

Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Informatik I
Effiziente Algorithmen und wissensbasierte Systeme

Bachelorarbeit

Konzentrische U-Bahn-Linienpläne

Magnus Lechner

Eingereicht am 21. Januar 2014

Betreuer:
Prof. Dr. Alexander Wolff
Dipl.-Inf. Martin Fink

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Grundlagen	8
2.1	Graphentheorie	8
2.2	Koordinatensystem	9
2.3	Gemischt-Ganzzahliges Lineares Programm	10
3	Darstellung und Modellierung eines Liniennetzwerkes	12
3.1	Darstellung eines Liniennetzwerkes	12
3.2	Modellierung eines Liniennetzwerkes	13
3.2.1	Grundlegende Bedingungen	14
3.2.2	Optimierungskriterien	15
4	Heuristischer Ansatz	16
4.1	Vereinfachung des Graphen	17
4.2	Zuordnung von Knoten zu Repräsentanten	17
4.2.1	Parameter	18
4.2.2	Ablauf der Zuordnung	20
4.2.3	Vermeidung von Mehrfachabbildung	21
4.2.4	Verteilung der Entfernten Grad-2-Knoten	21
4.3	Lineares Programm	22
4.3.1	Nebenbedingungen	22
4.3.2	Zielfunktion	23
4.4	Implementierung und Ergebnisse	24
4.4.1	Implementierung	24
4.4.2	Ergebnisse und Probleme	25
5	Gemischt-Ganzzahliges Programm	27
5.1	Nebenbedingungen	27
5.1.1	Berücksichtigung des Eingabegraphen	28
5.1.2	Kreuzungen	28
5.1.3	Überlappungen	32
5.1.4	Mehrfachabbildung	39
5.2	Zielfunktion	40
5.2.1	Berücksichtigung der Ursprungsposition eines Knotens	40
5.2.2	Knickminimierung für eine Kante	41
5.2.3	Belohnung für radialen oder konzentrischen Kantenverlauf	43

5.2.4	Knickminimierung für eine Linie	44
5.3	Laufzeitverbesserung	45
5.3.1	Vereinfachung des Graphen	46
5.3.2	Nachträgliches Einfügen von Nebenbedingungen	46
6	Implementierung und Auswertung	47
6.1	Implementierung	47
6.2	Auswertung der Ergebnisse	48
7	Zusammenfassung und Ausblick	52

1 Einleitung

Am 10. Januar 1863 wurde der erste Streckenabschnitt der Metropolitan Railway, eine Vorgängergesellschaft der heutigen London Underground, eröffnet und somit ist die Londoner U-Bahn die älteste der Welt. Mittlerweile beträgt die Länge des Streckennetzes 402 Kilometer, umfasst 270 Stationen und besteht aus elf Linien. Sie ist nach der Metro Shanghai und der U-Bahn Peking das drittlängste U-Bahn-System der Welt. Durchschnittlich benutzen täglich 3,2 Millionen Fahrgäste die U-Bahn, an Wochentagen sind es bis zu 3,7 Millionen.

Alleine an der Anzahl der täglichen Fahrgäste der London Underground lässt sich erkennen, wie oft benutzt und unverzichtbar U-Bahn-Systeme im Alltag sind. Dadurch ergibt sich natürlich auch ein gewisser Anspruch, den Umgang mit dem U-Bahn-System möglichst benutzerfreundlich zu gestalten. Dies spiegelt sich auch in der Lesbarkeit und Verständlichkeit von U-Bahn-Linienplänen wider. Als Fahrgast Übersicht über die jeweiligen U-Bahn-Linien zu behalten und möglichst effizient und schnell Reiserouten zu planen, ist bereits bei kleineren Netzen kompliziert, beim Ausmaß eines Netzes der Größe der London Underground aber praktisch unmöglich. Bereits 1933 nahm Harry Beck dies zum Anlass einen übersichtlichen Liniennetzplan der London Underground zu entwerfen. Hierbei war für ihn vor allem die Topologie, also die räumliche Beziehung der Stationen untereinander, entscheidend und dafür verzichtete er auf topographische Genauigkeit. Des Weiteren optimierte er sein Design dahingehend, dass er sich bei seiner Zeichnung auf beschriftete Stationen und gerade Linien beschränkte, die entweder horizontal, vertikal oder in einem 45° -Winkel verlaufen. Dieses Liniendesign wird als *oktilinear* bezeichnet. Dadurch gelang es ihm, eine übersichtliche Darstellung des U-Bahn-Netzwerkes zu entwerfen (siehe Abbildung 1.1).

Seit Harry Becks Entwurf 1933 hat sich sein oktilineares Design durchgesetzt und ist inzwischen weltweit in den meisten U-Bahn-Linienplänen wiederzufinden. Dies veranlassete Forscher, Algorithmen und Methoden zu entwickeln, mit denen U-Bahn-Linienpläne automatisch erstellt werden können. Damit nicht genug, führte die entstandene Vertrautheit mit solchen U-Bahn-Linienplänen zu der Idee, die sogenannte *metro-map metaphor* auszunutzen und damit abstrakte Informationen ohne geographischen Hintergrund visualisieren zu können. So startete Nesbitt [Nes04] den Versuch, konzeptionelle Netzwerke von Gedankengängen durch die metro-map metaphor darzustellen und Sandvad et al. [SGSK01] präsentierten ein System zur begleiteten Führung im Internet. Ebenso kommt diese Metapher bei der Erstellung einer Übersicht von Stoffwechselwegen bei Krebszellen [HW02], als schematischer Überblick über Produktpaletten [O'R03] und zur Erstellung von Projektplänen zum Einsatz [SRB⁺05].

Obwohl das oktilineare Design bei U-Bahn-Linienplänen vorherrschend ist, ergab eine Untersuchung von Roberts et al. [RNL10], dass Fahrgäste U-Bahn-Linienpläne, deren



Abb. 1.1: Liniennetzplan des London Underground von Harry Beck (1933)

gerade Liniensegmente und Ecken durch Kurven ersetzt wurden, leichter verstehen und den Linien besser folgen konnten. Dadurch gelang es den Fahrgästen im Vergleich sowohl schneller die für sie interessante Reiseroute zu ermitteln als auch dieser mit einer geringeren Fehlerquote zu folgen. Dies führt zu dem Ergebnis, dass radikale Abweichungen vom bisherigen oktilinearen Layout zu einer Steigerung des Verständnisses des Liniennetzes führen können und es entsprechend wichtig ist, Designregeln an die Eigenschaften des zugrundeliegenden Netzwerkes anzupassen.

Sei es aus historischen Gründen, aufgrund verschiedener Anlaufstellen des täglichen Lebens oder aber auch durch Wahrzeichen und wichtige öffentliche Gebäude: Metropolen und größere Städte besitzen zumeist ein Zentrum, einen Ort an dem alles zusammenläuft. Die Verkehrsmittel der Stadt und damit auch das U-Bahn-System sind oft daraus ausgelegt, Menschen kreisförmig um das Zentrum oder aber vom Zentrum in die benachbarten Stadtteile bis hin zu den Vororten zu befördern. Der Erkenntnis von Roberts et al. folgend, mit dem Ziel einen für Fahrgäste möglichst intuitiv und einfach zu handhabenden Plan zu erstellen, soll in dieser Arbeit ein U-Bahn-Liniennetzplan automatisch erzeugt werden, bei dem, abweichend von den bisherigen oktilinearen Designregeln, ein *radial-konzentrisches* Layout zum Einsatz kommt. Dies bedeutet, dass bei der Erstellung des U-Bahn-Liniennetzes nur Liniensegmente verwendet werden, die entweder radial zu einem globalen Fixpunkt liegen oder konzentrisch um jenen verlaufen. Um den Liniennetzplan mög-

lichtst übersichtlich zu halten, sollen unter anderem Kreuzungen zwischen konzentrisch und radial verlaufenden Liniensegmenten vermieden werden und ebenso auf ausreichend Abstand zwischen verschiedenen Linien geachtet werden. In Abbildung 1.2(a) ist der offizielle U-Bahn-Linienplan von Washington D.C. mit oktilinearem Design und im Vergleich dazu in Abbildung 1.2(b) mit radial-konzentrischem Layout dargestellt. Bei der radial-konzentrischen Darstellung handelt es sich um eine Handzeichnung von Roberts.

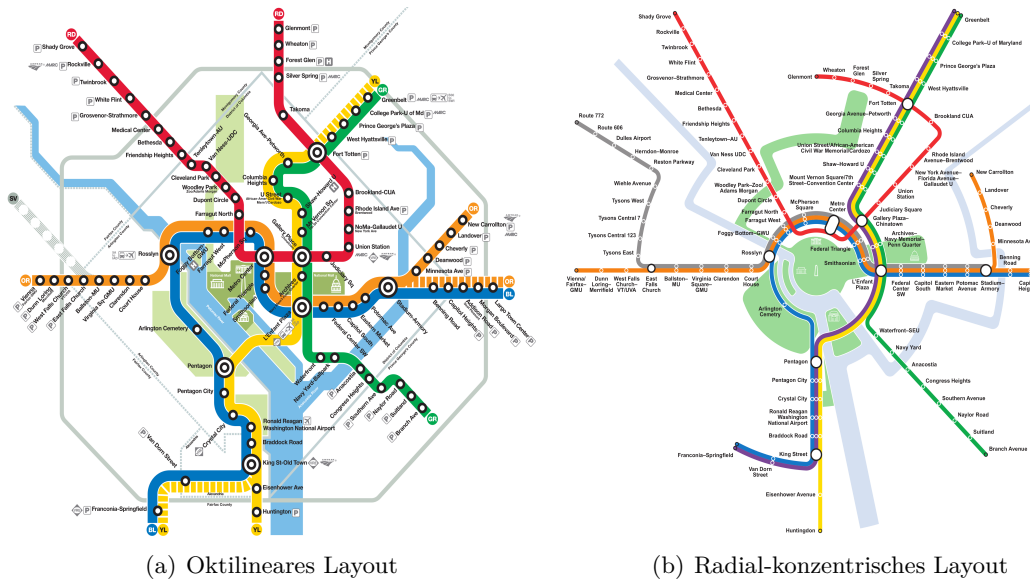


Abb. 1.2: Washingtons U-Bahn-Linienplan unter Verwendung verschiedener Layouts

Bisherige Arbeiten

Es existieren bereits verschiedene Ansätze, die speziell dafür konzipiert wurden, schematische U-Bahn-Linienpläne auf Grundlage eines realen Netzwerkes zu erstellen. So setzen Hong et al. [HMdN06] auf eine kräftebasierte Vorgehensweise, bei der verschiedene Kräfte, unter anderem anziehende zwischen benachbarten und abstoßende zwischen nicht benachbarten Knoten, auf die Knoten einwirken und somit deren Position verändern. Durch Iteration wird versucht eine Konstellation zu erreichen, in der sich das Kräftesystem in einem Gleichgewicht befindet. Eine Beschriftung der Stationen wird danach durch ein externes System vorgenommen.

Eine andere Methode kommt bei Stott und Rodgers [SRMOW11] zum Einsatz. Sie verwenden einen Bergsteigeralgorithmus, der iterativ versucht alternative Positionen für jeden Knoten zu finden, welche die Topologie bewahren und gleichzeitig ein Qualitätsmaß, das auf verschiedenen Kriterien basiert, verbessern. Nach jeder Iteration wird über eine entsprechende Heuristik eine Beschriftung der Stationen vorgenommen.

Nöllenburg und Wolff [NW11] versuchen U-Bahn-Linienpläne unter Verwendung eines gemischt-ganzzahligen Programmes zu erzeugen. Dabei definieren sie eine Reihe von

grundlegenden Bedingungen und Optimierungskriterien, welche in lineare Gleichungen und Ungleichungen übertragen werden. Existiert ein U-Bahn-Linienplan, in dem alle grundlegenden Bedingungen wie Oktilinearität oder nicht überschneidende Beschriftungen erfüllt sind, so gibt der Algorithmus diesen aus und optimiert diese Ausgabe in Bezug auf die gestellten Optimierungskriterien.

Der Schwerpunkt der von Wang und Chi [WC11] vorgestellten *focus+context* Methodik, welche die ausgesuchte Reiseroute hervorhebt und den unwichtigen Teil des U-Bahn-Netzwerkes in den Hintergrund rückt, liegt in der Visualisierung von U-Bahn-Linienplänen auf mobilen Geräten. Trotzdem kann sie durch kleine Anpassungen durchaus auch allgemeine und qualitativ hochwertige U-Bahn-Linienpläne in geringer Zeit erzeugen. Hierbei kommt eine Reihe von Energietermen zum Einsatz, die verschiedene ästhetische Kriterien modellieren. Unter Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate werden diese Energieterme minimalisiert und somit eine optimale Darstellung erreicht.

So verschieden die bisher genannten Ansätze auch sind, ihr gewünschtes Ergebnis ist das Gleiche: Die Algorithmen versuchen je nach Verfahren automatisch einen U-Bahn-Linienplan mit oktilinearem Layout zu konstruieren. Ein anderes Ziel setzen sich Fink et al. [FHN⁺13]. Zwar wird auch in ihrer Arbeit durch ein kräftebasiertes Vorgehen automatisch ein U-Bahn-Linienplan erzeugt, aber das Hauptaugenmerk liegt hierbei auf der Abkehr vom oktilinearen Design hin zu einem *kurvilinearen* Layout. Dies bedeutet, dass Linien nicht aus geraden Strecken, sondern aus Kurven (sogenannten Bézierkurven) bestehen.

2 Grundlagen

Ein Graph stellt in der Graphentheorie eine abstrakte Struktur dar, welche eine Menge von Objekten zusammen mit den zwischen diesen Objekten bestehenden Verbindungen repräsentiert. Graphen werden zur Anschaulichkeit oft gezeichnet, wobei es für einen bestimmten Graph viele unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten gibt. Verschiedenste komplexe Netzwerke, wie auch U-Bahn-Liniensysteme, werden durch Graphen modelliert. Deshalb ist es im Rahmen dieser Arbeit sinnvoll eine gemeinsame Wissensbasis und Terminologie in Bezug auf Graphen zu schaffen. Dies soll zum einen dem Verständnis dienen und zum anderen sollen dadurch Missverständnisse vorgebeugt werden. Eine Einführung in graphentheoretische Grundlagen geben Krumke und Noltemeier [KN09], Di Battista et al. bieten eine Übersicht zur Zeichnung von Graphen [BETT99].

2.1 Graphentheorie

Ein *ungerichteter Graph* $G = (V, E)$ besteht aus zwei endlichen Mengen V und E , wobei jedes Objekt in V als *Knoten* und jedes Objekt in E als *Kante* bezeichnet wird. Jede Kante $e = \{u, v\}$ ist dabei durch ein ungeordnetes Paar von verschiedenen Knoten $u, v \in V$ definiert, welche somit die *Endknoten* der Kante darstellen. Sind zwei Knoten durch eine Kante verbunden, dann sind sie *benachbart* oder *adjazent*. Eine Kante $e = \{u, v\}$ ist *inzident* zu seinem Endknoten wie auch zu allen anderen Kanten, die inzident zu u und v sind. Der *Grad* eines Knotens v entspricht der Anzahl der inzidenten Kanten von v . In dieser Arbeit stellt jede Station eines U-Bahn-Liniennetzes einen Knoten im Graphen dar und falls eine Schienenverbindung zwischen zwei Stationen besteht, so existiert im Graph zwischen den zwei Knoten, welche die entsprechenden Stationen repräsentieren, eine Kante.

Ein *Weg* oder *Pfad* im Graphen G wird durch eine Reihenfolge von verschiedenen Knoten (v_1, v_2, \dots, v_k) von G definiert, wobei $e = \{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $1 \leq i < k$. Eine Menge \mathcal{L} von Pfaden wird Liniennetz von G genannt, wenn jede Kante in E zu mindestens einem Element von \mathcal{L} gehört. Ein Element $L \in \mathcal{L}$ wird *Linie* genannt.

Da es möglich ist den selben Graphen auf unterschiedliche Weise darzustellen, ist es von Bedeutung, diese zwei Objekte voneinander zu unterscheiden. Die Darstellung eines Graphen wird *Zeichnung* oder *Layout* genannt. Im Allgemeinen stellt eine zweidimensionale Zeichnung Γ eines Graphen G eine Funktion dar, die jeden Knoten $v \in V$ auf einen eindeutigen Punkt $\Gamma(v) \in \mathbb{R}^2$ abbildet und jede Kante $e = \{u, v\}, e \in E$ als offene Jordan-Kurve mit den Endpunkten $\Gamma(u)$ und $\Gamma(v)$ darstellt. Schneiden sich zwei Kanten nur in ihren gemeinsamen Endknoten, so ist die Zeichnung *planar*.

Eine allgemeine Zeichnung erlaubt es, Kanten als offene Jordan-Kurven darzustellen. Da in dieser Arbeit ein U-Bahn-Linienplan mit radial-konzentrischem Layout erstellt

werden soll, ist es nötig, den Kanten gewisse zusätzliche Beschränkungen aufzuerlegen. Jede Kante in E setzt sich aus einer Reihenfolge von drei Liniensegmenten zusammen, wobei die Reihenfolge der Liniensegmente für alle Kanten gleich ist. Diese Reihenfolge wird durch ein konzentrisches, ein radiales und wieder ein konzentrisches Liniensegment definiert. Zu beachten ist, dass die Länge von Liniensegmenten null sein kann und somit sowohl rein konzentrische als auch rein radiale Verbindungen zwischen Knoten dargestellt werden können. Durch die erweiterte Definition von Kanten können diese keinen, einen oder zwei *Kantenknicke* besitzen. Ein Kantenknick entsteht, wenn zwei aufeinanderfolgende Liniensegmente je eine Länge größer null besitzen. Eine Linie des Linienplanes kann mehrere *Linienknicke* enthalten, wobei sich die Anzahl dieser Knicke aus der Summe der Kantenknicke der einzelnen Kanten dieser Linie und der Knicke, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kanten an deren gemeinsamen Knoten entstehen können, berechnet. In dieser Arbeit wird von einer *Kreuzung* zwischen einem Kantenpaar $K = (e_1, e_2)$ gesprochen, wenn sich mindestens ein konzentrisches Liniensegment der Kante e_1 mit dem radialen Liniensegment der Kante e_2 schneidet.

