 3.6b}) = 3n$$

benötigt. □

Dadurch können wir für das Qualitätsverhältnis zwischen S_1 und S_0 eine untere Schranke

$$\begin{aligned} QV(S_1 : S_0, M_2) &\geq \frac{M_2(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des Graphen } A_n)}{M_2(S_1\text{-Zeichnung des Graphen } A_n \text{ wie in Abbildung 3.6b})} \\ &= \frac{(2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor)^2}{3n} = \Omega(n) \end{aligned}$$

angeben, welche linear in der Anzahl n an Knoten wächst. Mit Hilfe des Graphen A_n konnte bereits mit einer ähnlichen Argumentation gezeigt werden, dass das Qualitätsverhältnis zwischen geradlinigen und gebogenen planaren Zeichnungen unendlich ist [HvKKR14].

Es ist zu bemängeln, dass die S_1 -Zeichnung des Graphen A_n mit Flächenbedarf $O(n)$ nur mit einer deutlichen Verschlechterung der Winkelauflösung bewerkstelligt werden kann. In Abbildung 3.7 sehen wir, wie dieses Problem durch Verwendung des S_2 behoben werden kann. Mit einem zweiten Knick in der Kante ist es möglich, die Kanten beliebig flach zu zeichnen, ohne die Winkel zwischen den Kanten immer kleiner wählen zu müssen. Wir erhalten dadurch eine ästhetische S_2 -Zeichnung, die die Verbindungen zwischen den Knoten wesentlich besser visualisiert als die S_1 -Zeichnung in Abbildung 3.6b und für die gilt

$$M_2(S_2\text{-Zeichnung des Graphen } A_n \text{ wie in Abbildung 3.7}) = 3n.$$

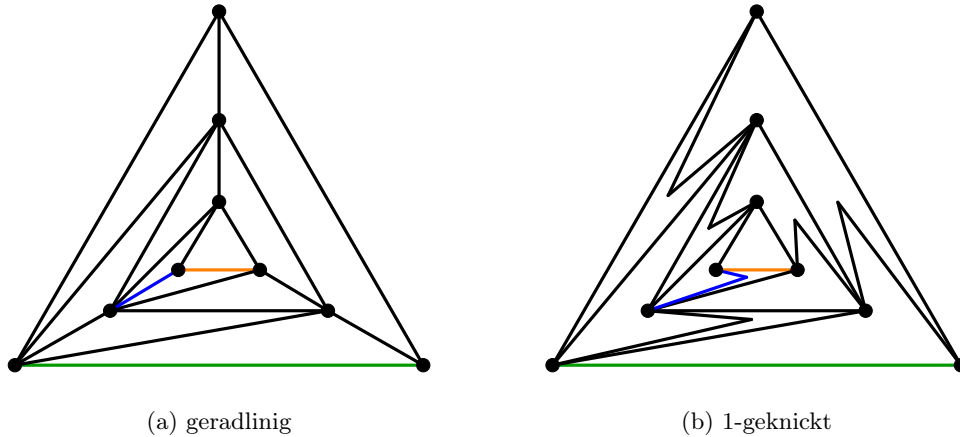


Abb. 3.8: Eine beste S_0 -Zeichnung des Graphen E_n mit Kantenlängenverhältnis $\Omega(n)$ und eine S_1 -Zeichnung des Graphen E_n mit Kantenlängenverhältnis $O(1)$, hier für $n = 12$.

3.3 Kantenlängenverhältnis

Wir zeigen, dass die Qualitätsverhältnisse zwischen S_k und S_0 bezüglich des Kantenlängenverhältnisses für $k \geq 1$ unendlich sind. Dazu betrachten wir den in Abbildung 3.8 angedeuteten Graphen E_n . Dieser hat eine ähnliche Bauart wie der zuvor in Abschnitt 3.2 vorgestellte A_n . Er unterscheidet sich dadurch, dass jeweils an einem Eckpunkt jedes Dreiecks nicht nur Kanten zu einem, sondern zu allen drei Eckpunkten des inneren Dreiecks führen.

