Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Approximationsalgorithmen für Set-Cover-Probleme mit Rechtecken

Maike Rösch

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Grundlagen

Das Set-Cover-Problem ist NP-schwer.

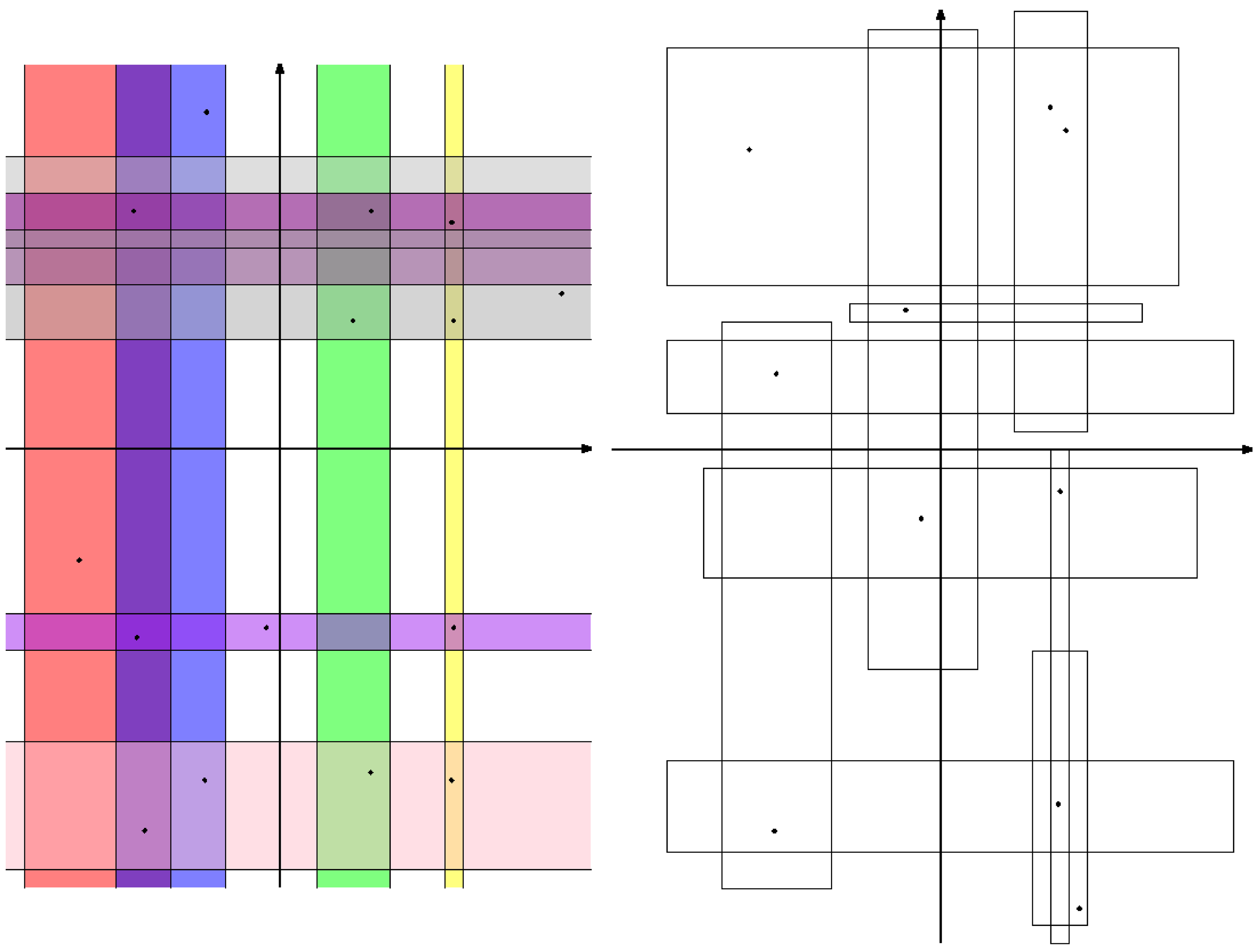
Ein Approximationsalgorithmus erreicht die maximal mögliche logarithmische Güte.

Für den geometrischen Fall, bei dem im Allgemeinen Punkte durch Rechtecke überdeckt werden, gibt es auch einen Approximationsalgorithmus, der die hier maximal mögliche O(loglog OPT) Güte erreicht.