2.2 Koordinatensystem

Da in dieser Arbeit ein radial-konzentrisches Layout als Grundlage für die automatische Zeichnung dienen soll, muss ein globaler Mittelpunkt existieren und alle Strecken müssen radial oder konzentrisch sein. Der globale Mittelpunkt M wird von der Eingabe als gegeben angesehen und kein Knoten des Eingabegraphen soll auf diesem Punkt liegen. Es liegt nahe, dass die Knoten des Graphen durch Polarkoordinaten beschrieben werden. So ist jeder Knoten eindeutig durch ein Tupel (r, ϕ) bestimmbar, wobei r den Abstand zwischen dem Mittelpunkt und den betrachteten Knoten widerspiegelt und ϕ den Winkel zwischen der Polachse und einem vom Mittelpunkt ausgehenden Strahl darstellt (siehe Abbildung 2.1). Sofern nichts anderes angegeben ist, verläuft die Polachse horizontal nach rechts ausgehend von M und es wird immer von einer Linksdrehung ausgegangen. Der Winkel ϕ muss zudem modulo 360° genommen werden, um eine korrekte Abbildung zu garantieren. Der Abstand zwischen zwei Knoten im Graphen wird durch den euklidischen Abstand definiert.

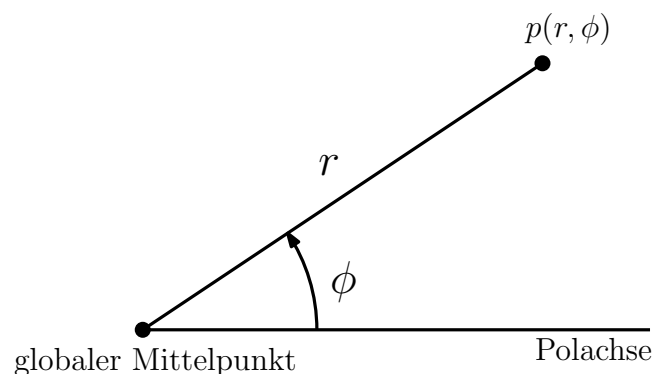


Abb. 2.1: Der Knoten p ist eindeutig durch den Radius r und den Winkel ϕ bestimmt

2.3 Gemischt-Ganzzahliges Lineares Programm

Zur Erstellung eines U-Bahn-Linienplanes wird in dieser Arbeit *gemischt-ganzzahlige lineare Programmierung* (im Englischen *mixed-integer programming*, nachfolgend mit *MIP* abgekürzt) verwendet. Ein MIP optimiert eine vorgegebene lineare Zielfunktion unter Berücksichtigung verschiedener Nebenbedingungen, die aus linearen Gleichungen und Ungleichungen bestehen. Kann keine Lösung berechnet werden, bricht das Programm mit dem Hinweis auf Unlösbarkeit ab. Zuerst soll die *lineare Programmierung* eingeführt werden, wobei diese eng mit der Definition eines MIP verknüpft ist. Im Gegensatz zur linearen Programmierung dürfen in einem MIP manche Variablen nur diskrete und keine reellen Werte annehmen. Der Schwerpunkt dieser Einführung soll auf der Anwendung und nicht auf der umfassenden Theorie und den komplexen Algorithmen zur Lösung eines MIP liegen. Eine allgemeine Übersicht zur linearen Programmierung und MIP bieten Chandru und Rao [CR10a, CR10b]. Weitere theoretische Grundlagen und Algorithmen zur (ganzzahligen) linearen Programmierung sind in den Arbeiten von Schrijver und von Bertsimas und Tsitsiklis zu finden [Sch99, BT97].

Definition 2.1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine $m \times n$ Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$ ein m -dimensionaler Vektor und $c \in \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionaler Vektor. Sei $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Dann ist das dazugehörige lineare Programm gegeben durch

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & c^T x \\ \text{in Abhängigkeit von} & Ax \leq b, \end{array}$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionaler Vektor aus reellen Variablen ist.

Dies ist nicht die einzige Formulierung eines linearen Programms. Es wäre möglich die Zielfunktion zu maximieren anstatt zu minimieren oder die Nebenbedingungen durch $Ax \geq b$ darzustellen. Die verschiedenen Formulierungen können jedoch jeweils ineinander überführt werden, was für die praktische Anwendung nützlich ist. Da für ein MIP die Definition der linearen Programmierung nicht ausreichend ist, muss diese erweitert werden:

Definition 2.2. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine $m \times n$ Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$ ein m -dimensionaler Vektor und $c \in \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionaler Vektor. Sei $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Dann ist das dazugehörige MIP gegeben durch

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & c^T x \\ \text{in Abhängigkeit von} & Ax \leq b \quad \text{und} \\ & x_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in J, \end{array}$$

wobei $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionaler Vektor aus Variablen ist.

Auch bei MIP ist es möglich verschiedene Formulierungen ineinander zu transformieren, weshalb diesem Punkt später keine Beachtung mehr geschenkt wird. Im Gegensatz zur linearen Programmierung ist MIP ein NP-vollständiges Problem, wobei Programme zum Lösen solcher Modelle in der praktischen Anwendung oft relativ schnell sind.

Die genau Vorgehensweise der verschiedenen Programme soll hierbei weiter nicht von Interesse sein.

An dieser Stelle soll kurz auf einen in der Modellierung von gemischt-ganzzahligen Programmen standardmäßigen Trick eingegangen werden. Dafür wird eine Konstante M und mindestens eine Binärvariable X benötigt. Die Konstante M muss so gewählt werden, dass sie in einer Ungleichung für die linke Seite eine obere Grenze darstellt und diese dadurch trivialerweise immer erfüllt ist; zugleich sollte sie so klein wie möglich gewählt werden, da dies die Laufzeit eines Programms zur Lösung des erzeugten Modells verkürzt. Binäre Variablen können gemäß ihres Namens nur die diskreten Werte 0 und 1 annehmen und werden dafür angewendet, Ungleichungen zu *aktivieren* oder *deaktivieren*. Eine Ungleichung wird aktiviert genannt, wenn sie nicht trivialerweise erfüllt, also deaktiviert, ist. Durch die Kombination der Konstanten M als Faktor zusammen mit binären Variablen ist es möglich Ungleichungen abhängig voneinander zu aktivieren bzw. deaktivieren.

$$\begin{aligned} a &\leq b + M X \\ b &\leq a + M (1 - X) \end{aligned}$$

Es seien a und b Variablen. Durch die obigen Ungleichungen gilt $a \leq b$ genau dann, wenn die Binärvariable X den Wert 0 annimmt, da die zweite Ungleichung durch die große Konstante M sicher erfüllt ist. Nimmt X den Wert 1 an, verhält es sich genau umgekehrt und somit gilt $b \leq a$.

3 Darstellung und Modellierung eines Liniennetzwerkes

Zu Beginn muss man sich bewusst werden, was ein übersichtliches und leicht verständliches Liniennetzwerk ausmacht. Dies ist wichtig, um sowohl vergleichbare als auch qualitativ hochwertige Ergebnisse zu erreichen. Deshalb werden nachfolgend verschiedene Kriterien und somit Designregeln aufgestellt, welche sicherstellen sollen, dass der erzeugte U-Bahn-Liniennetzplan unseren Ansprüchen entspricht. Sind diese allgemeinen Designregeln gefunden, müssen sie konkret definiert werden; sie dienen somit der Bildung eines Modells für das Liniennetzwerk, worauf sich später die konkrete Umsetzung stützt.

3.1 Darstellung eines Liniennetzwerkes

Zunächst müssen entsprechende Zeichenkonventionen, ästhetische Merkmale und Beschränkungen aufgestellt werden, welche die charakteristischen Eigenschaften eines U-Bahn-Linienplans mit radial-konzentrischem Layout festlegen. Solche sind in zwei verschiedene Gruppen von Kriterien einzuteilen: Die erste Gruppe beinhaltet Kriterien, welche das Layout betreffen. Diese legen die besondere Struktur der Zeichnung des Graphen fest und bilden somit den Kern zur Modellierung des späteren Verfahrens zur automatischen Zeichnung. In der zweiten Gruppe befinden sich graphische Kriterien, die keinen direkten Einfluss auf die Zeichnung haben, aber dem Betrachter visuell helfen sollen diese leichter zu verstehen und zu verfolgen.

Viele Designregeln eines radial-konzentrischen Layouts decken sich mit den Regeln eines oktilinearen Layouts (siehe [HMdN06, SRMOW11, NW11]), was nicht verwunderlich ist, da ein Betrachter, unabhängig vom Design, gewisse Ansprüche an U-Bahn-Linienpläne stellt, die es zu erfüllen gilt. Die Wichtigsten sollen explizit aufgezählt werden:

- Alle Liniensegmente müssen entweder radial oder konzentrisch sein. Dies ist selbsterklärend die Grundlage eines radial-konzentrischen Layouts und bildet die Besonderheit der in dieser Arbeit vorgestellten Zeichnungen von U-Bahn-Linienplänen.
- Konzentrische Liniensegmente sollen auf möglichst wenig Kreisen unterschiedlicher Radien liegen und der Abstand dieser Kreise zueinander soll möglichst gleich sein. Dies dient der Lesbarkeit und Übersicht des U-Bahn-Linienplanes.
- Der U-Bahn-Linienplan soll trotz Vereinfachung in Bezug auf geografische Standorte nicht komplett der Stadtkarte aus dem Gedächtnis der Passagiere widerspre-

chen. Dies ist wichtig, um die Passagiere nicht zu verwirren und eine möglichst einfache und schnelle Planung von Reiserouten zu gewährleisten. Umsetzbar ist dies durch das Beibehalten der geografischen Netzwerktopologie und der relativen Position zwischen zwei Stationen.

- Für den Benutzer eines U-Bahn-Linienplanes ist es außerdem wichtig, einer Linie ohne Probleme durch das Liniensystem folgen zu können. Deswegen sollten die Linien so wenig Knicke wie möglich beinhalten und unnötige Kreuzungen komplett vermieden werden.
- Der Abstand zwischen zwei Stationen soll möglichst gleichmäßig sein. Dies ist für Benutzer hilfreich, um Fahrzeiten und Entfernung einzelner Stationen abschätzen zu können und somit ihre Reiseroute einfacher und effizienter zu planen.
- Der U-Bahn-Linienplan muss eindeutig sein. Es dürfen weder Stationen aufeinanderliegen, noch darf es Überlappungen von inzidenten Kanten derselben Linie geben oder Knoten, die durch Überlappung von Linien in der Zeichnung auf einer falschen Kante liegen.
- Die Färbung der verschiedenen Linien soll möglichst eindeutig sein und sich voneinander abheben. Treffen sich zwei Linien in einem Knoten, muss leicht zu erkennen sein, wo welche Linie fortführt.

In Abbildung 3.1(a) ist das U-Bahn-Netzwerk von Washington geografisch korrekt dargestellt. Durch Anwendung der eben definierten Designregeln soll ein möglichst optimaler U-Bahn-Linienplan mit radial-konzentrischem Layout wie in Abbildung 3.1(b) erzeugt werden. Es sind hierbei aber Abwägungen zwischen den aufgestellten Regeln nötig, um ein optimales Ergebnis zu erzielen: So ist es unter anderem möglich, dass Kreuzungen von Linien vermieden werden können, wenn die Linien mehr Knicke enthalten.

3.2 Modellierung eines Liniennetzwerkes

Die aufgestellten Designregeln werden nun je einer von zwei verschiedenen Gattungen zugeteilt, um bei dem erstellten Linienplan einerseits wichtige Eigenschaften wie ein radial-konzentrisches Layout zu garantieren und andererseits eine maximale Qualität zu erreichen. Die erste Gattung entspricht dabei den *grundlegenden Bedingungen*. Diese Bedingungen stellen strikte Voraussetzungen dar, die in jedem U-Bahn-Linienplan mit radial-konzentrischem Layout erfüllt sein müssen. Die andere Gattung wird durch die *Optimierungskriterien* beschrieben. Dabei handelt es sich um Bedingungen, die dafür Sorge tragen, dass die U-Bahn-Linienpläne nach gewissen ästhetischen Kriterien optimiert werden; zugleich dienen sie zur Messung der Qualität der entstandenen Linienpläne. Je besser ein erzeugter Linienplan mit den Optimierungskriterien übereinstimmt, desto hochwertiger ist seine Qualität.

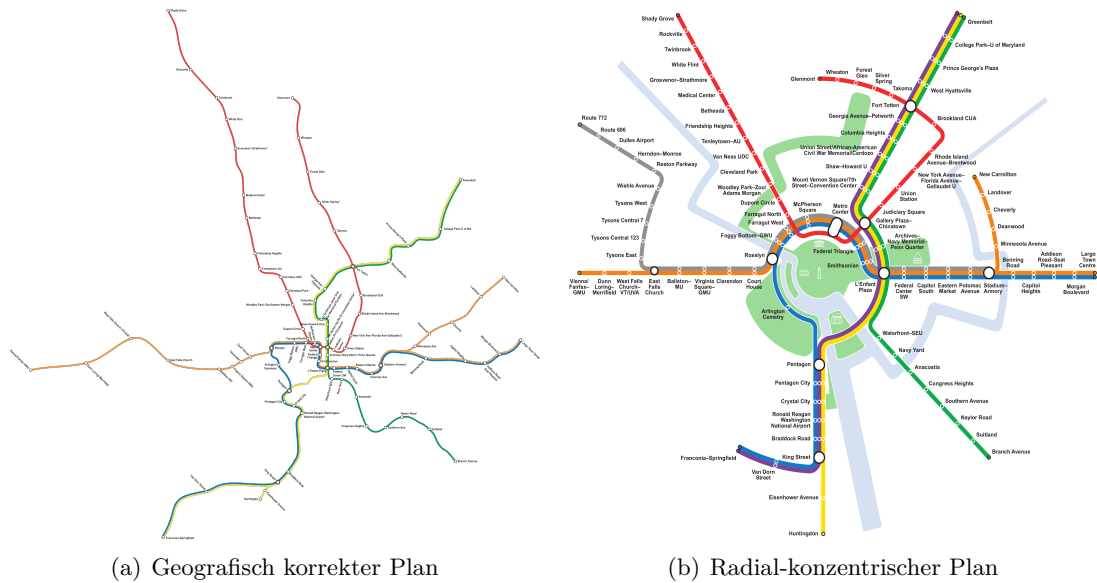


Abb. 3.1: Washingtons U-Bahn-Netzwerk

3.2.1 Grundlegende Bedingungen

Da die grundlegenden Bedingungen in jedem erzeugten radial-konzentrischen U-Bahn-Linienplan erfüllt sein müssen, bilden sie die essentiellen Bestandteile einer entsprechenden Modellierung eines Liniennetzwerkes. Selbsterklärend ist die Forderung, dass nur radiale oder konzentrische Liniensegmente benutzt werden. Des Weiteren soll der Liniplan keine Kreuzungen zwischen radialen und konzentrischen Segmenten beinhalten. Ebenso müssen Überlappungen verboten werden, durch die Knoten auf falschen Kanten liegen oder die Zeichnung nicht eindeutig interpretierbar wird. Zwei Knoten dürfen zudem nicht aufeinanderliegen. Die exakte Formulierung der Anforderungen lautet dabei wie folgt:

- (H1) Jede Kante in der Zeichnung muss aus radialen oder konzentrischen Liniensegmenten bestehen.
- (H2) Es darf keine Kreuzung zwischen einem radialen Liniensegment einer Kante e_1 mit einem konzentrischen Liniensegment einer Kante e_2 außerhalb eines Knotens existieren.
- (H3) Es darf weder zu einer Überlappung von zwei inzidenten Kanten einer Linie kommen noch zu einer Überlappung, die dazu führt, dass ein Knoten auf einer nicht inzidenten Kante liegt.
- (H4) Keine zwei Knoten dürfen auf denselben Punkt abgebildet werden.

Die Bedingung (H1) erzwingt, dass die Zeichnung radial-konzentrisch ist, indem sie nur Liniensegmente solcher Art zulässt. Durch (H2) wird die Zeichnung des U-Bahn-

Linienplanes wesentlich übersichtlicher und lesbarer und somit entscheidend für eine sinnvolle Anwendung in der Praxis. Durch (H3) und (H4) bleibt der U-Bahn-Linienplan eindeutig interpretierbar.

3.2.2 Optimierungskriterien

Als nächstes wird auf Basis der verbleibenden Designregeln eine Reihe von Optimierungskriterien aufgestellt, anhand derer später möglichst optimale Ergebnisse erzeugt werden können und die zudem als Qualitätsmaß beim Vergleich zwischen verschiedenen radial-konzentrischen U-Bahn-Linienpläne dienen.