Satz 3.11. *Der Graph E_n kann unter Voraussetzung des planaren geradlinigen Zeichenstils bestenfalls mit einem Kantenlängenverhältnis von $\Omega(n)$ gezeichnet werden.*

Beweis. Mit einer Erhöhung der Knotenanzahl geht eine Vermehrung der inneren Dreiecke einher (vgl. Abbildung 3.8a). Dabei ist zu beobachten, dass es innere Kanten in der Zeichnung geben muss, die im Vergleich zu der grün markierten äußeren Kante beliebig klein werden. Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder man lässt die orange markierte Dreieckskante oder die blau markierte Verbindungskante zwischen den Dreiecken immer kleiner werden. Dies führt letztendlich zu dem Ergebnis, dass das Kantenlängenverhältnis

$$M_3(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des Graphen } E_n) = \Omega(n)$$

linear wächst in der Anzahl n an Knoten. □

Satz 3.12. *Der Graph E_n kann unter Voraussetzung des S_1 mit einem Kantenlängenverhältnis von $O(1)$ gezeichnet werden.*

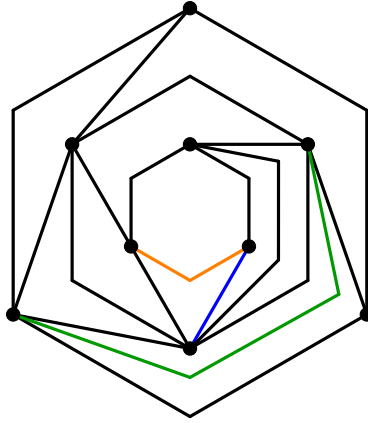


Abb. 3.9: Eine S_2 -Zeichnung des Graphen E_n mit Kantenlängenverhältnis $O(1)$.

Beweis. Die Verbindungskanten zwischen den Dreiecken lassen sich durch einen Knick verlängern und die inneren Dreiecke können beliebig nahe an die äußeren Dreiecke gelegt werden. Dadurch lässt sich ein Kantenlängenverhältnis

$$M_3(S_1\text{-Zeichnung des Graphen } E_n \text{ wie in Abbildung 3.8b}) = 1 + \varepsilon$$

erreichen, wobei $\varepsilon > 0$. □

Insgesamt erhalten wir ein Qualitätsverhältnis zwischen S_1 und S_0 von

$$\begin{aligned} QV(S_1 : S_0, M_3) &\geq \frac{M_3(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des Graphen } E_n)}{M_3(S_1\text{-Zeichnung des Graphen } E_n \text{ wie in Abbildung 3.8b})} \\ &= \frac{\Omega(n)}{1 + \varepsilon} = \Omega(n). \end{aligned}$$

Um das bessere Kantenlängenverhältnis in Abbildung 3.8b zu generieren, wurden die Verbindungskanten zwischen den Dreiecken künstlich durch einen starken Knick verlängert. Da die Ästhetik der Zeichnung hierbei eher verschlechtert als verbessert wird, ist es eine Überlegung wert, Knicke zu verbieten, die einen Winkel von 90° überschreiten. In Abbildung 3.9 ist der Graph E_n durch eine S_2 -Zeichnung visualisiert, die mit deutlich schwächeren Knicken ein endliches Kantenlängenverhältnis sichert. Schiebt man die Zeichnung dicht zusammen, erhält man ein beschränktes Verhältnis zwischen der grün markierten längsten Kante und der kürzesten Kante. Abhängig davon, wie die Zeichnung zusammengeschoben wird, ist die kürzeste Kante durch eine orange markierte geknickte Dreiecksseite oder durch eine blau markierte Verbindungskante gegeben. Das Qualitätsverhältnis dieser Zeichnung bezüglich des Kantenlängenverhältnisses ist durch

$$M_3(S_2\text{-Zeichnung des Graphen } E_n \text{ wie in Abbildung 3.9}) = 3 + \varepsilon$$

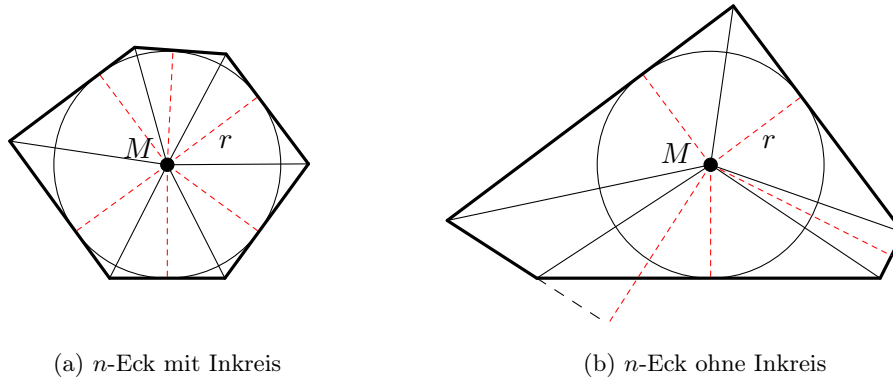


Abb. 3.10: Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen dem größtmöglichen Radius r , dem Flächeninhalt A und Umfang u eines konvexen n -Ecks.

gegeben, wobei $\varepsilon > 0$.