Es ergibt sich die Frage nach Spezialfällen, die durch Punkte-werden-von-Rechtecken-überdeckt gelöst werden könnten, die eventuell genauere Approximationsalgorithmen haben.

Spezialfälle wie Rechtecke, die sich gar nicht oder an genau vier Randpunkten schneiden

Oder Slabs: „Rechtecke“ bei denen entweder Länge oder Breite unendlich ist.



Darstellung des Problems als Lineares Programm:

$$\begin{aligned} \text{min:} \quad & c^T x \\ \textit{subject to:} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

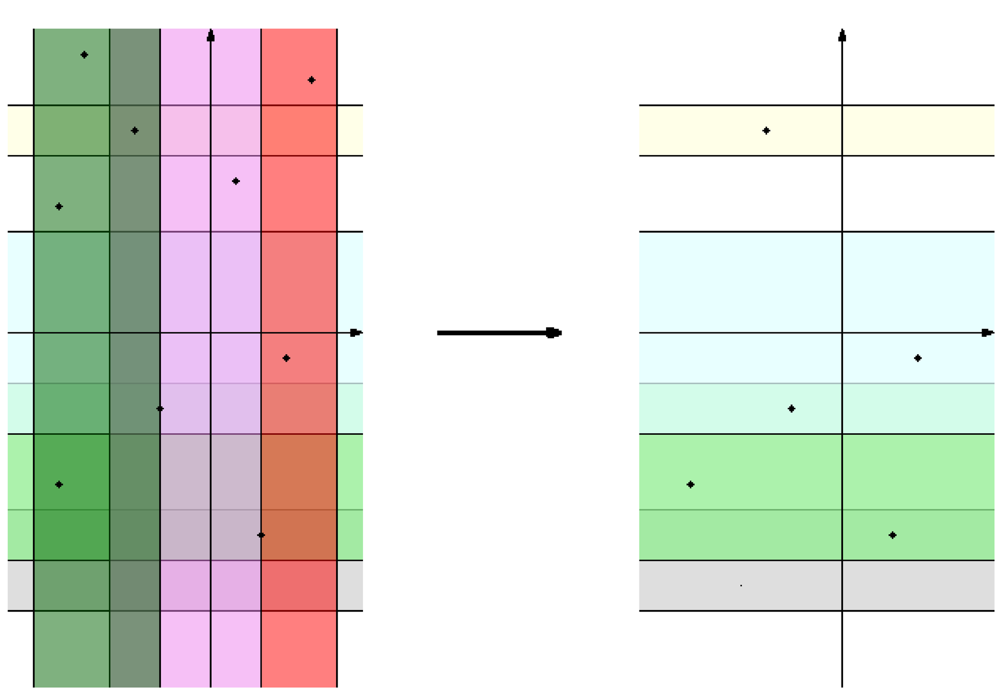
Hierbei ist c ein Kostenvektor, x die Variable, A eine Matrix und b ein Vektor. Spricht man von ganzzahligen Linearen Programm, so sind alle Koordinaten von $x = 0$ oder $= 1$. Sonst hat man ein relaxiertes Lineares Programm.

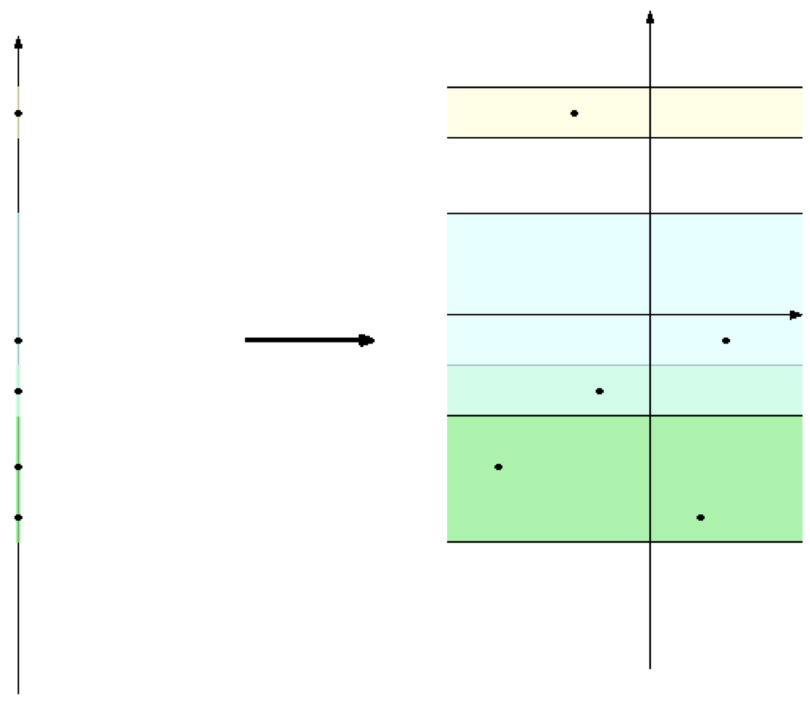
Cover-Slabs

Eigenschaften:

- Es gebe für ein Set-Cover Problem eine Aufteilung der überdeckenden Menge in zwei Mengen, so dass für jede Aufteilung der Grundmenge diese eine Instanz eines anderen Set-Cover-Problems bildet, wenn die Teile der Grundmenge von der überdeckenden Teilmenge überdeckt werden. Unter dieser Bedingung kann man das ursprüngliche Set-Cover-Problem so lösen, dass sich die Approximationsgüte additiv aus der der Teil-Set-Cover-Probleme ergibt.
- Intervall-Punkt-Covering kann mit linearer Programmierung exakt gelöst werden

Verfahrensidee:

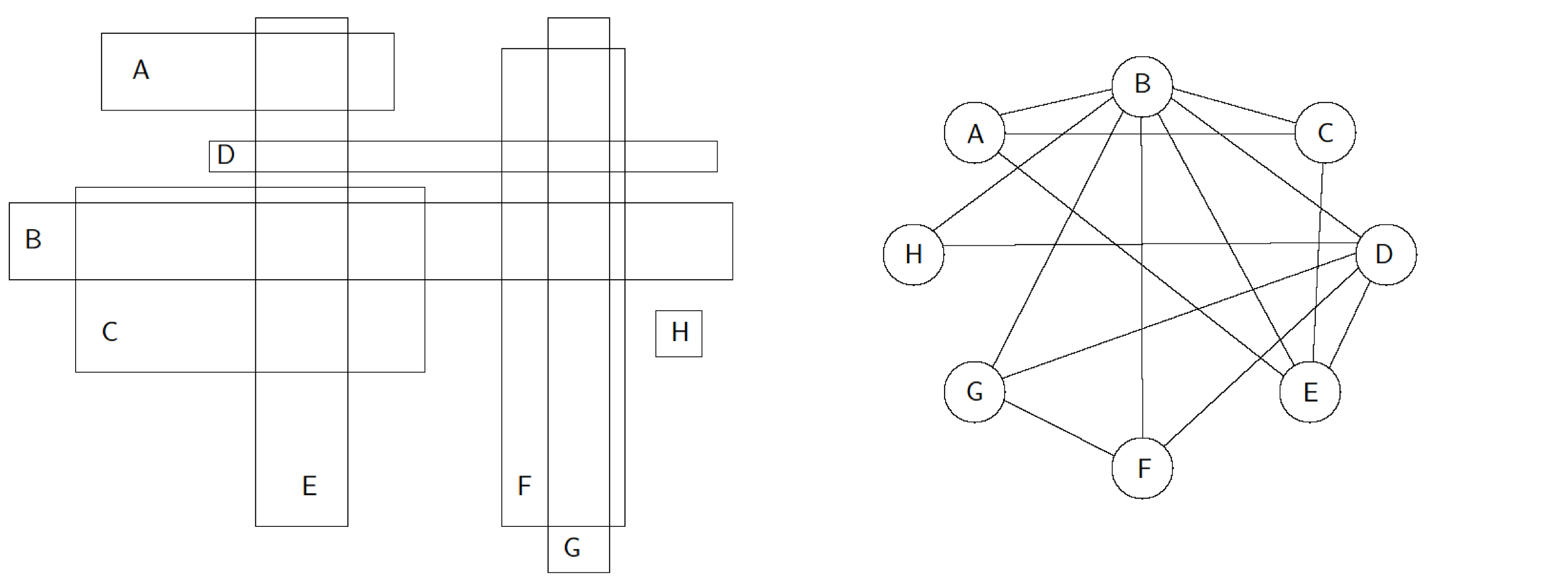




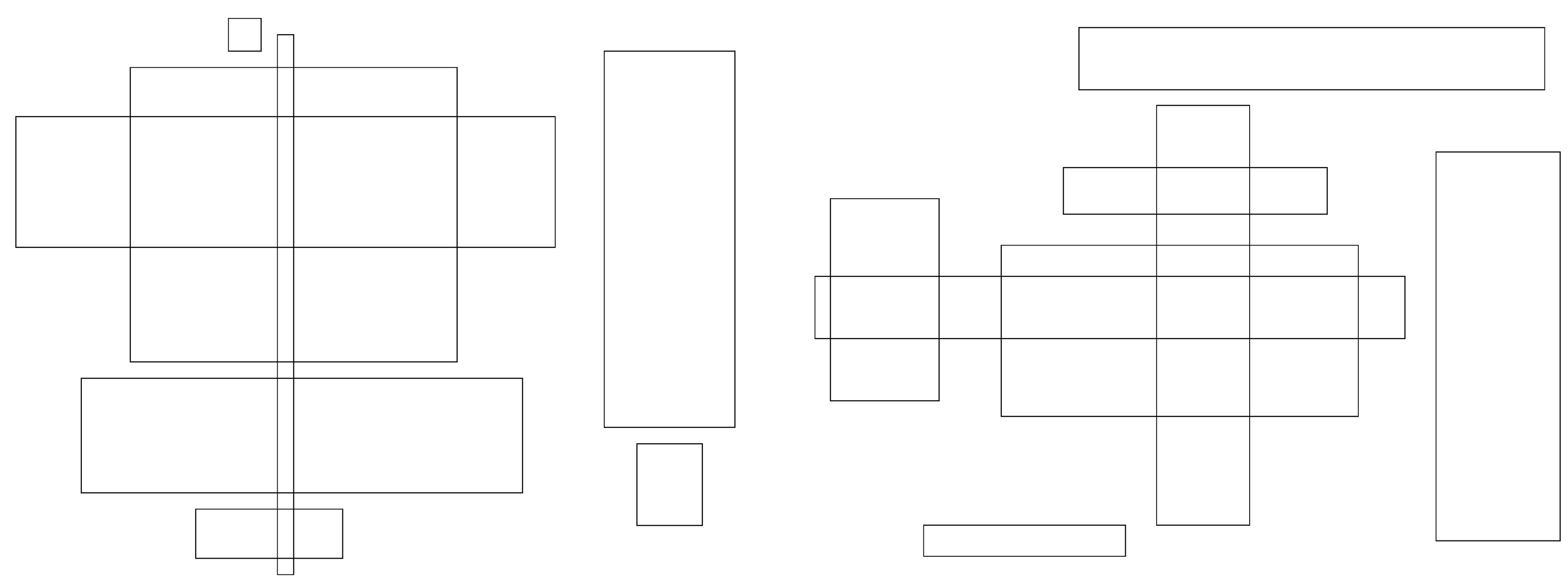
→ 2-LP-Approximationsalgorithmus für Cover-Slabs

Cover-Rechtecke

- **Vermutung:** Für eine beliebige Probleminstanz von COVER-RECHTECK kann eine nicht-ganzzahlige Extrempunktlösung nicht für alle Koordinaten $\neq 0$ erfüllen, dass sie $\leq \frac{1}{3}$ sind.
- Wenn diese Vermutung gilt, findet sich über Aufrunden ein iterativer 3-LP-Approximationsalgorithmus
- Eine Beweisidee wäre über einen Vergleichbarkeitsgraph zu argumentieren



- Allerdings gibt es hierbei schnell viele Fälle, die unterschieden werden müssen
- Eine weitere Idee wäre, die Rechtecke nach Inklusionen zu ordnen und damit entscheiden zu können, ob ein Rechteck rechts bzw. links von einem Anderen liegen müsste. Dabei ist nicht trivial definierbar, was links bzw. rechts von einem Rechteck bedeutet, so dass alle Rechtecke in Relation zueinander stehen



Zusammenfassung & Ausblick

Ergebnisse:

Es wurde ein 2-LP-Approximationsagorithmus für Cover-Slabs gefunden.

Für Cover-Rechtecke eine Vermutung mit möglichen Beweisideen entwickelt und diskutiert, die zu einer 3-LP-Approximation führen würde.

Ausblick:

Offene Fragen sind, ob Cover-Slabs nicht einen besseren konstanten Approximationsalgorithmus hat.

Ebenfalls bleibt offen, ob und wie die Beweisideen weiterentwickelt werden müssen. Es bleibt auch die Frage ob andere Ansätze als lineare Programmierung eventuell bessere Ergebnisse erzielen.