- (S1) Jede Linie in der Zeichnung soll möglichst wenig Knicke enthalten.
- (S2) Nicht benachbarte Liniensegmente sollen einen gewissen Abstand haben.
- (S3) Liniensegmente sollen möglichst gleich lang sein.
- (S4) Die Anzahl der verschiedenen Radien von konzentrischen Liniensegmenten soll möglichst gering sein.
- (S5) Relative Positionen zwischen allen Knotenpaaren und besonders benachbarten Knotenpaaren soll erhalten bleiben.

Die Kriterien (S1)-(S4) entsprechen den konkreten Umsetzungen einiger Designregeln. Sie erleichtern die Übersicht und den Umgang mit dem Linienplan. Durch (S5) soll sichergestellt werden, dass sich die neu erzeugte radial-konzentrische Zeichnung nicht komplett von ihrer Eingabe entfernt und somit die gedankliche Stadtkarte der Benutzer nicht entfremdet wird. Es ist zudem hervorzuheben, dass sich einige der hier aufgeführten grundlegenden Bedingungen und Optimierungskriterien gegenseitig beeinflussen. So ist es möglich, dass durch die Bedingung (H2) mehr Knicke benötigt werden oder aber, dass durch eine minimale Anzahl an Knicken die Abweichung zu der ursprünglichen Eingabe ziemlich stark ist. Es ist also nötig, die getroffenen Optimierungskriterien gegeneinander abzuwiegen.

4 Heuristischer Ansatz

Ein heuristischer Ansatz soll lokal für eine gute Verteilung der Knoten und Darstellung der Kanten sorgen. Die Hoffnung dabei ist, dass insgesamt eine Zeichnung mit guter Qualität bei kurzer Laufzeit erzeugt werden kann. Die Grundidee bildet dabei der Gedanke, dass Knoten mit ähnlichem Winkel durch genau einen Winkel und Knoten mit ähnlichem Radius durch genau einen Radius dargestellt werden. Dieser Idee folgend wird die Position jedes Knotens durch zwei *Repräsentanten*, einem radialen und einem konzentrischen, festgelegt. Bei einem radialen Repräsentanten handelt es sich dabei um eine Halbgerade ausgehend vom Mittelpunkt M , wobei diese eindeutig durch einen Winkel beschrieben wird. Ein konzentrischer Repräsentant stellt einen Kreis um M dar; dieser soll eindeutig durch einen Radius definiert sein. Knoten mit ähnlichen Winkeln werden somit durch den gleichen radialen Repräsentanten und Knoten mit ähnlichen Radien durch den gleichen konzentrischen Repräsentanten dargestellt. Ist die Zuordnung aller Knoten zu ihren jeweiligen Repräsentanten erfolgt, so wird die Verteilung der Knoten in der Zeichenfläche durch ein lineares Programm vorgenommen (siehe für Definition Abschnitt 2.3). Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass alle Knoten eines konzentrischen Repräsentanten durch die Nebenbedingungen des linearen Programms auf genau einem Kreisradius liegen und die Anzahl der unterschiedlichen Kreisradien durch die Abhängigkeit von den Repräsentanten beeinflussbar und oft überschaubar groß ist. Entsprechendes gilt auch bei den radialen Repräsentanten. Außerdem finden bei der Positionierung der Knoten die Optimierungskriterien durch die Zielfunktion Berücksichtigung. Eine Übersicht über den Ablauf bietet der Algorithmus 1.

Da dieser Ansatz keine praxistauglichen Ergebnisse vorweisen konnte, soll es bei einer knappen Erklärung der Vorgehensweise bleiben.

Algorithmus 1: Automatisches Zeichnen eines U-Bahn-Linienplanes mit radial-konzentrischem Layout

Eingabe : Graph G mit U-Bahn-Liniennetz und Koordinaten der Knoten,
Mittelpunkt M

Ausgabe : Radial-konzentrische Zeichnung Z

- 1 Einlesen des Graphen G und die Zusatzinformationen ein
 - 2 Vereinfachung von G
 - 3 Zuordnung von Knoten zu Repräsentanten
 - 4 Auflösung von Mehrfachabbildungen
 - 5 Einfügen der entfernten Knoten
 - 6 Erzeugung der Zeichnung Z durch Lösen des LP
 - 7 **return** Z
-

4.1 Vereinfachung des Graphen

In einem U-Bahn-Liniennetz besitzen einzelne Linien oft viele Zwischenstationen, in denen ein Umsteigen nicht möglich ist. Dieser Umstand soll nun Beachtung finden, indem eine verbreitete Technik beim automatischen Zeichnen von Graphen angewendet wird. Dabei wird der Eingabegraph vereinfacht, bevor ein Algorithmus auf ihn angewendet wird. Nach einer Vereinfachung des Graphen wird dieser durch weniger Knoten und Kanten repräsentiert, ist aber trotzdem noch eindeutig rekonstruierbar. Durch die verringerte Anzahl an Knoten und Kanten sind viele Algorithmen wesentlich effizienter als sie es auf dem kompletten Eingabegraphen wären. Der Grad der Vereinfachung des Graphen kann entscheidend für die Laufzeit und die Qualität der erzeugten Ergebnisse sein.

Eine Vereinfachung des Graphen ist möglich, indem die Anzahl der Knoten mit Grad 2 reduziert wird. Allgemein werden dabei die Grad-2-Knoten v_2, v_3, \dots, v_{k-1} eines Pfades (v_1, v_2, \dots, v_k) ebenso wie die Kanten $e = \{v_i, v_{i+1}\} \in E$ mit $1 \leq i < k$ aus dem Graphen entfernt und eine neue Kante $e' = \{v_1, v_k\}$ der Kantenmenge E hinzugefügt (siehe Abbildung 4.1(a)). Hierbei muss beachtet werden, dass manche Grad-2-Knoten nicht entfernt werden dürfen, da sonst der Eingabegraph nicht rekonstruierbar ist (siehe Abbildung 4.1(b)).

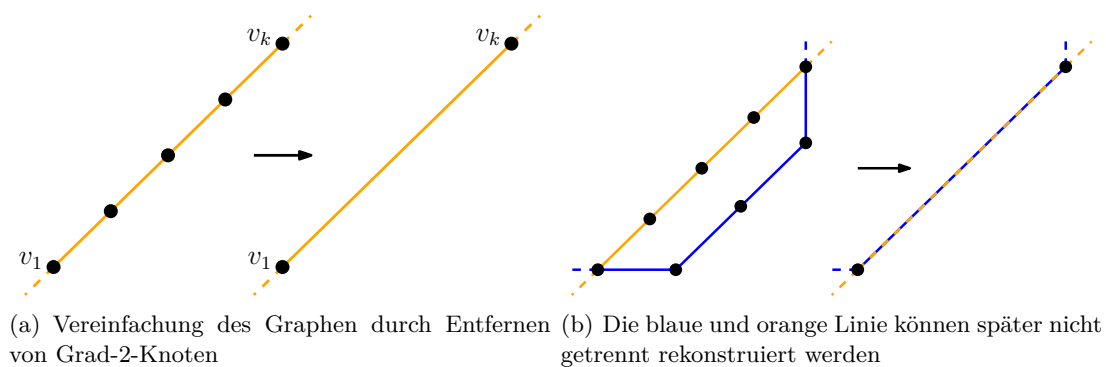


Abb. 4.1: Vereinfachung des Graphen

Durch diese Vereinfachung ist es beispielsweise möglich, die Anzahl der Knoten des U-Bahn-Liniennetzes von Wien von 90 auf 19 und die Anzahl der Kanten von 96 auf 25 zu reduzieren (siehe Abbildung 4.2). Ist der Algorithmus zum Verteilen der verbliebenen Knoten erfolgreich beendet worden, können die zuvor entfernten Grad-2-Knoten v_2, v_3, \dots, v_{k-1} dem Graphen wieder für eine abschließende Zeichnung des kompletten Netzwerkes hinzugefügt werden. Diese müssen auf der Kante $e' = \{v_1, v_k\}$ liegen.

4.2 Zuordnung von Knoten zu Repräsentanten

Ein radialer Repräsentant ist eine Halbgerade ausgehend von M und ein konzentrischer Repräsentant ist ein Kreis um M . Jedem Repräsentanten ist eine Knotenmenge

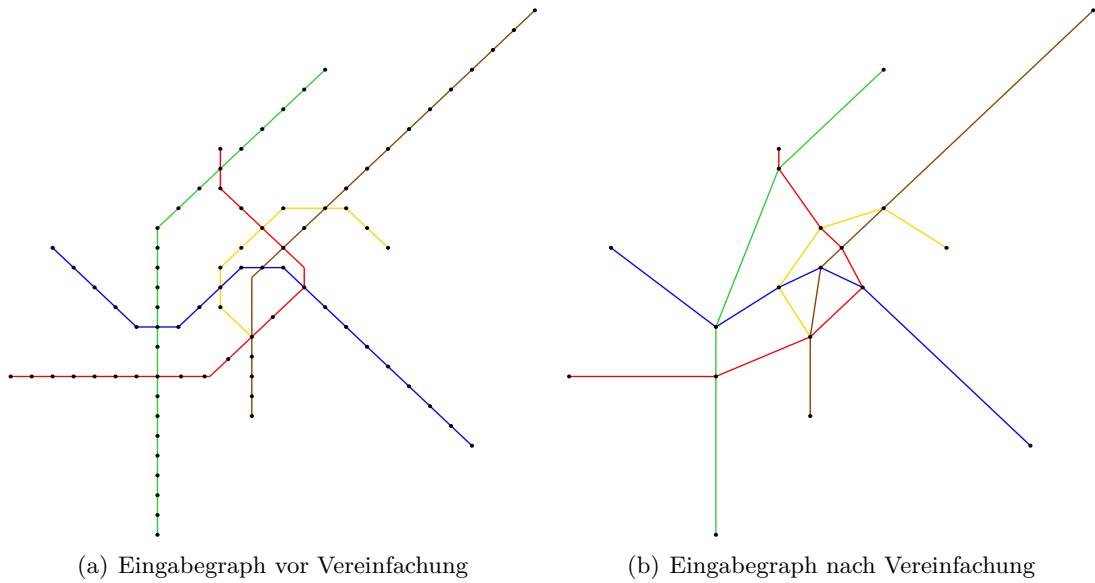


Abb. 4.2: Gegenüberstellung eines oktilinearen Eingabegraphen und seiner Vereinfachung für das U-Bahn-Liniennetz von Wien

K zugeordnet. Der Winkel bzw. der Radius des Repräsentanten berechnet sich aus den Winkeln bzw. Radien der Knoten in K . Radiale Repräsentanten werden eindeutig durch ihren Winkel ϕ_{Radial} und konzentrische Repräsentanten eindeutig durch ihren Radius r_{Konz} dargestellt.

Bevor jeder Knoten des vereinfachten Graphen einem konzentrischen und einem radialen Repräsentanten zugeordnet wird, werden Parameter erläutert, welche Einfluss auf diese Zuordnung zu Repräsentanten haben. Danach wird sichergestellt, dass keine zwei Knoten auf denselben Punkt in der Zeichnung abgebildet werden. Ist dies erledigt, werden die zuvor entfernten Grad-2-Knoten wieder dem Graph hinzugefügt, wobei Rücksicht auf die vorher stattgefundene Zuteilung genommen wird.

4.2.1 Parameter

Zunächst werden verschiedene Parameter erläutert, wodurch der spätere Ablauf leichter nachvollzogen werden kann. Dabei soll vorerst der Fokus auf den Parametern liegen, welche für die Zuordnung eines Knotens zu einem radialen Repräsentanten zuständig sind. Es handelt sich um zwei Konstanten ω und δ_{max} . Es wird ein Keil aus Halbgeraden definiert, die in M starten; eine Halbgerade besitzt den Winkel $\phi_{\text{Radial}} - \omega$, die andere den Winkel $\phi_{\text{Radial}} + \omega$ (siehe Abbildung 4.3(a)). Durch eine Änderung von ω kann die Fläche, die der Keil einschließt, verkleinert oder vergrößert werden. Durch die zweite Konstante wird sichergestellt, dass sich alle Knotenpaare von Knoten, die durch den Repräsentanten ϕ_{Radial} repräsentiert werden, im Winkel um nicht mehr als δ_{max} unterscheiden (siehe Abbildung 4.3(b)).

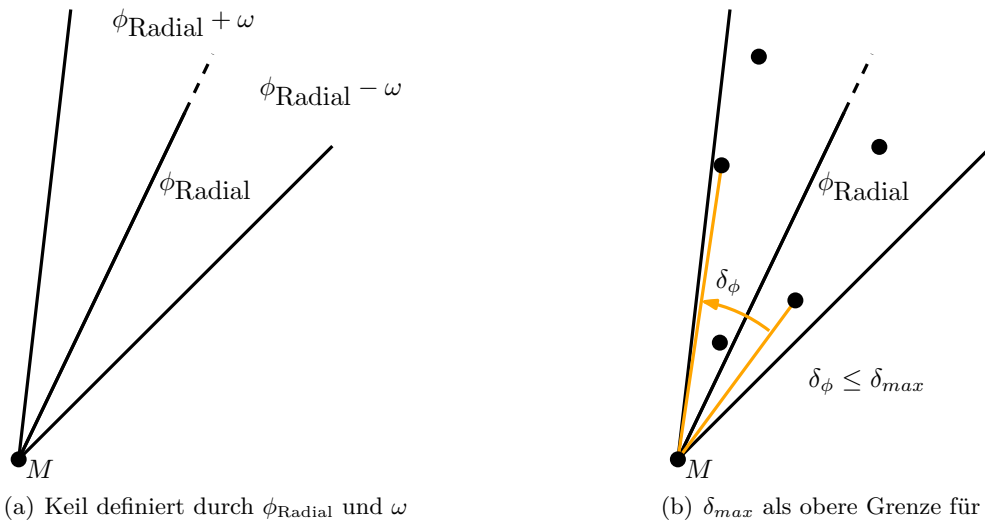


Abb. 4.3: Einfluss verschiedener Parameter auf die Zuordnung zu radialen Repräsentanten

Die Zuordnung eines Knotens $v = (r_v, \phi_v)$ zu einem konzentrischen Repräsentanten wird durch die drei Parameter r_{lb} , r_{ub} und r_r beeinflusst. Die Konstanten r_{lb} und r_{ub} sind Faktoren, für die gilt, dass $r_{lb} \leq r_{\text{Konz}}/r_v \leq r_{ub}$; sie geben also eine untere und obere Schranke im Radius vor, wodurch eine Art Ring um den radialen Repräsentanten r_{Konz} entsteht. Der Parameter r_r stellt sicher, dass der Knoten mit dem größten Radius und der Knoten mit dem kleinsten Radius ein relatives Verhältnis zueinander von kleiner gleich r_r haben, wobei der größere Radius im Nenner steht. Eine visuelle Darstellung bietet Abbildung 4.4.

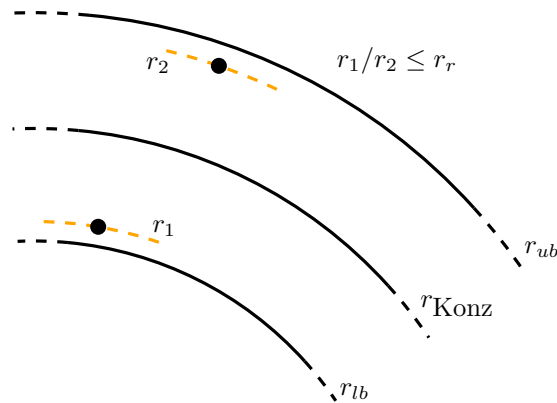


Abb. 4.4: Die Zuordnung von konzentrischen Repräsentanten wird durch eine untere Schranke r_{lb} , eine obere Schranke r_{ub} und das maximale relative Verhältnis zwischen Radien r_r parametrisiert

4.2.2 Ablauf der Zuordnung

Jede Linie wird nun von Anfang bis zum Ende durchlaufen und jeder Knoten $v \in V$ wird nacheinander je einem radialen und einem konzentrischen Repräsentanten zugeordnet. Dabei wird zuerst getestet, ob es bereits einen radialen Repräsentanten gibt, welcher den Knoten gut repräsentiert. Dies ist der Fall, wenn sich v im durch die beiden Halbgeraden definierten Keil des jeweiligen Repräsentanten befindet und der maximale Unterschied im Winkel zwischen v und den bereits dem Repräsentanten zugeordneten Knoten kleiner als δ_{max} ist. Sind diese beiden Bedingungen für mehrere Repräsentanten erfüllt, dann wird v demjenigen zugeordnet, welcher näher zu v liegt. Da v zu der Knotenmenge K des Repräsentanten hinzugefügt wurde, wird der Winkel des Repräsentanten entsprechend angepasst. So berechnet sich der neue Winkel aus dem Durchschnitt der Winkel aller Knoten aus K . Existiert hingegen kein Repräsentant, der die Bedingungen erfüllt, wird ein neuer radialer Repräsentant erstellt, welcher den gleichen Winkel wie der Knoten v besitzt; v wird diesem zugeordnet.

Die konzentrische Zuordnung verläuft ähnlich wie die radiale. Zuerst wird getestet, ob v in dem Ring um einen bereits existenten Repräsentanten liegt und ob das relative Verhältnis aller Knotenpaare aus v und je einem Knoten aus K kleiner als r_r ist. Sind diese Bedingungen durch mehrere Repräsentanten erfolgreich erfüllt, wird v wiederum dem nächsten konzentrischen Repräsentanten zugeordnet. Der Radius des Repräsentanten, zu dem v zugeordnet wurde, ergibt sich aus dem Durchschnitt aller Radien der ihm zugeteilten Knoten. Werden die Bedingungen durch keinen bereits existierenden Repräsentanten erfüllt, wird ein neuer konzentrischer Repräsentant erstellt, der den Knoten v zugeteilt bekommt und den gleichen Radius wie v besitzt.