Hoffmann et al. [HvKKR14] haben den Graphen E_n ebenfalls benutzt und zwar, um zu zeigen, dass das Qualitätsverhältnis zwischen S_0 und dem gebogenen planaren Zeichenstil unendlich ist.

3.4 Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis

Abschließend schätzen wir die Qualitätsverhältnisse zwischen S_k und S_0 bezüglich des Knoten-Kanten-Abstandsverhältnisses mit Hilfe des K_4 ab. Wir haben bereits festgestellt, dass in einer planaren geradlinigen Zeichnung des K_4 das Außengebiet durch ein Dreieck berandet ist. Durch Knicke in den äußeren Kanten ist es möglich, das äußere Dreieck zu einem n -Eck aufzubiegen. Wir werden uns im Folgenden damit beschäftigen, wie das Außengebiet gezeichnet werden muss, damit ein optimales Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis generiert werden kann. Wir stellen zunächst fest, dass das Außengebiet konvex sein muss, da sich das Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis nicht verbessert, wenn eine Kante nach Innen gebogen wird.

Lemma 3.13. *Sei M derjenige Punkt im Inneren eines konvexen n -Ecks, für den das Minimum r der Abstände von M zu den Seiten des n -Ecks maximal ist. Für einen vorgegebenen Umfang u ist r genau dann maximal, wenn das n -Eck regelmäßig ist.*

Beweis. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des größtmöglichen Kreises k innerhalb des n -Ecks. Der Kreis k besitzt den Radius r und ist nicht zwangsläufig ein Inkreis, da nur diejenigen n -Ecke einen Inkreis besitzen, deren Winkelhalbierenden sich in einem Punkt schneiden [AF15]. Für den Radius r lässt sich eine obere Grenze in Abhängigkeit von dem Flächeninhalt A und dem Umfang u des n -Ecks angeben. Um dies nachzuvollziehen, sei Abbildung 3.10 betrachtet, in der zum einen der Fall beleuchtet wird, dass das n -Eck einen Inkreis besitzt (vgl. Abbildung 3.10a), zum anderen der Fall, dass das n -Eck keinen

Inkreis besitzt (vgl. Abbildung 3.10b). Da es sich in beiden Fällen um ein konvexes n -Eck handelt, kann das Dreieck durch Verbinden der Ecken mit dem Punkt M in n Dreiecke unterteilt werden, die jeweils eine Seite des ursprünglichen n -Ecks und eine zugehörige in der Abbildung rot markierte Höhe besitzen, die mindestens der Länge r entspricht. Für ein konvexes n -Eck gilt daher

$$A \geq \frac{u \cdot r}{2} \text{ und somit } r \leq \frac{2A}{u}.$$

Dabei gilt genau dann die Gleichheit, wenn das n -Eck einen Inkreis besitzt. Für vorgegebenen Umfang u ist der Flächeninhalt A und folglich die obere Grenze $2A/u$ für den Radius r genau dann maximal, wenn das n -Eck regelmäßig ist [Tót72]. Da jedes regelmäßige n -Eck einen Inkreis besitzt, ist r in diesem Fall gleich der oberen Grenze und somit maximal. \square

Satz 3.14. *Der K_4 kann unter Voraussetzung einer geradlinigen planaren Zeichnung mit einem bestmöglichen Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis von $2\sqrt{3}$ gezeichnet werden.*