In Abbildung 4.5 ist eine beispielhafte Zuordnung der Knoten $p_1 - p_5$ zu den beiden Repräsentanten dargestellt. Dabei läuft die Zuordnung der Knoten wie bereits beschrieben ab. Es fällt auf, dass die Knoten p_1 und p_5 sowohl den gleichen radialen als auch den gleichen konzentrischen Repräsentanten besitzen. Diese beiden Knoten würden auf denselben Punkt in der Zeichnung abgebildet werden.

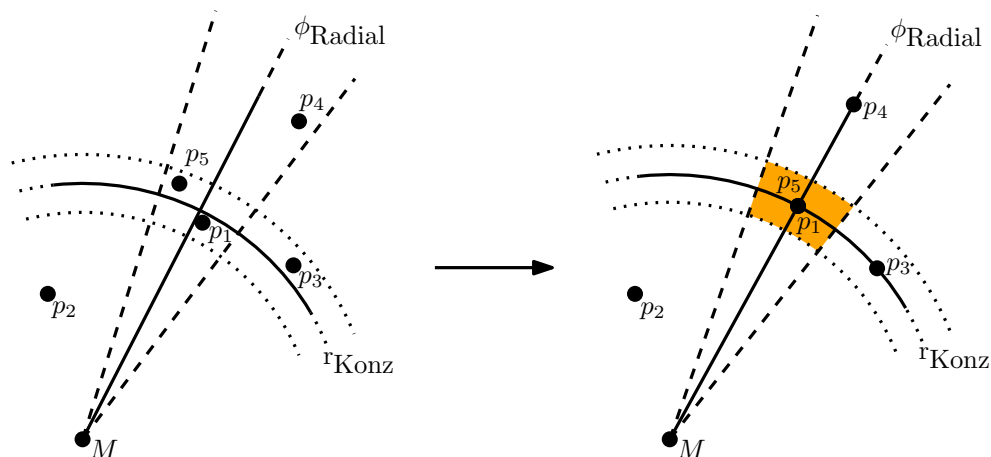


Abb. 4.5: Vorgehensweise der Zuordnung von Knoten zu Repräsentanten und deren Problem

4.2.3 Vermeidung von Mehrfachabbildung

Um das Problem der Mehrfachabbildung auf einen Punkt am Ende des letzten Abschnitts zu beheben, wird wie folgt vorgegangen: Es wird für alle Knoten, die durch den radialen Repräsentanten ϕ_{Radial} und konzentrischen Repräsentanten r_{Konz} repräsentiert werden, die Distanz zu dem Schnittpunkt s dieser zwei Repräsentanten ausgerechnet. Der Knoten mit der geringsten Distanz behält diese beiden Repräsentanten bei. Jeder andere Knoten erhält in einer Komponente einen neu eingeführten Repräsentanten. Um zu entscheiden, welche Komponente für einen Knoten geändert wird, wird von diesem Knoten das Lot l auf den radialen Repräsentanten und der Abstand Δr des Radius' des Knotens zu dem Radius des konzentrischen Repräsentanten berechnet. Gilt $\Delta r < l$, so wird ein neuer radialer Repräsentant eingefügt, ansonsten ein konzentrischer (siehe Abbildung 4.6). Ein neuer Repräsentant enthält genau den Knoten, für welchen er eingeführt wurde, und sein Winkel bzw. Radius entspricht folglich dem des Knotens.

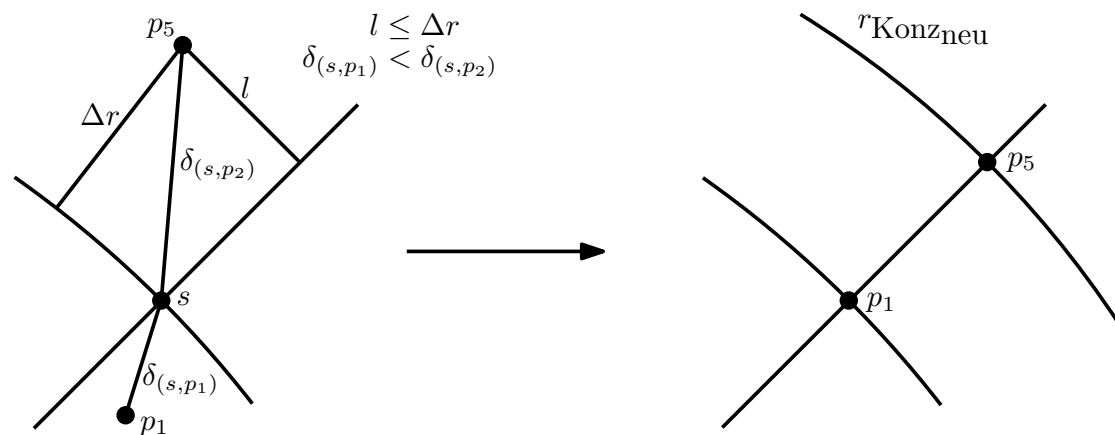


Abb. 4.6: Vermeidung von Mehrfachabbildung durch das Zufügen von neuen Repräsentanten

4.2.4 Verteilung der Entfernten Grad-2-Knoten

Alle Knoten im vereinfachten Graph sind nun erfolgreich je einem radialen und einem konzentrischen Repräsentanten zugeordnet, wobei keine zwei Knoten sowohl den gleichen radialen wie konzentrischen Repräsentanten haben. Nun werden die vorher entfernten Knoten verteilt: Jeder Knoten in einer Komponente wird durch einen Repräsentanten fixiert, die andere Komponente bleibt flexibel. Ein entfernter Knoten v liegt immer zwischen zwei Knoten p_1 und p_2 im vereinfachten Graph. Eine Kante besteht in diesem Ansatz maximal aus einem Knick, wobei sich das konzentrische Segment immer so nah wie möglich am globalen Mittelpunkt befindet. Es soll gelten, dass der Radius von p_1 kleiner gleich dem Radius von p_2 ist. Verläuft die Kante $e = \{p_1, p_2\}$ nur radial, dann erhält v als radialen Repräsentanten denselben wie p_1 und p_2 . Analoges gilt für einen konzentrischen Kantenverlauf. Besitzt die Kante einen Knick, wird von v das Lot l auf den radialen Repräsentanten von p_2 gefällt und der Abstand Δr des Radius' von v zu

dem Radius des konzentrischen Repräsentanten von p_1 berechnet (siehe Abbildung 4.7). Gilt $\Delta r < l$, dann erhält v die konzentrische Komponente von p_1 , andernfalls die radiale Komponente von p_2 .

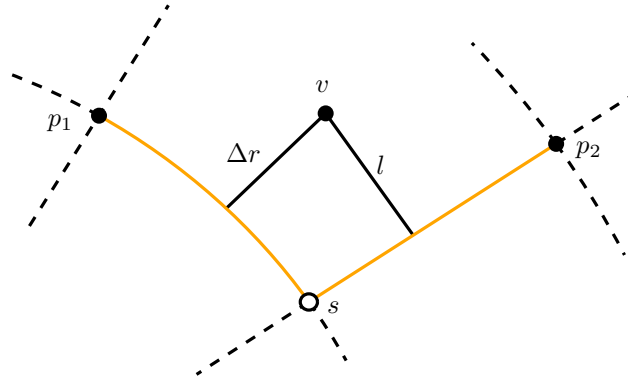


Abb. 4.7: Bestimmung der Platzierung des entfernten Grad-2-Knotens

4.3 Lineares Programm

Die Ermittlung der Koordinaten von Knoten erfolgt durch ein lineares Programm (siehe für Definition Abschnitt 2.3). Die Nebenbedingungen sind, dass alle Knoten eines radialen Repräsentanten den gleichen Winkel, Knoten unterschiedlicher radialer Repräsentanten unterschiedliche Winkel besitzen. Analog gilt dies für konzentrische Repräsentanten und deren Knoten. Außerdem muss es einen Mindestabstand zwischen den Knoten und dem Mittelpunkt geben. Das einzige Optimierungskriterium ist die Berücksichtigung der Positionen der Knoten im Eingabegraphen.

4.3.1 Nebenbedingungen

Um die einzelnen Knoten des Graphen im linearen Programm zu parametrisieren, wird jeder dieser Knoten durch zwei Variablen r und ϕ dargestellt, welche den Radius und Winkel abbilden. Jeder Knoten der Knotenmenge K eines radialen Repräsentanten soll in der Zeichnung den gleichen Winkel besitzen. Somit muss für zwei Knoten $u = (r_u, \phi_u)$ und $v = (r_v, \phi_v)$ mit $u, v \in K$ gelten:

$$\phi_u = \phi_v \quad (4.1)$$

Da alle Winkel der Knoten dieser Knotenmenge immer gleich sein müssen, könnte man genau eine Variable einfügen, welche den Winkel aller dieser Knoten darstellt. Diese Option wurde in diesem Ansatz aber nicht verfolgt. Die Ordnung durch die Größe der Winkel der einzelnen Repräsentanten muss in der Zeichnung aufrechterhalten werden. So wird für zwei Repräsentanten $R_1 = (\phi_{R_1, \text{Radial}})$ und $R_2 = (\phi_{R_2, \text{Radial}})$ mit

$\phi_{R_1, \text{Radial}} \leq \phi_{R_2, \text{Radial}}$ je ein Knoten $v_1 = (r_{v_1}, \phi_{v_1})$ und $v_2 = (r_{v_2}, \phi_{v_2})$ seiner jeweiligen Knotenmenge entnommen und mithilfe der Konstanten c folgende Ungleichung dem Modell hinzugefügt:

$$\phi_{v_1} + c \leq \phi_{v_2} \quad (4.2)$$

Da alle Knoten einer Knotenmenge durch die Gleichung 4.1 bereits den gleichen Winkel besitzen, reicht es aus, dem Modell für ein Knotenpaar die Ungleichung 4.2 hinzuzufügen. Implizit gilt diese Ungleichung für alle Knoten der jeweiligen Knotenmengen. Eine analoge Vorgehensweise wird bei den konzentrischen Repräsentanten $R_1 = (r_{R_1, \text{Konz}})$ und $R_2 = (r_{R_2, \text{Konz}})$ angewendet. Es ergibt sich folgende Gleichung für zwei Knoten u und v des selben Repräsentanten:

$$r_u = r_v \quad (4.3)$$

Und unter der Bedingung, dass $r_{R_1, \text{Konz}} \leq r_{R_2, \text{Konz}}$ gilt, lauten die entsprechende Ungleichung für je einen Knoten v_1 und v_2 aus den entsprechenden Knotenmengen:

$$r_{v_1} \leq r_{v_2} \quad (4.4)$$

Unter keinen Umständen soll ein Knoten in der radial-konzentrischen Zeichnung auf dem Mittelpunkt liegen. Dies wird erreicht, indem ein fester Mindestabstand d zwischen dem Mittelpunkt und jedem Knoten $v \in V$ vorgegeben wird. Die Formulierung der Ungleichung lautet folgendermaßen:

$$d \leq r_v \quad (4.5)$$

Um das Modell des linearen Programms möglichst klein und damit schnell lösbar zu halten, stellen diese (Un-)Gleichungen die einzigen Nebenbedingungen dar. Dabei ist neben der geringen Anzahl auch der simple Aufbau dieser hervorzuheben.

4.3.2 Zielfunktion

Die Zielfunktion des linearen Programms besteht aus genau einem Optimierungskriterium. Dabei handelt es sich um die Berücksichtigung der Positionen von Knoten im Eingabegraphen. In diesem Abschnitt soll die Modellierung dieses Kriteriums nur grob skizziert werden, da später in Kapitel 5 ausführlich auf diese Optimierung eingegangen wird (siehe Abschnitt 5.2.1).

Es wird der Knoten $v \in V$ betrachtet. Der Abstand zwischen dem Radius, welchen v im Eingabegraphen besaß, und dem neuen Radius wird durch eine Variable δ_r dargestellt. Analog gilt dies für den Abstand der beiden Winkel, wodurch sich eine Variable δ_ϕ ergibt.

Um nun die Distanz zwischen dem Knoten und seiner Position im Eingabegraphen zu verringern, müssen die beiden Variablen minimiert werden. Dies geschieht, indem sie in die Zielfunktion einfließen. Die Zielfunktion lautet:

$$\sum_{v \in V} (\delta_r(v) + \delta_\phi(v)) \quad (4.6)$$

Zur einfacheren Vorstellung hilft die Abbildung 4.8, welche die Idee noch einmal visuell präsentiert.

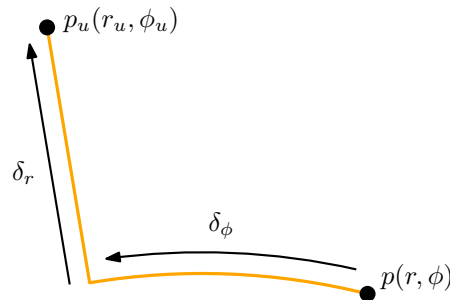


Abb. 4.8: Die Distanz des Knotens p zu seiner ursprünglichen Position p_u wird minimiert

4.4 Implementierung und Ergebnisse

In diesem Abschnitt soll nur eine kurze Einleitung zur Implementierung geliefert werden, da eine ausführliche Beschreibung in Abschnitt 6.1 folgt.

Wie bereits erwähnt konnten mit diesem Ansatz keine praxistauglichen Ergebnisse geliefert werden. Trotzdem sollen erzeugte Zeichnungen präsentiert und Probleme genannt werden.

4.4.1 Implementierung

Zu Beginn wird der Graph zusammen mit Zusatzinformationen wie die Linienverläufe der U-Bahn und die Positionen der Knoten eingelesen. Nachdem der Graph im Programm erzeugt und gespeichert wurde, wird dieser vereinfacht. Danach wird wie in Abschnitt 4.2 dargestellt weiter verfahren: Zuerst kommt die Zuordnung von Knoten zu Repräsentanten. Danach werden Mehrfachabbildungen von Knoten auf einen Punkt aufgelöst und schließlich die Grad-2-Knoten neu verteilt. Ist dies geschehen, wird ein lineares Programm modelliert, welches die späteren Positionen der Knoten berechnet. Abschließend wird eine Datei erzeugt, welche die erzeugte Zeichnung enthält.

Die Unterschiede bei der Implementation des heuristischen Ansatzes im Vergleich zu der Implementation in Abschnitt 6.1 belaufen sich auf den Abschnitt 4.2 und der Verwendung eines linearen Programms und dessen Modellierung.

4.4.2 Ergebnisse und Probleme

Es wird der Graph für das U-Bahn-Liniennetz von Wien betrachtet. Durch Vereinfachung des Graphen konnte die Anzahl der Knoten von 90 auf 19 und die Anzahl der Kanten von 96 auf 25 gesenkt werden. Die Tabelle 4.1 listet die einzelnen Werte der verwendeten Parameter und die benötigte Laufzeit auf. Mit diesen Einstellungen wurde die Zeichnung in Abbildung 4.9 erstellt. Das Ergebnis wurde an wenigen Stellen nachbearbeitet: Es wurden aufeinanderliegende Linien und Liniensegmente zur besseren Übersicht leicht verschoben.

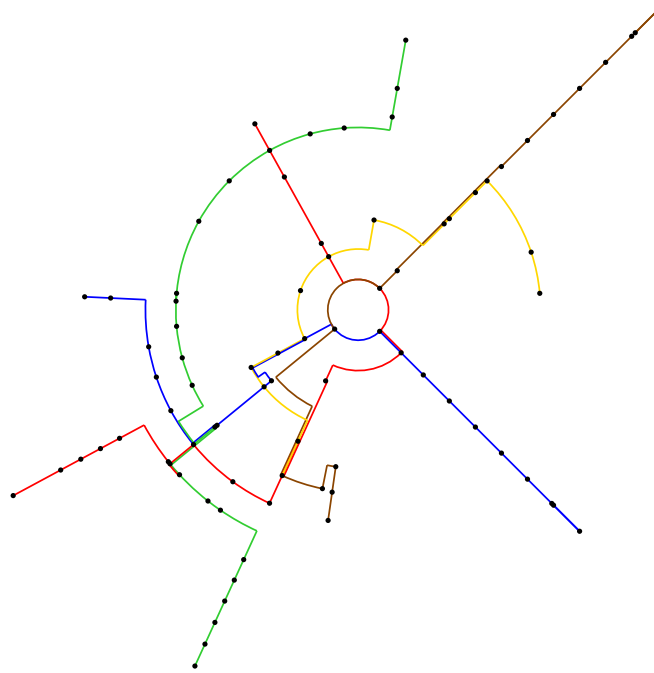
ω	δ_{max}	r_{lb}	r_{ub}	r_r	Laufzeit
20	50	0.70	1.30	0.70	< 1 Sek.

Tab. 4.1: Die verwendeten Werte für die verschiedenen Parameter

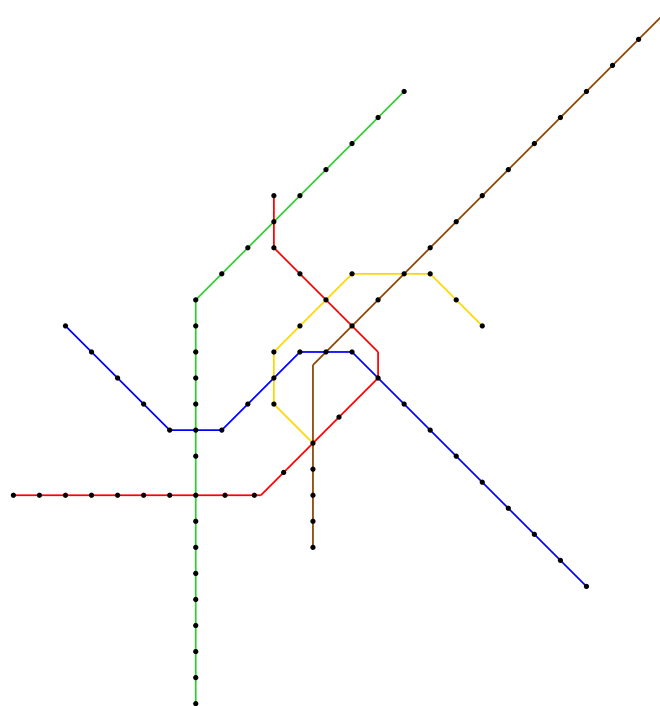
Die erzeugte Zeichnung ist als radial-konzentrischer U-Bahn-Linienplan nicht akzeptabel. So weisen die Linien viele Knicke auf und die relativen Positionen von Knoten im Eingabegraphen bleiben nicht immer erhalten. Das Hauptproblem liegt aber an der sehr hohen Anzahl an Überlappungen. So laufen viele Linien durch Knoten, die nicht auf dieser Linie liegen.

Die Ergebnisse des heuristische Ansatz können durchaus noch verbessert werden. Die Positionierung der Grad-2-Knoten kann komplett nach der Verteilung der Knoten im vereinfachten Graph durch das lineare Programm vorgenommen werden, was einige Knicke in den Kanten und Linienverläufen sowie manche Überlappungen beseitigt. Wegen der sehr geringen Laufzeit kann es sinnvoll sein, diesen Ansatz für kleinere Netzwerke weiter zu verfolgen.

Leider bringt dieser Ansatz auch andere Probleme mit sich: So kann die Auflösung von Mehrfachabbildungen zu unschönen und problematischen Positionen von Knoten führen, was vor allem bei vielen Knoten auf kleinem Raum der Fall ist. Um Kreuzungen und kritische Überlappungen zu vermeiden müssen viele Einzelfälle bedacht und integriert werden (wurde durch Kombination von konzentrischen und radialen Liniensegmente auch teilweise umgesetzt), was gerade bei größeren Graphen sehr problematisch ist. Auch die Reihenfolge der Knoten während der Zuteilung hat starken Einfluss auf das Endergebnis.



(a) Ergebnis des heuristischen Ansatzes für Wien



(b) Oktilinearer U-Bahn-Linienplan von Wien

Abb. 4.9: Ergebnis und Eingabe des heuristischen Ansatzes für Wien

5 Gemischt-Ganzzahliges Programm

Nachdem der in Kapitel 4 erläuterte heuristische Ansatz keine praxistauglichen Ergebnisse vorweisen konnte, wird nun eine andere Lösungsstrategie verfolgt. Diese besteht aus einer Umsetzung des Problems in ein *gemischt-ganzzahliges lineares Programm* (MIP) (siehe Abschnitt 2.3). Um ein solches Programm zur Erstellung eines radial-konzentrischen U-Bahn-Linienplanes einzusetzen, werden die in Kapitel 3.2 grundlegenden Bedingungen als lineare Gleichungen und Ungleichungen interpretiert und die Optimierungskriterien finden ihre Umsetzung in der Definition einer passenden Zielfunktion. Aus zeitlichen Gründen konnten jedoch nicht alle Optimierungskriterien modelliert werden. Findet das Programm eine Lösung, in der alle durch die grundlegenden Bedingungen geforderten Ungleichungen erfüllt sind, so gibt es diese aus und optimiert die Zielfunktion, wodurch die Optimierungskriterien bestmöglichst berücksichtigt werden. Ist das aufgestellte Modell nicht lösbar, bricht das Programm ab.

Zu Beginn werden die grundlegenden Bedingungen und die Optimierungskriterien durch (Un-)Gleichungen formuliert. Danach wird auf zwei Vorgehensweisen zur Verbesserung der Laufzeit des MIP eingegangen. Eine Übersicht über den Ablauf zur Erstellung eines radial-konzentrischen U-Bahn-Linienplanes bietet der Pseudocode im Algorithmus 2.

Algorithmus 2: Automatisches Zeichnen eines U-Bahn-Linienplanes mit radial-konzentrischem Layout

Eingabe : Graph G mit U-Bahn-Liniennetz und Koordinaten der Knoten, Mittelpunkt M

Ausgabe : Radial-konzentrische Zeichnung Z

- 1 Einlesen des Graphen G und die Zusatzinformationen ein
 - 2 Vereinfachung von G
 - 3 Erzeuge eine Zeichnung Z durch Lösen des MIP ohne Nebenbedingungen
 - 4 **while** Nebenbedingung ist verletzt in Z **do**
 - 5 füge nur die momentan benötigten Nebenbedingungen dem MIP hinzu
 - 6 $Z =$ löse das MIP erneut
 - 7 **return** Z ;
-

5.1 Nebenbedingungen

Die im Folgenden aufgeführten linearen Beschränkungen bilden die grundlegenden Bedingungen ab, welche in einem radial-konzentrischen Layout als unabdingbar befunden

den wurden. Diese sind nötig, um später praxistaugliche Ergebnisse zu erzeugen. So soll in Abschnitt 5.1.1 ein fester Bezug zwischen dem Eingabegraphen und der zu erzeugenden Zeichnung sichergestellt werden. Eine kreuzungsfreie Zeichnung wird durch Abschnitt 5.1.2 gewährleistet; Abschnitt 5.1.3 verhindert gewisse Arten von Kantenüberlappungen in der Zeichnung. Abschließend wird in Abschnitt 5.1.4 kontrolliert, dass keine zwei Knoten in der Zeichnung auf demselben Punkt liegen.

5.1.1 Berücksichtigung des Eingabegraphen

Zunächst müssen alle Knoten durch Variablen repräsentiert werden. Sei $n = |V|$ die Anzahl aller Knoten in der Knotenmenge V . Da, wie in Abschnitt 2.2 erläutert, jeder Knoten durch ein Tupel (r, ϕ) dargestellt wird, benötigt man $2n$ kontinuierliche positive Variablen um alle Knoten zu modellieren.

Um den Eingabegraphen zu respektieren und die Zeichenfläche des kompletten Graphen sinnvoll zu begrenzen, wird für jeden Knoten $v \in V$ eine, von der Position des Knotens in der Eingabe abhängige, begrenzte Fläche definiert, in der sich der Knoten später befinden muss (siehe Abbildung 5.1). Ein Knoten v im Eingabegraphen G' wird durch das Tupel (r', ϕ') repräsentiert und in der Zeichnung durch das Tupel (r, ϕ) . Um diese begrenzende Fläche zu schaffen werden drei Konstanten k_l , k_u und c benötigt, wobei k_l und k_u als Faktor dienen. So bildet der Faktor k_l zusammen mit dem Radius r' eine untere Grenze für den Radius r jenes Knotens in der radial-konzentrischen Zeichnung; analog gilt dies für k_u und eine obere Grenze. Ein ähnliches Zusammenspiel zwischen ϕ' und c führt zur Einschränkung des Winkels ϕ . Die ausformulierte Definition der linearen Gleichungen lautet:

$$\begin{aligned} k_l \cdot r' &\leq r \leq k_u \cdot r' \\ \phi' - c &\leq \phi \leq \phi' + c \end{aligned} \tag{5.1}$$

Die verwendeten Faktoren k_l und k_u , sowie die Konstante c sollten hierbei so gewählt werden, dass sie die Ungleichungen nicht zu stark einschränken, also eine gewisse Freiheit bleibt, die Knoten in einem radial-konzentrischen Layout zu verschieben und dadurch ein ansprechenderes Gesamtergebnis zu erzeugen. Da es sich, außer bei den schon erwähnten Koordinaten der Knoten, bei allen verwendeten Werten um Konstanten handelt und diese für die Laufzeit keine Rolle spielen (deshalb auch nicht weiter beachtet werden), sind dem Modell keine neuen Variablen und insgesamt $4n$ Ungleichungen hinzugefügt worden.

5.1.2 Kreuzungen

Bei der Modellierung eines radial-konzentrischen Liniennetzwerkes war eine grundlegende Bedingung, dass in der erzeugten Zeichnung keine Kreuzungen zwischen zwei Kanten erlaubt sind. Wie in Abschnitt 2.1 definiert, existiert eine Kreuzung zwischen einem Kantenpaar $K = (e_1, e_2)$ genau dann, wenn mindestens ein konzentrisches Liniensegment der Kante e_1 von dem radialen Liniensegment der Kante e_2 geschnitten wird oder

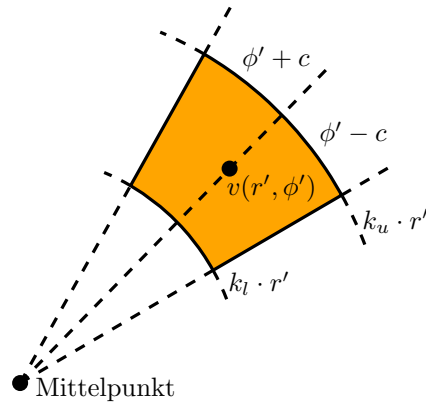


Abb. 5.1: In der radial-konzentrischen Zeichnung muss sich der Knoten v des Eingabegraphen in der orangen Fläche befinden

umgekehrt. Der Fall, dass ein oder zwei konzentrische Liniensegmente der Kante e_2 durch das radiale Liniensegment von e_1 geschnitten werden, soll hierbei durch Umbenennung der Kanten mitbehandelt sein. Im Weiteren wird zunächst davon ausgegangen, dass die beiden Kanten nicht inzident sind. Reduziert man aufgrund der Definition von Kreuzungen die zwei Kanten auf die für Kreuzungen relevanten Objekte, so bleiben maximal zwei konzentrische Liniensegmente von e_1 und das radiale Liniensegment der Kante e_2 übrig (siehe Abbildung 5.2).

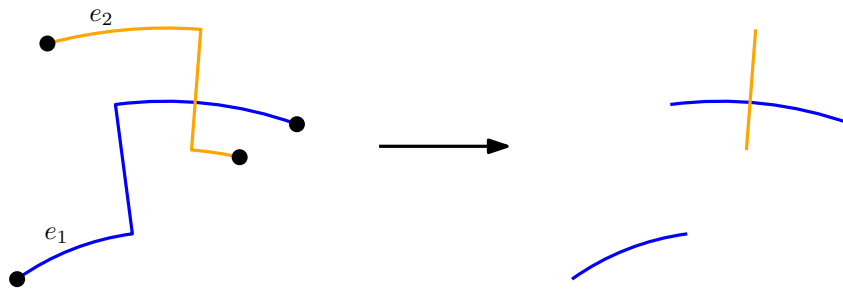


Abb. 5.2: Reduzierung zweier Kanten auf die für eine Kreuzung relevanten Liniensegmente

Werden alle drei übriggebliebenen Liniensegmente zusammen betrachtet, so ist eine Formulierung von linearen Ungleichungen zur Lösung von Kreuzungen ein größeres Problem. Deshalb wird das Problem einer Kreuzung zwischen zwei konzentrischen und einem radialen Liniensegment auf zwei gleiche und einfachere Teilprobleme aufgesplittet. So werden zwei Paare gebildet, die jeweils aus einem der konzentrischen Liniensegmente und dem radialen Segment bestehen. Ist jedes dieser Paare kreuzungsfrei, so ist das Kantenpaar $K = (e_1, e_2)$ kreuzungsfrei. Anhand von Abbildung 5.3 soll nun erläutert werden, welche Möglichkeiten es gibt und welche Bedingungen ausreichend sind, dass es zu keiner Kreuzung zwischen einem radialen und einem konzentrischen Liniensegment kommt. Zunächst wird das radiale Liniensegment durch die zwei Punkte $p_1 = (r_l, \gamma)$ und $p_2 = (r_u, \gamma)$ symbolisiert, wobei diese die Endpunkte der radialen Strecke darstellen und

$r_l < r_u$ gilt. Die konzentrische Strecke wird ebenfalls durch zwei Endpunkte $k_1 = (r, \gamma_l)$ und $k_2 = (r, \gamma_u)$ repräsentiert, welche die Ungleichung $\gamma_l < \gamma_u$ erfüllen. Es werden nun vier Bedingungen aufgelistet, von denen mindestens eine zwischen den zwei Segmenten erfüllt sein muss, um eine Kreuzung auszuschließen.

- Fall 1: Der Radius r_l des Knotens p_1 ist größer als der Radius r des konzentrischen Liniensegments. Somit befindet sich das komplette radiale Liniensegment außerhalb des Kreises, auf dem das konzentrische Segment liegt.
- Fall 2: Der Radius r_u des Knotens p_2 ist kleiner als der Radius r des konzentrischen Liniensegments. Somit befindet sich das komplette radiale Liniensegment innerhalb des Kreises, auf dem das konzentrische Segment liegt.
- Fall 3: Der Winkel γ des radialen Liniensegments ist kleiner als der Winkel γ_l des Knotens k_1 . Somit kann sich das radiale Liniensegment niemals zwischen den beiden Winkeln γ_l und γ_u befinden, in welchem das konzentrische Segment liegt.
- Fall 4: Der Winkel γ des radialen Liniensegments ist größer als der Winkel γ_u des Knotens k_2 . Somit ergibt sich die gleiche Situation wie in Fall 3.

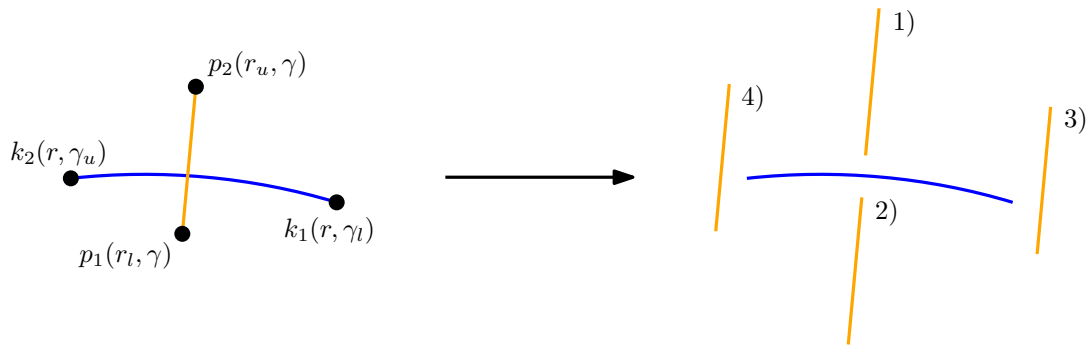


Abb. 5.3: Zur Vermeidung einer Kreuzung müssen sich die Liniensegmente in einer der vier Konstellationen befinden

Auf Basis dieser vier Fälle werden nun lineare Ungleichungen definiert, welche zusammen die Unterbindung von Kreuzungen zwischen Kanten modellieren. Hierzu wird eine Reihe weiterer Variablen benötigt. So wird jedes radiale Segment einer Kante $e \in E$ durch eine Variable e_{Radial} repräsentiert. Als nächstes werden die Variablen für ein konzentrisches Liniensegment der Kante e_1 festgelegt. Ein konzentrisches Liniensegment wird durch einen Radius und zwei Winkel beschrieben. Durch die Definition einer Kante in Abschnitt 2.1 kann sicher davon ausgegangen werden, dass ein Endknoten des Liniensegments durch einen Endknoten der Kante, im Folgenden mit $p = (r, \phi)$ adressiert, festgelegt wird. Der andere Endknoten ergibt sich aus dem Winkel des radialen Segments $e_{1\text{Radial}}$ der Kante e_1 und dem Radius r des Knotens p . Da es sich bei den beiden Winkeln ϕ und $e_{1\text{Radial}}$ um Variablen handelt, werden zwei Hilfsvariablen eingeführt, die eine Ordnung der Winkel ermöglichen. Dies ist nötig, um später allgemeine Ungleichungen

zu entwerfen. Der kleinere Winkel soll durch die Hilfsvariable γ_l und der größere durch γ_u ausgedrückt werden. Eine entsprechende Umsetzung im Modell wird durch folgende Ungleichungen vorgenommen:

$$\begin{aligned} \gamma_l &\leq \phi &\leq \gamma_u \\ \gamma_l &\leq e_{1\text{Radial}} &\leq \gamma_u \end{aligned} \tag{5.2}$$

Nachdem ein konzentrisches Liniensegment der Kante e_1 durch die Winkel γ_l , γ_u und den Radius r eindeutig beschrieben ist, erfolgt eine ähnliche Vorgehensweise auch bei dem radialen Liniensegment der Kante e_2 . Ein solches wird durch zwei Radien und einen Winkel beschrieben. Die Definition einer Kante in der Zeichnung stellt sicher, dass besagte Radien, denen der Endknoten der Kante e_2 entspricht, nachfolgend mit r_1 und r_2 benannt, und der Winkel durch die Variable $e_{2\text{Radial}}$ abgebildet wird. Wiederum wird eine Ordnung benötigt - diesmal für die Radien. Daher werden zwei weitere Hilfsvariablen r_l und r_u eingeführt, von denen r_l den kleineren und r_u den größeren Radius repräsentieren soll. Die Ungleichungen sind analog zu den bereits Verwendeten formuliert:

$$\begin{aligned} r_l &\leq r_1 &\leq r_u \\ r_l &\leq r_2 &\leq r_u \end{aligned} \tag{5.3}$$

Da es zur Vermeidung einer Kreuzung ausreichend ist, wenn einer der vier genannten Fälle eintritt, kann mithilfe einer großen Konstante M und zweier Binärvariablen X_1 und X_2 der in Abschnitt 2.3 erklärte Trick angewendet werden. Als letzte Vorbereitung werden zwei Konstanten ϵ und ϵ_r definiert. Durch diese wird sichergestellt, dass eine Variable echt kleiner bzw. größer als eine andere Variable ist. Diese Vorgehensweise wird sich in späteren Formulierungen von Ungleichungen wiederfinden; es kann davon ausgegangen werden, dass Konstanten immer diesen Zweck besitzen, falls nicht ausdrücklich ein anderer genannt wird. Der Wert der Konstanten ϵ muss größer 0 sein und ϵ_r muss im Intervall zwischen]0,1[liegen. Nachdem nun alle Variablen und Konstanten zur Lösung des Problems definiert wurden, können die Ungleichungen entsprechend der Reihenfolge der Fälle konkret umgesetzt werden:

$$\begin{aligned} r &\leq r_l \cdot \epsilon_r &+ M(X_1 + X_2) \\ r_u &\leq r \cdot \epsilon_r &+ M((1 - X_1) + X_2) \\ e_{2\text{Radial}} + \epsilon &\leq \gamma_l &+ M(X_1 + (1 - X_2)) \\ \gamma_u + \epsilon &\leq e_{2\text{Radial}} &+ M((1 - X_1) + (1 - X_2)) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Wie man aus dem Aufbau der Ungleichungen folgern kann, ist immer genau eine Ungleichung aktiviert und der Rest deaktiviert. Dadurch ist sichergestellt, dass sich das konzentrische und das radiale Liniensegment in einem Zustand ohne Kreuzung befinden.