Beweis. Wir konstruieren eine beste S_0 -Zeichnung des K_4 und geben hierfür einen Umfang u vor. Drei Knoten werden auf den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks und der vierte Knoten auf dem Inkreismittelpunkt platziert (vgl. Abbildung 3.11a). Nach Lemma 3.13 ist damit gewährleistet, dass das Minimum r der Abstände des mittleren Knotens zu den äußeren Kanten maximal ist. Gleichzeitig sorgt die Regelmäßigkeit des Dreiecks für eine gleichmäßige Aufteilung des Umfangs u auf die äußeren Kanten, sodass die längste Seitenkante l minimal ist. Somit ist diese S_0 -Zeichnung bezüglich des Knoten-Kanten-Abstandsverhältnisses optimal. Die längste Kante ist grün und der kürzeste Knoten-Kanten-Abstand rot markiert. Da wir die Länge der Kanten von den Eckknoten zum Knoten in der Mitte mit 1 festlegen, berechnet sich die längste Kante durch $2 \sin(60^\circ)$ und der kürzeste Knoten-Kanten-Abstand durch $\cos(60^\circ)$. Das Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis ist daher durch

$$M_4(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung des } K_4) = \frac{2 \sin(60^\circ)}{\cos(60^\circ)} = 2 \tan(60^\circ) = 2\sqrt{3}$$

gegeben. \square

Satz 3.15. *Der K_4 kann unter Voraussetzung des S_k mit einem bestmöglichen Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis von*

$$M_4(\text{beste } S_k\text{-Zeichnung von } K_4) = 2(k+1) \tan\left(\frac{60^\circ}{k+1}\right)$$

gezeichnet werden.

Beweis. Wir konstruieren eine beste S_k -Zeichnung des K_4 und geben hierfür einen Umfang u vor. Drei Knoten werden gleichmäßig auf den Ecken eines regelmäßigen $3(k+1)$ -Ecks und der vierte Knoten auf dessen Inkreismittelpunkt platziert. Nach Lemma 3.13

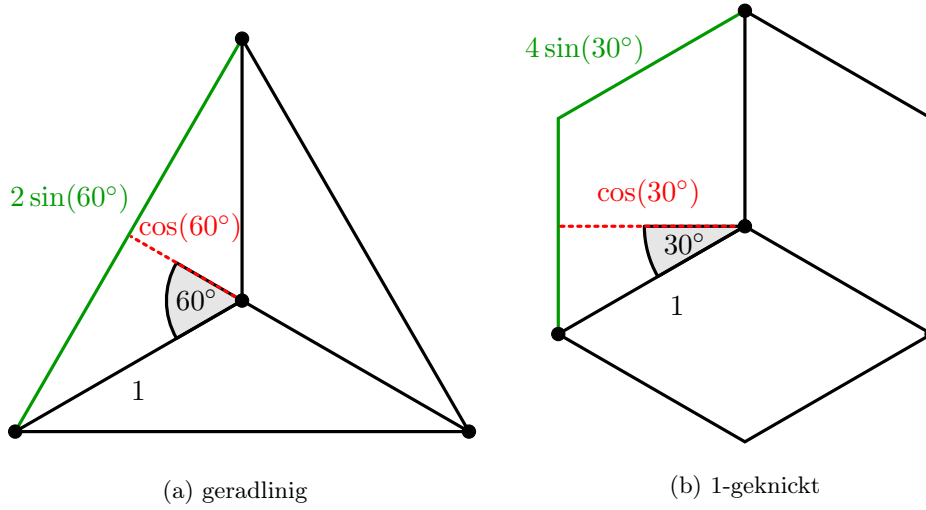


Abb. 3.11: Eine beste S_0 -Zeichnung des K_4 mit Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis $2\sqrt{3} \approx 3,4641$ und eine beste S_1 -Zeichnung des K_4 mit Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis $4\sqrt{3}/3 \approx 2,3094$.

ist damit gewährleistet, dass das Minimum r der Abstände des mittleren Knotens zu den äußeren Kanten maximal ist. Der Umfang u kann bei einem regelmäßigen $3(k+1)$ -Eck gleichmäßig auf die drei äußeren Kanten aufgeteilt werden, sodass die längste Kantenlänge l minimal ist. Eine solche S_k -Zeichnung ist somit bezüglich des Knoten-Kanten-Abstandsverhältnisses optimal. Sei der Abstand zwischen den äußeren und dem mittleren Knoten mit 1 festgelegt. In Abhängigkeit der erlaubten Knicke k pro Kante ist die grün markierte äußere Kante durch $2(k+1)\sin(60^\circ/(k+1))$ und der rot markierte Abstand des mittleren Knotens zu den äußeren Kanten mit $\cos(60^\circ/(k+1))$ gegeben (vgl. Abbildung 3.13a). Für eine beste S_k -Zeichnung bezüglich des Knoten-Kanten-Abstandsverhältnisses gilt daher

$$M_4(\text{beste } S_k\text{-Zeichnung von } K_4) = \frac{2(k+1)\sin\left(\frac{60^\circ}{k+1}\right)}{\cos\left(\frac{60^\circ}{k+1}\right)} = 2(k+1)\tan\left(\frac{60^\circ}{k+1}\right).$$