Bisher wurde gefordert, dass das Kantenpaar $K = (e_1, e_2)$ nicht inzident ist. Diese Einschränkung wird nun aufgehoben. Der Unterschied zwischen einem inzidenten Kantenpaar gegenüber einem nicht inzidenten Kantenpaar besteht darin, dass nur ein Paar

aus einem konzentrischen Liniensegment der Kante e_1 und dem radialen Liniensegment der Kante e_2 auf eine Kreuzung getestet wird. Dabei wird das konzentrische Liniensegment der Kante e_1 beobachtet, welches nicht den gemeinsamen Knoten als Endknoten besitzt (siehe Abbildung 5.4).

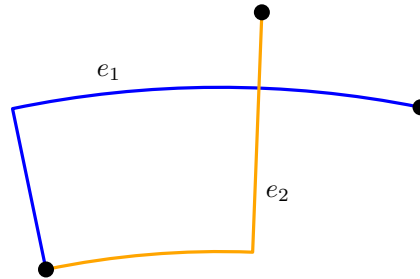


Abb. 5.4: Kreuzung zwischen zwei inzidenten Kanten

Dem Modell wird für jede Kante $e \in E$ eine Variable e_{Radial} für den Winkel des radialen Liniensegments dieser Kante und somit insgesamt $|E|$ viele hinzugefügt. Zu beachten ist, dass sich die oben geführte Erläuterung nur auf ein Paar bestehend aus einem konzentrischen Liniensegment und einem radialen Liniensegment bezieht, aber im Allgemeinen zwei solcher Paare betrachtet werden müssen (wobei das radiale Segment nur einmal berücksichtigt werden muss). Mit der beschriebenen Formulierung zur Vermeidung von Kreuzungen werden pro Kante sechs Variablen und zwölf Ungleichungen benötigt. Hinzu kommen vier Ungleichungen für jedes geordnete Kantenpaar. Da es $\mathcal{O}(|E|^2)$ Kantenpaare gibt, macht es aus praktischer Sicht keinen Sinn für jedes Paar diese Bedingung von vornherein einzufügen, da beispielsweise eine Kreuzung zwischen zwei im Eingabegraphen weit entfernten Kanten sehr unwahrscheinlich ist. Deshalb wird in Abschnitt 5.3 erläutert, wie man die Anzahl der zu betrachtenden Kantenpaare (und somit das Modell) möglichst klein hält.

5.1.3 Überlappungen

Durch die bisherigen Bedingungen wird sichergestellt, dass einerseits auf den Eingabegraphen Rücksicht genommen wird und andererseits die Zeichnung keine Kreuzungen aufweist. Trotzdem müssen für eine praxistaugliche Zeichnung noch weitere Anpassungen des Modells vorgenommen werden. So sollen gewisse Arten von Überlappungen von zwei Kanten derselben Linie oder von zwei verschiedenen Linien verboten werden, wobei die Kanten immer einen gemeinsamen Knoten besitzen. Außerdem darf kein Knoten auf einer Kante mit konzentrischem Verlauf liegen.

Überlappung von Kanten einer Linie

Zuerst soll der Fokus auf zwei Kanten derselben Linie liegen. In Abbildung 5.5(a) ist bereits zu erkennen, dass durch solche Überlappungen der Verlauf der Linie auf den ersten Blick schwer verständlich ist. In Abbildung 5.5(b) wird ein durch Überlappung

entstehendes Problem aufgezeigt, bei dem der Verlauf der Linie ohne weitere Kenntnisse des Netzes nicht nachvollziehbar ist.

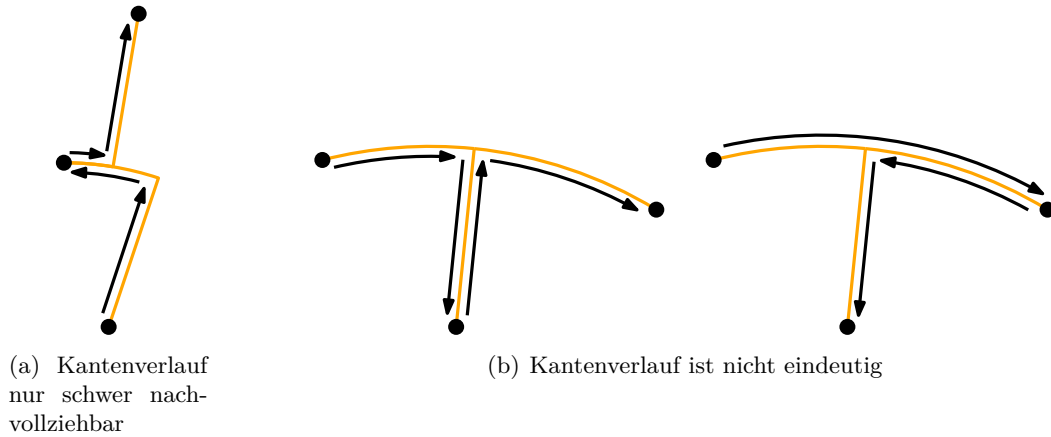


Abb. 5.5: Überlappung zweier Kanten derselben Linie

Als Ursache für das Problem konnte die Position der beiden radialen Liniensegmente der Kanten identifiziert werden. Möge der gemeinsame Knoten der beiden Kanten e_1 und e_2 durch $p = (r, \phi)$ beschrieben sein und $e_{1\text{Radial}}$ und $e_{2\text{Radial}}$ erneut die Winkel der radialen Segmente der Kanten e_1 und e_2 darstellen. Es existiert eine Überlappung der zwei Kanten in mindestens einem ihrer konzentrischen Liniensegmente, wenn $e_{1\text{Radial}}$ und $e_{2\text{Radial}}$ entweder beide kleiner oder beide größer als ϕ sind (siehe Abbildung 5.6(a)). Weiterhin existiert eine Überlappung, wenn die Winkel beider radialen Liniensegmente gleich ϕ sind und die Radien der jeweils anderen Endknoten der Kanten, im Nachfolgenden r_1 für den Radius des Endknotens von e_1 und r_2 für das Pendant der Kante e_2 genannt, beide kleiner oder beide größer als r sind (siehe Abbildung 5.6(b)).

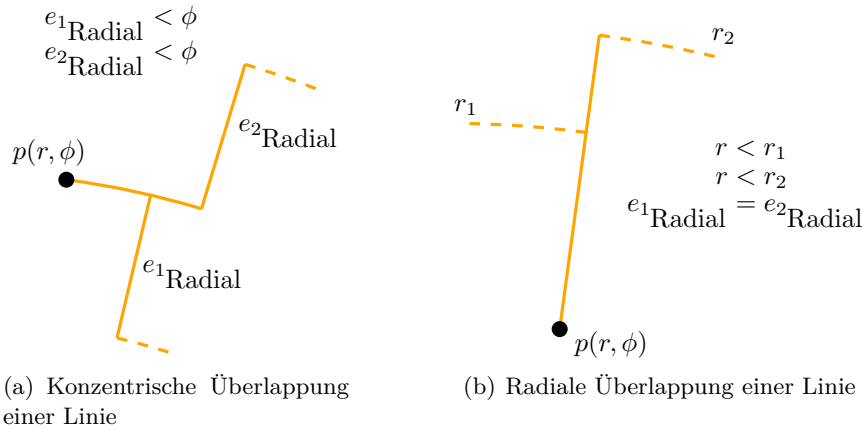


Abb. 5.6: Bedingungen die zu einer Überlappung einer Linie führen ohne deren symmetrische Fälle

Wie zwei Kanten mit einem gemeinsamen Knoten frei von Überlappungen zueinander liegen können wird in Abbildung 5.7 dargestellt und soll nun durch eine Reihe von Ungleichungen modelliert werden.

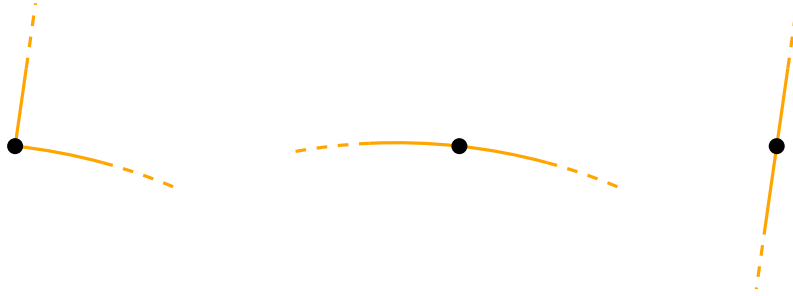


Abb. 5.7: Kantenverlauf einer Linie ohne Überlappung

Zunächst soll der erste Teilfall verhindert werden, bei dem die Winkel der radialen Liniensegmente beide kleiner oder größer als der Winkel ϕ sind. Um dies zu bewerkstelligen, werden für jede Kante $e \in E$ zwei binäre Variablen, $X_{e_{1R} < \phi}$ und $X_{\phi < e_{1R}}$, eingefügt; auch wird eine Konstante ϵ benötigt. Man betrachtet die Kante e_1 : Die Idee hinter der Struktur der Ungleichungen besteht darin, dass die Binärvariable $X_{e_{1R} < \phi}$ den Wert 1 besitzt, wenn der Winkel $e_{1\text{Radial}}$ echt kleiner als der Winkel ϕ ist; andernfalls den Wert 0. Analog wird bei der Binärvariable $X_{\phi < e_{1R}}$ vorgegangen: Diese ist jedoch genau dann 1, wenn der Winkel $e_{1\text{Radial}}$ echt größer als der Winkel ϕ ist und hat sonst den Wert 0. Die Ausformulierung der Ungleichungen lautet:

$$\begin{aligned}
 \phi & \leq e_{1\text{Radial}} + MX_{e_{1R} < \phi} \\
 e_{1\text{Radial}} + \epsilon & \leq \phi + M(1 - X_{e_{1R} < \phi}) \\
 e_{1\text{Radial}} & \leq \phi + MX_{\phi < e_{1R}} \\
 \phi + \epsilon & \leq e_{1\text{Radial}} + M(1 - X_{\phi < e_{1R}})
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Nachfolgende Tabelle listet noch einmal alle möglichen Kombinationen der Werte der Binärvariablen und der damit verbundenen Auswirkungen auf den Winkel des radialen Liniensegments auf. Es gilt zu beachten, dass nicht beide binäre Variablen zugleich den Wert 1 annehmen können, da per Definition $\epsilon > 0$ gilt und deshalb $e_{1\text{Radial}} + \epsilon \leq \phi \leq e_{1\text{Radial}} - \epsilon$ gelten würde, was einen Widerspruch darstellt.

Wert von $X_{e_{1R} < \phi}$	Wert von $X_{\phi < e_{1R}}$	Bedingung
1	0	$e_{1\text{Radial}} < \phi$
0	1	$e_{1\text{Radial}} > \phi$
0	0	$e_{1\text{Radial}} = \phi$
1	1	nicht möglich

Tab. 5.1: Kombinationen der Binärvariablen und deren Auswirkung

Analog werden die Ungleichungen für die Kante e_2 aufgebaut. Nun muss noch dafür gesorgt werden, dass die Binärvariable $X_{e_{1R} < \phi}$ der Kante e_1 nicht zur selben Zeit wie sein Pendant der Kante e_2 den Wert 1 annimmt. Analog gilt dies für $X_{\phi < e_{1R}}$ und dessen Pendant. Dies wird durch folgende Ungleichungen sichergestellt:

$$\begin{aligned} X_{e_{1R} < \phi} + X_{e_{2R} < \phi} &\leq 1 \\ X_{\phi < e_{1R}} + X_{\phi < e_{2R}} &\leq 1 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Der erste Teilfall ist somit abgeschlossen, da die Winkel der radialen Liniensegmente nicht mehr beide größer oder beide kleiner als der Winkel ϕ des gemeinsamen Knotens sein können.

Aber es ist bisher noch möglich, dass beide Kanten den gemeinsamen Knoten radial verlassen, was zu einer Überlappung führen kann. Um diesen zweiten Teilfall zu vermeiden, wird eine Eigenschaft der Binärvariablen, die durch die Ungleichungen entsteht, ausgenutzt. So verlässt eine Kante den gemeinsamen Knoten genau dann radial, wenn ihre beiden in diesem Abschnitt betrachteten Binärvariablen den Wert 0 haben. Indem die zwei Radien r_1 und r_2 der anderen Endknoten der beiden Kanten so gewählt werden, dass der eine kleiner und der andere größer als der Radius r des gemeinsamen Knotens ist, lässt sich eine Überlappung verhindern. Zur Modellierung der Ungleichungen wird eine neue Binärvariable X_r benötigt, die entscheidet welche der Radien r_1 und r_2 kleiner bzw. größer als r ist; ebenso wird ein Modifikator ϵ_r gebraucht.

$$\begin{aligned} r_1 &\leq r \cdot \epsilon_r + M(X_r + X_{e_{1R} < \phi} + X_{\phi < e_{1R}} + X_{e_{2R} < \phi} + X_{\phi < e_{2R}}) \\ r &\leq r_2 \cdot \epsilon_r + M(X_r + X_{e_{1R} < \phi} + X_{\phi < e_{1R}} + X_{e_{2R} < \phi} + X_{\phi < e_{2R}}) \\ r_2 &\leq r \cdot \epsilon_r + M((1 - X_r) + X_{e_{1R} < \phi} + X_{\phi < e_{1R}} + X_{e_{2R} < \phi} + X_{\phi < e_{2R}}) \\ r &\leq r_1 \cdot \epsilon_r + M((1 - X_r) + X_{e_{1R} < \phi} + X_{\phi < e_{1R}} + X_{e_{2R} < \phi} + X_{\phi < e_{2R}}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Zur Vermeidung von konzentrischen Überlappungen bei einem ungeordneten Kantenpaar werden vier Binärvariablen und zehn Ungleichungen benötigt. Zusätzlich werden eine Binärvariable und vier Ungleichungen fällig, um radiale Überlappung auszuschließen.

Überlappung von Kanten unterschiedlicher Linien

Angenommen, zwei Kanten e_1 und e_2 gehören zu unterschiedlichen Linien und beide Kanten besitzen einen gemeinsamen Knoten $p = (r, \phi)$. So gibt es zwei Fälle, wobei jeder Fall aus zwei weiteren Teilfällen besteht, die zu Überlappungen führen, durch die der Linienverlauf nicht eindeutig ist. Im ersten Fall verläuft die Kante e_1 komplett konzentrisch. In einem Teilfall ist der Winkel des nicht gemeinsamen Endknoten $p_1 = (r_1, \phi_1)$ von e_1 kleiner als ϕ und größer als der Winkel $e_{2\text{Radial}}$ des radialen Liniensegments der Kante e_2 . Der andere Teilfall tritt ein, wenn ϕ_1 größer als ϕ und $e_{2\text{Radial}}$ größer als ϕ_1 ist (siehe Abbildung 5.8).

Im zweiten Fall verläuft die Kante e_1 komplett radial. Für den Radius r_2 des nicht gemeinsame Endknoten $p_2 = (r_2, \phi_2)$ von e_2 gilt im ersten Teilfall, dass er sowohl größer

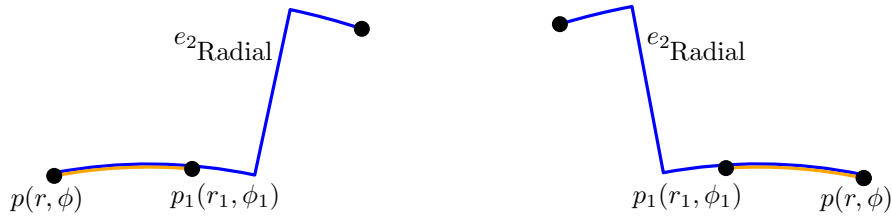


Abb. 5.8: Kritische konzentrische Überlappung von Kanten

als r_1 , als auch r ist. Der Radius von p_1 ist größer als r . Der zweite Teilfall tritt ein, wenn r_1 kleiner als r und r_2 kleiner als r_1 ist (siehe Abbildung 5.9).