□

In Abbildung 3.11b ist eine beste S_1 - und in Abbildung 3.12 jeweils eine beste S_2 - und S_3 -Zeichnung zu sehen. Für das Qualitätsverhältnis zwischen S_k und S_0 erhalten wir

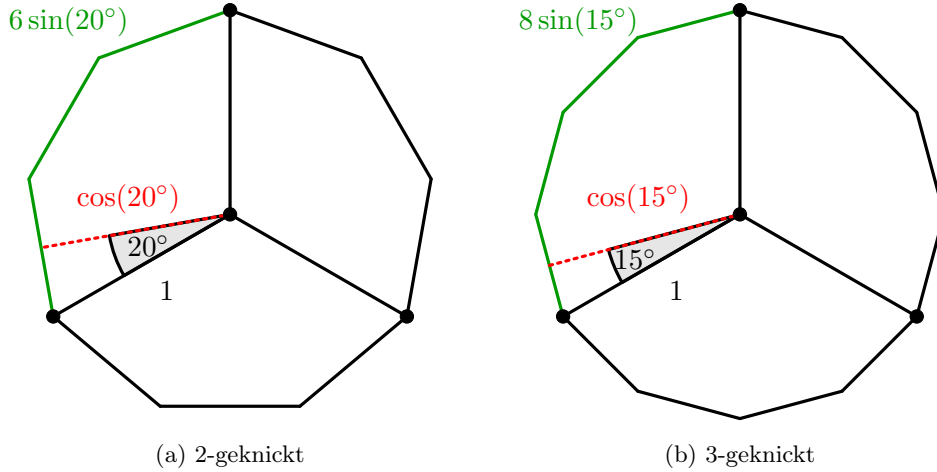


Abb. 3.12: Eine beste S_2 -Zeichnung des K_4 mit Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis $6 \tan(20^\circ) \approx 2,1838$ und eine beste S_3 -Zeichnung des K_4 mit Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis $8 \tan(15^\circ) \approx 2,1436$.

bezüglich des Knoten-Kanten-Abstandsverhältnisses die untere Schranke

$$\begin{aligned} QV(S_k : S_0, M_4) &\geq \frac{M_4(\text{beste } S_0\text{-Zeichnung von } K_4)}{M_4(\text{beste } S_k\text{-Zeichnung von } K_4)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2(k+1) \tan\left(\frac{60^\circ}{k+1}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{k+1} \cot\left(\frac{60^\circ}{k+1}\right). \end{aligned}$$

Hoffman et al. [HvKKR14] lieferten mit $3\sqrt{3}/\pi$ bereits eine untere Schranke für das Qualitätsverhältnis zwischen dem gebogenen planaren Zeichenstil und S_0 . In diesen Untersuchungen wurde ebenfalls der K_4 betrachtet. Es konnte gezeigt werden, dass es sich bei der Zeichnung in Abbildung 3.13b um eine beste gebogene planare Zeichnung bezüglich des Knoten-Kanten-Abstandsverhältnisses handelt. Da sich die beste S_k -Zeichnung des K_4 für wachsendes k dieser gebogenen Zeichnung immer weiter annähert, gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} QV(S_k : S_0, M_4) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{3}}{2(k+1) \tan\left(\frac{60^\circ}{k+1}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \approx 1,6540.$$

Da wir für den K_4 jeweils die beste S_k -Zeichnung bezüglich M_4 gefunden haben, können wir durch

$$QV(S_{k_2} : S_{k_1}, M_4) \geq \frac{M_4(\text{beste } S_{k_1}\text{-Zeichnung des } K_4)}{M_4(\text{beste } S_{k_2}\text{-Zeichnung des } K_4)} = \frac{(k_1+1) \tan\left(\frac{60^\circ}{k_1+1}\right)}{(k_2+1) \tan\left(\frac{60^\circ}{k_2+1}\right)}$$

für beliebige $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit $k_1 < k_2$ untere Schranken für das Qualitätsverhältnis zwischen S_{k_2} und S_{k_1} angeben.

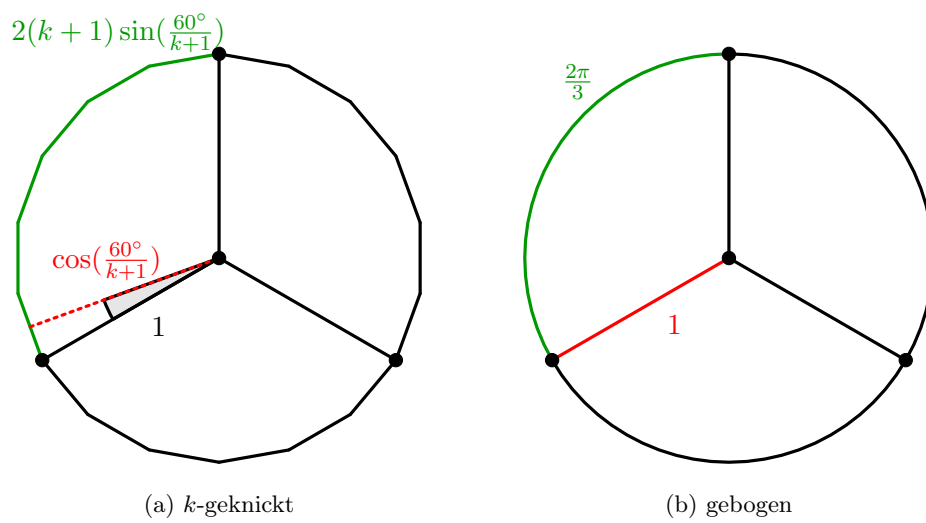


Abb. 3.13: Eine beste S_k -Zeichnung des K_4 mit Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis $2(k+1)\tan(60^\circ/(k+1))$ und eine beste gebogene planare Zeichnung des K_4 mit Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis $2\pi/3 \approx 2,0944$.

4 Fazit und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden für planare Graphen Qualitätsverhältnisse zwischen dem k -geknickten planaren Zeichenstil S_k und dem geradlinigen planaren Zeichenstil S_0 untersucht. Dabei konnten in Kapitel 3 jeweils untere Schranken bezüglich der Qualitätsmaße Winkelauflösung, Flächenbedarf, Kantenlängenverhältnis und Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis bestimmt werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Um eine solche untere Schranke zu bestimmen, haben wir jeweils einen konkreten Graphen betrachtet und dessen beste geradlinige Zeichnung bezüglich einer der vier Qualitätsmaße bestimmt. Anschließend haben wir untersucht, inwiefern es durch die Verwendung des Zeichenstils S_k möglich ist, das jeweilige Qualitätsmaß zu optimieren. Da wir bei der Untersuchung des Qualitätsverhältnisses bezüglich der Winkelauflösung in Abschnitt 3.1 für den K_4 und den Graphen des Ikosaeders jeweils eine beste k -geknickte Zeichnung für $1 \leq k \leq 3$ gefunden haben, konnten wir das Qualitätsverhältnis zwischen S_{k_2} und S_{k_1} für $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3\}$ und $k_1 < k_2$ nach unten abschätzen. In Abschnitt 3.4 war es uns bezüglich des Knoten-Kanten-Abstandsverhältnisses sogar möglich, für den K_4 jeweils die beste k -geknickte Zeichnung für alle $k \in \mathbb{N}$ anzugeben, wodurch wir das Qualitätsverhältnis zwischen S_{k_2} und S_{k_1} für alle $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ und $k_1 < k_2$ ebenfalls nach unten abschätzen konnten. Des Weiteren haben wir in Abschnitt 3.2 beziehungsweise in Abschnitt 3.3 gezeigt, dass das Qualitätsverhältnis zwischen S_k und S_0 sowohl bezüglich des Flächenbedarfs als auch bezüglich des Kantenlängenverhältnisses für $k \geq 1$ jeweils unendlich ist.