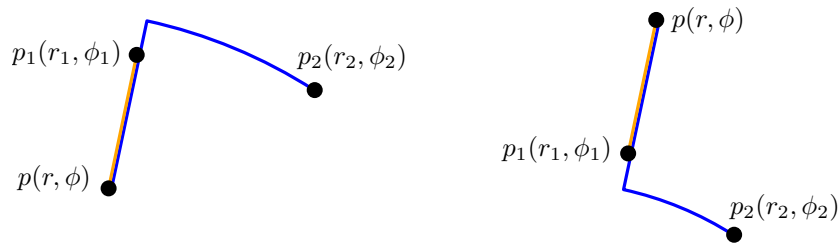


Abb. 5.9: Kritische radiale Überlappung von Kanten

Zunächst soll der erste Fall beachtet werden. Hierbei kann der erste Teilfall verhindert werden, wenn $e_{2\text{Radial}}$ größer als ϕ_1 ist. Zur Vermeidung des zweiten Teilfalls muss gelten, dass $e_{2\text{Radial}}$ kleiner als ϕ_1 ist (siehe Abbildung 5.10).

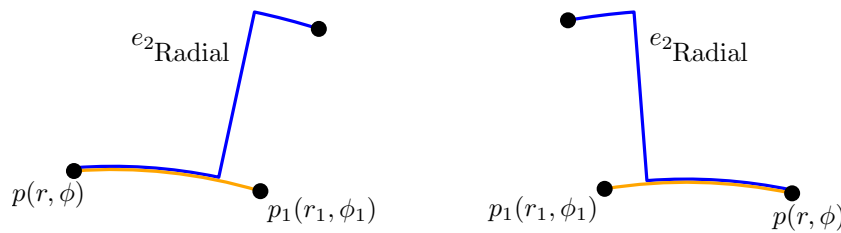


Abb. 5.10: Lösung der konzentrischen Überlappung zweier Kanten

Der zweite Fall kann durch Bedingungen an die Radien von p_1 und p_2 gelöst werden. Im ersten Teilfall gilt somit, dass r_2 kleiner als r_1 sein muss, und im zweiten, dass r_2 größer als r_1 sein muss (siehe Abbildung 5.11). Beachte, dass durch diese Lösung immer noch eine Überlappung existieren kann, aber der Verlauf der Linien in der Zeichnung nun eindeutig nachvollziehbar ist.

Es werden pro Kante $e \in E$ zwei Binärvariablen X_{1,e_1} und X_{2,e_1} benötigt. Außerdem wird eine Konstante ϵ sowie eine Binärvariable Z_{1,e_1} , die den Wert 0 besitzt, falls die Kante e_1 konzentrisch ist, gefordert. Z_{1,e_1} wird durch die Zielfunktion beeinflusst und deshalb in Abschnitt 5.2.3 konkret eingeführt. Zuerst werden Ungleichungen für die Teilfälle aufgestellt, in denen die Kante e_1 konzentrisch ist.

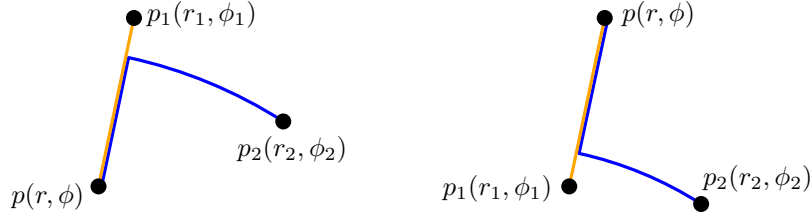


Abb. 5.11: Lösung der radialen Überlappung zweier Kanten

$$\begin{aligned} \phi_1 &\leq \phi + MX_{1,e_1} \\ e_{2\text{Radial}} &\leq \phi + MX_{1,e_2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ist ϕ sowohl kleiner als ϕ_1 als auch $e_{2\text{Radial}}$, so müssen die Binärvariablen X_{1,e_1} und X_{1,e_2} den Wert 1 besitzen. Die Binärvariablen X_{2,e_1} und X_{2,e_2} sollen beide den Wert 1 annehmen, falls ϕ größer als ϕ_1 und $e_{2\text{Radial}}$ ist. Die Formulierung der Ungleichungen lautet:

$$\begin{aligned} \phi &\leq \phi_1 + MX_{2,e_1} \\ \phi &\leq e_{2\text{Radial}} + MX_{2,e_2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Sind entweder X_{1,e_1} und X_{1,e_2} oder X_{2,e_1} und X_{2,e_2} beide vom Wert 1, kann es zu einer problematischen Überlappung kommen.

$$\begin{aligned} e_{2\text{Radial}} + \epsilon &\leq \phi_1 + M(Z_{1,e_1} + (1 - X_{1,e_1}) + (1 - X_{1,e_2})) \\ \phi_1 + \epsilon &\leq e_{2\text{Radial}} + M(Z_{1,e_1} + (1 - X_{2,e_1}) + (1 - X_{2,e_2})) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Diese Ungleichungen stellen sicher, dass eine der zuvor beschriebenen problemfreien Situationen eintritt und somit eine kritische Überlappung vermieden wird. Alle Teilfälle des ersten Falls sind gelöst und der Linienverlauf der Kanten ist eindeutig.

Nun werden die Teilfälle des zweiten Falles betrachtet, in denen die Kante e_1 radial verläuft. Dabei werden die Ungleichungen aus (5.8) und (5.9) so erweitert, dass alle vier Binärvariablen X_{1,e_1} , X_{2,e_1} , X_{1,e_2} und X_{2,e_2} genau dann den Wert 0 besitzen, wenn beide Kanten radial verlaufen. Die Formulierung der Ungleichungen lautet:

$$\begin{aligned} \phi + \epsilon &\leq \phi_1 + M(1 - X_{1,e_1}) \\ \phi + \epsilon &\leq e_{2\text{Radial}} + M(1 - X_{1,e_2}) \\ \phi_1 + \epsilon &\leq \phi + M(1 - X_{2,e_1}) \\ e_{2\text{Radial}} + \epsilon &\leq \phi + M(1 - X_{2,e_2}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Es wird eine neue Binärvariable $D_{r < r_1}$ eingeführt, welche entscheidet, ob der alleinige Endknoten der Kante e_1 näher am Mittelpunkt liegt als der gemeinsame Knoten. Ebenso existiert eine Binärvariable Z_{2,e_1} für e_1 , welche den Wert 0 beträgt, wenn diese, wie

gefordert, radial verläuft. Diese steht wiederum unter Einfluss der Zielfunktion, weshalb auf den entsprechenden Abschnitt 5.2.3 verwiesen wird. Die Ungleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
 r_1 &\leq r && +MD_{r < r_1} \\
 r_1 &\leq r_2 \cdot \epsilon_r && +M(D_{r < r_1} + Z_{2,e_1} + X_{1,e_1} + X_{2,e_1} + X_{1,e_2} + X_{2,e_2}) \\
 r_2 &\leq r_1 \cdot \epsilon_r && +M((1 - D_{r < r_1}) + Z_{2,e_1} + X_{1,e_1} + X_{2,e_1} + X_{1,e_2} + X_{2,e_2})
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Handelt es sich um eine Überlappung der konzentrischen Art werden zwei neuen Variablen und sechs Ungleichungen benötigt. Zur Vermeidung von radialen Überlappungen werden zusätzlich eine Binärvariable und sieben Ungleichungen nötig.

Überlappung von Kanten ohne gemeinsamen Knoten

Alle bisherigen Überlappungen hatten gemeinsam, dass die zwei betrachteten Kanten inzident waren. Nun werden Kanten betrachtet, die nicht inzident sind. Durch die bereits vorgestellten Nebenbedingungen ist eine Überlappung zwischen solchen Kanten nur möglich, wenn mindestens eine konzentrisch verläuft (siehe Abbildung 5.12).

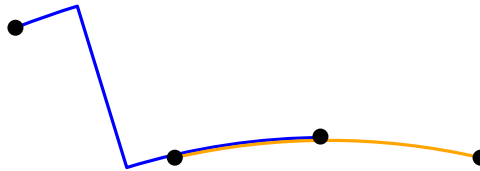


Abb. 5.12: Überlappung von nicht inzidenten Kanten

Um diese Überlappung zu verhindern wird ein ähnlicher Ansatz wie in Abschnitt 5.1.2 gewählt. So wird zunächst das Problem reduziert auf die konzentrische Kante e_1 und den Endknoten $v = (r_v, \phi_v)$ der Kante e_2 , welcher auf e_1 liegt. Die Endknoten der Kante e_1 seien durch $k = (r, \phi_l)$ und $k = (r, \phi_u)$ mit $\phi_l < \phi_u$ parametrisiert. Es gibt vier mögliche Bedingungen, sodass keine Überlappung entsteht, wobei mindestens eine dieser Bedingungen erfüllt sein muss (siehe Abbildung 5.13).

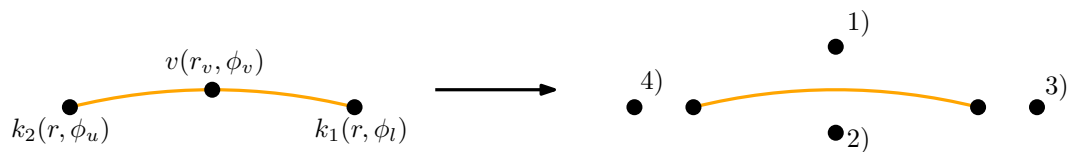


Abb. 5.13: Verschiedene Möglichkeiten zur Vermeidung einer Überlappung

Fall 1: Der Radius r_v des Knotens v ist größer als der Radius r des konzentrischen Liniensegments. Somit befindet sich v außerhalb des Kreises auf dem die konzentrische Kante verläuft.

- Fall 2: Der Radius r_v des Knotens v ist kleiner als der Radius r des konzentrischen Liniensegments. Somit befindet sich v innerhalb des Kreises auf dem die konzentrische Kante verläuft.
- Fall 3: Der Winkel ϕ_v des Knotens v ist kleiner als der Winkel ϕ_l des Knotens k_1 . Somit kann sich der Knoten v nicht mehr zwischen den beiden Winkeln ϕ_l und ϕ_u befinden.
- Fall 4: Der Winkel ϕ_v des Knotens v ist größer als der Winkel ϕ_u des Knotens k_2 . Somit ergibt sich die gleiche Situation wie in Fall 3.

Um diese Fälle zu modellieren wird eine allgemeine Ordnung der Winkel der Endknoten der Kante e_1 benötigt und deshalb werden zwei Hilfsvariablen h_l und h_u eingeführt. Die Variable h_l soll den kleineren und h_u den größeren Winkel repräsentieren. Die Ungleichungen lauten:

$$\begin{aligned} h_l &\leq \phi_l \\ h_l &\leq \phi_u \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} \phi_l &\leq h_u \\ \phi_u &\leq h_u \end{aligned} \tag{5.14}$$

Da die betrachtete Kante konzentrisch verlaufen muss, kann erneut die bereits erwähnte Binärvariable Z_{1,e_1} verwendet werden. Zu deren Herkunft wird wieder auf Abschnitt 5.2.3 verwiesen. Außerdem werden zwei neue Binärvariablen X_v und Y_v benötigt. Die Ungleichungen werden nun formuliert:

$$\begin{aligned} r &\leq r_v \cdot \epsilon_r + M(X_v + Y_v + Z_{1,e_1}) \\ r_v &\leq r \cdot \epsilon_r + M((1 - X_v) + Y_v + Z_{1,e_1}) \\ \phi_v + \epsilon &\leq h_l + M(X_v + (1 - Y_v) + Z_{1,e_1}) \\ h_u + \epsilon &\leq \phi_v + M((1 - X_v) + (1 - Y_v) + Z_{1,e_1}) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Die Reihenfolge der Ungleichungen entspricht der Reihenfolge der Fälle. Es ist immer genau eine Ungleichung aktiviert, womit sich der betrachtete Knoten v und die Kante e_1 in mindestens einem der Fälle und somit in einem Zustand ohne Überlappung befinden. Insgesamt werden zur Modellierung zwei Hilfsvariablen und zwei Binärvariablen pro Knoten und acht Ungleichungen pro Kante-Knoten-Paar benötigt.

5.1.4 Mehrfachabbildung

In der Zeichnung des Linienplans dürfen keine zwei Knoten aufeinanderliegen, da sonst das Liniennetzwerk nicht korrekt dargestellt wird. Dies soll nun durch entsprechende Bedingungen gewährleistet werden. Zwei unterschiedliche Knoten $p_1 = (r_1, \phi_1)$ und $p_2 = (r_2, \phi_2)$ bilden genau dann auf den gleichen Punkt ab, wenn beide Radien und

beide Winkel gleich sind. Um dieses Problem zu beheben, müssen sich die zwei Knoten in mindestens einer Koordinate unterscheiden. Dies soll mit Hilfe von zwei binären Variablen G_1 und G_2 erreicht werden:

$$\begin{aligned}
\phi_1 + \epsilon &\leq \phi_2 && +M(G_1 + G_2) \\
\phi_2 + \epsilon &\leq \phi_1 && +M((1 - G_1) + G_2) \\
r_1 &\leq r_2 \cdot \epsilon_r && +M(G_1 + (1 - G_2)) \\
r_2 &\leq r_1 \cdot \epsilon_r && +M((1 - G_1) + (1 - G_2))
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Aus mehreren Gründen (beispielsweise der Berücksichtigung des Eingabegraphen oder verschiedener Optimierungskriterien in der Zielfunktion) ist es äußerst unwahrscheinlich, dass zwei Knoten aufeinander abgebildet werden. Es ist in Hinsicht auf die Laufzeit kontraproduktiv das Modell für jedes Knotenpaar um zwei Binärvariablen und vier Ungleichungen zu erweitern. Deshalb sollte diese Bedingung nur eingeführt werden, wenn sie benötigt wird. Dieser Sachverhalt soll in Abschnitt 5.3 näher beschrieben werden.

5.2 Zielfunktion

In der Zielfunktion werden die Optimierungskriterien aus Abschnitt 3.2 so modelliert, dass sie durch Minimierung dieser Zielfunktion optimal umgesetzt werden. Dies geschieht selbstverständlich unter Berücksichtigung der bereits formulierten grundlegenden Bedingungen. Die verwendete Zielfunktion setzt sich aus vier verschiedenen Optimierungskriterien zusammen. Jede dieser Kriterien besitzt eine eigene Zielfunktion, die, verschieden gewichtet, in die gemeinsame Zielfunktion einfließt, woraus eine gleichzeitige Optimierung der einzelnen Zielfunktionen erfolgt:

$$\lambda_{\text{Eingabe}} \text{Kosten}_{\text{Eingabe}} + \lambda_{\text{Kante}} \text{Kosten}_{\text{Kante}} + \lambda_{\text{Verlauf}} \text{Kosten}_{\text{Verlauf}} + \lambda_{\text{Linie}} \text{Kosten}_{\text{Linie}} \tag{5.17}$$

Die verschiedenen λ_i repräsentieren Modifikatoren für die Gewichtung der Zielfunktionen der einzelnen Kriterien. Die relative Gewichtung dieser hängt einerseits von deren Formulierung und andererseits von speziellen Ansprüchen an die Zeichnung ab.

5.2.1 Berücksichtigung der Ursprungsposition eines Knotens

Um dem Eingabegraphen mehr Gewicht in der radial-konzentrischen Zeichnung zu verleihen, wird eine Zielfunktion modelliert, durch die Knoten belohnt werden, welche nahe an ihrer ursprünglichen Position im Eingabegraphen liegen. Dadurch kann es beispielsweise für die Benutzer des Linienplanes einfacher sein, diesen zu verstehen, da sich der Standort der einzelnen Stationen von ihrer mentalen Stadtkarte geringer unterscheidet. Für jeden Knoten $v \in V$ werden zu diesem Zweck zwei Variablen δ_r und δ_ϕ angelegt, welche zusammen in die Zielfunktion einfließen:

$$\text{Kosten}_{\text{Eingabe}} = \sum_{v \in V} (\delta_r(v) + \delta_\phi(v)) \quad (5.18)$$

Für eine einfachere Schreibweise wird $\delta_r(v)$ als δ_r und $\delta_\phi(v)$ als δ_ϕ dargestellt. Der Knoten $p_u = (r_u, \phi_u)$ repräsentiert den Ursprungsstandort des Knotens $p = (r, \phi)$ im Eingabegraphen. Durch δ_r wird der Unterschied zwischen den beiden Radien r_u und r wiedergegeben. Die Variable δ_ϕ entspricht der Länge des Bogenmaßes, das durch den Winkel zwischen ϕ und ϕ_u und den Radius r berechnet wird (siehe Abbildung 5.14).