Die Untersuchungen der Qualitätsverhältnisse zwischen S_k und S_0 waren in dieser Arbeit auf die Betrachtung von planaren Graphen beschränkt. Für weitere Forschungsarbeiten könnten andere Typen von Graphen, wie zum Beispiel Bäume, beleuchtet werden. Es wäre außerdem interessant, die Untersuchungen zu den Qualitätsverhältnissen zwischen S_{k_2} und S_{k_1} für $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ und $k_1 < k_2$ fortzuführen, für die wir bereits bezüglich der

| Planare Graphen | $S_1 : S_0$ | $S_2 : S_0$ | $S_k : S_0$, wobei $k \geq 3$ |
|----------------------------------|-------------|--------------------|---|
| Winkelauflösung | $\geq 3,2$ | $\geq 4,6666\dots$ | $\geq 4,8$ |
| Kantenlängenverhältnis | ∞ | ∞ | ∞ |
| Flächenbedarf | ∞ | ∞ | ∞ |
| Knoten-Kanten-Abstandsverhältnis | $\geq 1,5$ | $\geq 1,5862\dots$ | $\geq \frac{\sqrt{3}}{k+1} \cot\left(\frac{60^\circ}{k+1}\right)$ |

Tab. 4.1: Qualitätsverhältnisse für planare Graphen zwischen S_0 und S_k bezüglich der Winkelauflösung, des Flächenbedarfs, des Kantenlängenverhältnisses und des Knoten-Kanten-Abstandsverhältnisses.

Winkelauflösung und des Knoten-Kanten-Abstandsverhältnisses untere Schranken ermitteln konnten. Neben den k -geknickten Zeichenstilen, die wir in dieser Arbeit betrachtet haben, wäre die Betrachtung weiterer Zeichenstile und deren Qualitätsverhältnisse von Interesse. Weiterführende Untersuchungen könnten möglicherweise um zusätzliche Qualitätsmaße erweitert werden.

Es stellt sich außerdem die Frage, inwiefern sich Zeichenstile bezüglich eines Qualitätsmaßes unterscheiden, wenn man zusätzlich gewisse Mindestanforderungen bezüglich anderer Qualitätsmaße festlegt. Eine solche Herangehensweise würde die Gesamtheit der Qualitätsunterschiede zwischen verschiedenen Zeichenstilen besser widerspiegeln, da die Verbesserung des einen Qualitätskriteriums häufig mit einer Verschlechterung eines anderen Qualitätskriteriums einhergeht. Dieses Phänomen konnten wir in unseren Untersuchungen mehrfach beobachten. Beispielsweise war es uns in Abschnitt 3.2 nur möglich, zwischen S_1 und S_0 bezüglich des Flächenbedarfs ein Qualitätsverhältnis von unendlich zu erzeugen, indem wir in der S_1 -Zeichnung des Graphen A_n eine sehr schlechte Winkelauflösung in Kauf genommen haben.

Ein weiterer interessanter Ansatz für die zukünftige Forschung ist der qualitative Vergleich von verschiedenen Zeichenstilen im dreidimensionalen Raum.

Literaturverzeichnis

- [AF15] Ilka Agricola und Thomas Friedrich: *Elementargeometrie: Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht*. Springer Spektrum, 4. Auflage, 2015. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-06731-1>.
- [DETT99] Giuseppe Di Battista, Peter Eades, Roberto Tamassia und Ioannis G. Tollis: *Graph Drawing: Algorithms for the Visualization of Graphs*. Prentice Hall, 1999. <https://books.google.de/books?id=Dt4eAQAAIAAJ>.
- [HvKKR14] Michael Hoffmann, Marc van Kreveld, Vincent Kusters und Günter Rote: Quality ratios of measures for graph drawing styles. In: *Proceedings of the 26th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG'14)*, Seiten 33–39, 2014. <https://cccg.ca/proceedings/2014/papers/paper05.pdf>.
- [KN09] Sven Oliver Krumke und Hartmut Noltemeier: *Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen*. Springer-Verlag, 2009. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2264-2>.
- [Tót72] László Fejes Tóth: *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 1972. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-01206-2>.
- [vK11] Marc van Kreveld: The quality ratio of RAC drawings and planar drawings of planar graphs. In: Ulrik Brandes und Sabine Cornelsen (Herausgeber): *International Symposium on Graph Drawing (GD'10)*, Band 6502 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 371–376. Springer-Verlag, 2011. https://doi.org/10.1007/978-3-642-18469-7_34.

Erklärung

Hiermit versichere ich die vorliegende Abschlussarbeit selbstständig verfasst zu haben, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben, und die Arbeit bisher oder gleichzeitig keiner anderen Prüfungsbehörde unter Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt zu haben.

Würzburg, den 3. Juli 2020

.....
Sebastian Müller