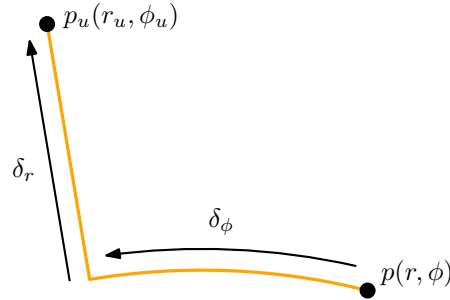


Abb. 5.14: Die Distanz des Knotens p zu seiner ursprünglichen Position p_u wird minimiert

Da die Zielfunktion minimiert wird, ist es umso günstiger, je näher δ_r und δ_ϕ an dem Wert 0 liegen. Dies wird genau dann erreicht, wenn p_u und p direkt aufeinander liegen. Beachte, dass r_u und ϕ_u Konstanten sind und dadurch folgende lineare Ungleichungen für das Model formuliert werden können:

$$\begin{aligned} r_u - r &\leq \delta_r \\ r - r_u &\leq \delta_r \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} r_u \cdot \phi_u - r_u \cdot \phi &\leq \delta_\phi \\ r_u \cdot \phi - r_u \cdot \phi_u &\leq \delta_\phi \end{aligned} \quad (5.20)$$

Die Beschaffenheit des Eingabegraphen hat starke Auswirkungen auf die Kosten, die diese Zielfunktion verursacht. Deswegen ist eine sorgfältige Anpassung der Gewichtung durch den Modifikator λ_{Eingabe} nötig. Insgesamt werden für diese Zielfunktion zwei Variablen und vier Ungleichungen benötigt.

5.2.2 Knickminimierung für eine Kante

Um das visuelle Verfolgen einer Linie im Netzwerk möglichst einfach zu gestalten, können die einzelnen Linien unterschiedlich eingefärbt werden. Aber auch eine geringe Anzahl von Knicken in einer Linie erhöht die Lesbarkeit eines U-Bahn-Linienplanes und erleichtert den Umgang damit. Da Linien aus Kanten bestehen, werden zuerst Optimierungskriterien zur Knickminimierung in einzelnen Kanten modelliert. Eine Kante kann

keinen, einen oder zwei Knicke besitzen (siehe Abbildung 5.15), doch ist eine Kante ohne Knicke einer Kante mit einem Knick und diese wiederum einer Kante mit zwei Knicken vorzuziehen. Dies muss entsprechend auch in der Zielfunktion berücksichtigt werden:

$$\text{Kosten}_{\text{Kante}} = \sum_{e \in E} (R_1(e) + R_2(e) + 2K(e)) \quad (5.21)$$

Im weiteren Text wird die Variable $R_1(e)$ durch R_1 dargestellt; analog wird mit $R_2(e)$ und $K(e)$ verfahren. Hat die Kante genau einen Knick, besitzt eine der Binärvariablen R_1 oder R_2 den Wert 1. Bei keinem Knick und radialem Verlauf der Kante haben sowohl R_1 als auch R_2 den Wert 1; bei einem komplett konzentrischen Verlauf ist dagegen nur die Binärvariable $K = 1$. Diese ist doppelt gewichtet, sodass radiale Kantenverläufe nicht bevorzugt werden. Zwei Knicke haben zur Folge, dass alle Binärvariablen in der Zielfunktion den Wert 0 besitzen. Da die Zielfunktion minimiert wird, muss der Modifikator λ_{Kante} negativ sein.

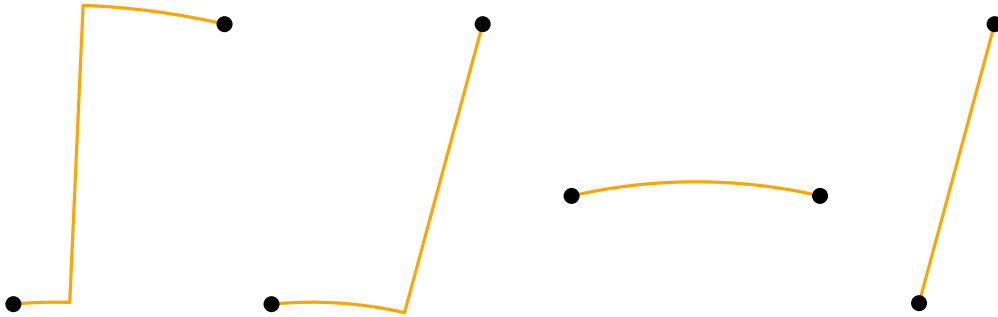


Abb. 5.15: Je nach Lage des radialen Liniensegments und der Endknoten kann eine Kante zwei, einen oder keinen Knick haben

Die Variable R_1 soll genau dann den Wert 1 besitzen, wenn der Endknoten v_1 der Kante e den gleichen Winkel wie das radiale Liniensegment e_{Radial} von e besitzt. Die Struktur der benötigten Ungleichungen lautet dabei:

$$\begin{aligned} \phi_{v_1} &\leq e_{\text{Radial}} + M(1 - R_1) \\ e_{\text{Radial}} &\leq \phi_{v_1} + M(1 - R_1) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Ungleichungen für die Binärvariable R_2 und den anderen Endknoten v_2 von e sind analog aufgebaut:

$$\begin{aligned} \phi_{v_2} &\leq e_{\text{Radial}} + M(1 - R_2) \\ e_{\text{Radial}} &\leq \phi_{v_2} + M(1 - R_2) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Gleiches gilt für die Struktur der Ungleichungen, welche eine rein konzentrische Kante modellieren. Dabei ist es allerdings ausreichend, dass die beiden Radien r_1 und r_2 der

Endknoten gleich sind, falls K den Wert 1 besitzt. Dies folgt aus der Definition einer Kante und den drei Liniensegmenten, aus denen sie sich zusammensetzt.

$$\begin{aligned} r_1 &\leq r_2 + M(1 - K) \\ r_2 &\leq r_1 + M(1 - K) \end{aligned} \tag{5.24}$$

Eine Kante kann entweder radial oder konzentrisch verlaufen. Besitzt R_1 oder R_2 den Wert 1, muss deshalb die Variable K den Wert 0 annehmen. Diese Bedingung kann mithilfe einer Ungleichung pro Kante im Modell umgesetzt werden:

$$2K \leq 2 - R_1 - R_2 \tag{5.25}$$

Die Zielfunktion zur Knickminimierung für eine Kante benötigt pro Kante drei Binärvariablen und sieben Ungleichungen.

5.2.3 Belohnung für radialen oder konzentrischen Kantenverlauf

Als nächstes werden Ungleichungen für eine Kante definiert, durch die eine Binärvariable genau dann den Wert 1 annimmt, wenn die Kante radial verläuft. Ebenso existiert eine Binärvariable, welche den Wert 1 bei konzentrischem Verlauf der Kante annimmt. Durch die zuvor dargestellte Modellierung zur Knickminimierung von Kanten ist eine solche Umsetzung bereits möglich ohne weitere Binärvariablen zu benötigen. Dennoch konnte diese Option durch die schrittweise Entwicklung des Programms, bei dem die Knickminimierung von Kanten in ihrer jetzigen Form erst spät formuliert wurde, keine Berücksichtigung mehr finden. Deshalb wird die Zielfunktion

$$\text{Kosten}_{\text{Verlauf}} = \sum_{e \in E} Z(e) \tag{5.26}$$

eingeführt, bei der die Binärvariable $Z(e)$ der Kante e genau dann den Wert 0 annimmt, wenn ihr Verlauf entweder nur radial oder nur konzentrisch ist. Für eine erleichterte Darstellung wird Z_e anstatt $Z(e)$ geschrieben. Der Faktor λ_{Verlauf} sollte relativ klein gewählt werden, um das Verhältnis zwischen der Belohnung zur Minimierung eines Knicks gegenüber zwei Knicken nicht zu stark zu verzerren.

Zur Umsetzung dieser Zielfunktion werden für jede Kante $e \in E$ drei Binärvariablen $Z_{1,e}$, $Z_{2,e}$ und Z_e benötigt. Die zwei Endknoten sollen durch (r_1, ϕ_1) und (r_2, ϕ_2) parametrisiert sein. Die Binärvariable $Z_{1,e}$ soll genau dann den Wert 0 besitzen, wenn e konzentrisch ist. Da eine Kante aus einem konzentrischen, einem radialen und wieder einem konzentrischen Liniensegment besteht, muss sie komplett konzentrisch verlaufen, wenn die Radien der Endknoten gleich sind. Dies wird wie folgt modelliert:

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &\leq MZ_{1,e} \\ r_2 - r_1 &\leq MZ_{1,e} \end{aligned} \tag{5.27}$$

Soll e hingegen rein radial dargestellt werden, müssen die Endknoten und das radiale Liniensegment der Kante den gleichen Winkel haben. Der Aufbau der Ungleichungen erfolgt analog zu dem Aufbau für rein konzentrische Kanten.

$$\begin{aligned}
\phi_1 - \phi_2 &\leq MZ_{2,e} \\
\phi_2 - \phi_1 &\leq MZ_{2,e} \\
\phi_1 - e_{\text{Radial}} &\leq MZ_{2,e} \\
e_{\text{Radial}} - \phi_1 &\leq MZ_{2,e}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Der Winkel des radialen Liniensegments muss hierbei nur mit einem Winkel der Endknoten gleichgesetzt werden, da die Winkel der Endknoten durch die beiden ersten Ungleichungen gleich sind. Durch die bisher eingeführten Ungleichungen ist es möglich, dass beide Endknoten der Kante direkt aufeinanderliegen. Dies soll aber nicht geduldet und dadurch verboten werden, dass maximal eine der beiden Variablen 0 werden darf:

$$Z_{1,e} + Z_{2,e} \geq 1 \tag{5.29}$$

Die letzte Gleichung, welche Z genau dann den Wert 0 annehmen lässt, wenn eines der bisher beschriebenen Sets von Ungleichungen aktiviert ist, lautet folgendermaßen:

$$Z_{1,e} + Z_{2,e} - 1 = Z_e \tag{5.30}$$

Die Art des Aufbaus der hier beschriebenen (Un-)Gleichungen hat den Vorteil, dass die Eigenschaft, ob eine Kante komplett radial oder konzentrisch verläuft, durch die Binärvariablen $Z_{1,e}$ und $Z_{2,e}$ dargestellt ist und dadurch leicht zur Modellierung anderer Kriterien genutzt werden kann (siehe Abschnitte 5.1.3 und 5.2.4). Die Modellierung der Zielfunktion benötigt pro Kante drei Binärvariablen und acht (Un-)Gleichungen.

5.2.4 Knickminimierung für eine Linie

Umso weniger Knicke eine Linie eines U-Bahn-Linienplanes aufweist, desto leichter ist es für einen Betrachter diese zu verfolgen. Die Anzahl der Knicke einer Linie berechnet sich aus der Summe der Knicke aller Kanten, die zu der Linie gehören, und den Knicken, welche in einem Knoten stattfinden (siehe Abbildung 5.16(a)). Um Linien auf Knicke zu minimieren, werden im Folgenden immer zwei Kanten u und v betrachtet, die beide zu derselben Linie gehören und zu einem Knoten inzident sind. Die Menge all dieser Kantenpaare (u, v) soll J sein. Beinhaltet weder u noch v einen Knick und existiert auch kein Knick in ihrem gemeinsamen Knoten, dann wird dies in der Zielfunktion

$$\text{Kosten}_{\text{Linie}} = \sum_{(u,v) \in J} Z_{u,v}(u, v) \tag{5.31}$$

belohnt, indem die Binärvariable $Z_{u,v}(u,v)$ den Wert 0 annimmt. $Z_{u,v}(u,v)$ soll zur einfacheren Schreibweise mit $Z_{u,v}$ abgekürzt werden. Es gibt genau zwei Möglichkeiten, wie die zwei Kanten verlaufen können, sodass kein Knick entsteht: Entweder sind beide konzentrisch oder radial (siehe Abbildung 5.16(b)).

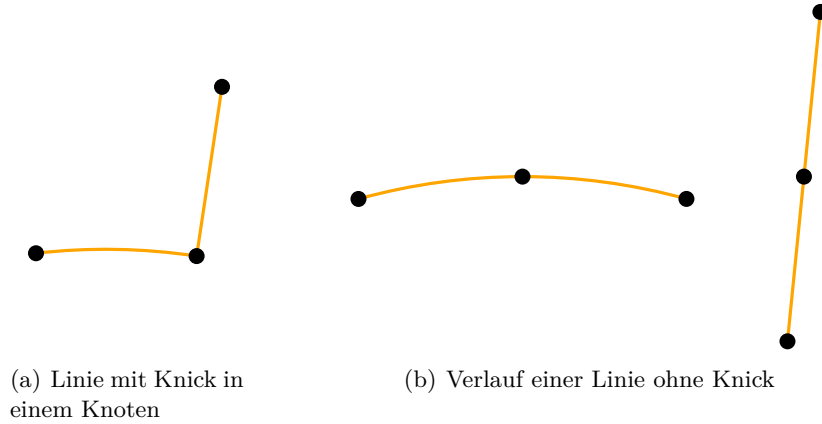


Abb. 5.16: Verlauf einer Linie mit Knick gegenüber einer Linie ohne Knick

Durch die Knickminimierung in Kanten im Abschnitt 5.2.3 existieren bereits für jede Kante Binärvariablen, durch welche ersichtlich wird, ob diese radial oder konzentrisch verläuft. Es werden deshalb nur zwei weitere Binärvariablen $X_{u,v}$ und $Y_{u,v}$ zu der bereits in der Zielfunktion verwendeten gebraucht. Dabei repräsentieren $X_{u,v}$ oder $Y_{u,v}$ genau dann den Wert 0, wenn beide Kanten zugleich konzentrisch oder radial verlaufen. Dies wird durch folgende Ungleichungen modelliert:

$$\begin{aligned} Z_{1,u} + Z_{1,v} &\leq X_{u,v} \\ Z_{2,u} + Z_{2,v} &\leq Y_{u,v} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Beachtenswert ist, dass durch die im letzten Abschnitt definierten Ungleichungen für eine Kante e nur eine der beiden Binärvariablen $Z_{1,e}$ und $Z_{2,e}$ den Wert 0 annehmen kann. Daraus folgert, dass mindestens eine der Variablen $X_{u,v}$ oder $Y_{u,v}$ den Wert 1 annimmt. Nun lässt sich die Bedingung für die Variable $Z_{u,v}$ definieren:

$$X_{u,v} + Y_{u,v} - 1 \leq Z_{u,v} \quad (5.33)$$

Es werden somit für jedes Kantenpaar drei Binärvariablen und drei Ungleichungen benötigt.

5.3 Laufzeitverbesserung

Wird das bisher beschriebene Modell umgesetzt, so fällt schnell auf, dass dieses sehr groß ist und Programme zur Lösung solcher Modelle extrem viel Rechenaufwand und somit

Laufzeit benötigen. Um die Laufzeit zu reduzieren, werden nun verschiedene Vorkehrungen getroffen. So wird der Eingabegraph vereinfacht, indem unwichtige Knoten entfernt werden. Außerdem sollen Nebenbedingungen dem Modell nur dann und konkret an den Stellen hinzugefügt werden, wo sie in der Zeichnung verletzt werden; diese sind dabei hierarchisch geordnet.

5.3.1 Vereinfachung des Graphen

Die Vereinfachung des Graphen entspricht der in Abschnitt 4.1 bereits vorgestellten Methode, ohne dass die entfernten Grad-2-Knoten dem Graphen hinzugefügt werden. Es soll noch einmal mit Nachdruck darauf hingewiesen werden, wie entscheidend die Reduzierung der Anzahl der Knoten und Kanten für die Laufzeit des MIP ist. So ist eine praktische Umsetzung des nicht vereinfachten Graphen bei der momentanen Formulierung von Nebenbedingungen und Optimierungskriterien nicht möglich.

5.3.2 Nachträgliches Einfügen von Nebenbedingungen

Zunächst wird eine hierarchische Ordnung der verschiedenen Arten von Nebenbedingungen eingeführt. An der Spitze dieser Ordnung stehen Kreuzungen, gefolgt von Überlappungen und der Mehrfachabbildung. Die Nebenbedingung zur Berücksichtigung des Eingabegraphen ist nicht in dieser Ordnung aufgeführt, da sie von Anfang an für jeden Knoten im Modell gelten soll.

Im Abschnitt 5.1 wurde bereits darauf hingewiesen, dass es nicht effizient ist alle Nebenbedingungen für alle möglichen Paare von Objekten sofort dem Modell hinzuzufügen. So ist eine Kreuzung zwischen zwei Kanten, welche im Graphen sehr weit entfernt sind, äußerst unwahrscheinlich. Selbiges gilt für Überlappungen oder die Abbildung von zwei Knoten auf denselben Punkt in der Zeichnung. Um das Modell möglichst überschaubar zu halten, wird deshalb zunächst eine Zeichnung komplett ohne Nebenbedingungen angefertigt. Sind in dieser Zeichnung Nebenbedingungen verletzt, so wird zuerst die Art von Nebenbedingung identifiziert, welche in der hierarchischen Ordnung am höchsten steht. Dann werden alle Nebenbedingungen dieser Art dem Modell hinzugefügt und zwar ausschließlich für die Paare von Objekten, die eine Verletzung dieser Art von Nebenbedingung hervorgerufen haben. In einer neuen Zeichnung kann eine Verletzung dieser Nebenbedingung durch diese Objektpaare somit nicht erneut auftreten. Nachdem das Modell angepasst wurde, wird eine neue Zeichnung erstellt und erneut auf verletzte Nebenbedingungen getestet. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis eine Zeichnung gefunden wird, die keine Nebenbedingung mehr verletzt. Es wurde erreicht, dass bis zur Erzeugung einer akzeptierten Zeichnung zwar mehrere aufeinanderfolgende Berechnungen eines wachsenden Modells anstehen, aber die Modelle zu Beginn sehr wenige (Un-)Gleichungen enthalten und dadurch schnell gelöst werden können.

6 Implementierung und Auswertung

Zur Implementierung des Algorithmus' wurde die Programmiersprache Java verwendet. Die Implementierung lässt sich in vier Schritte gliedern: Zuerst wird der Graph für das U-Bahn-Liniensystem durch das Einlesen einer Datei erzeugt. Daraufhin findet eine Vereinfachung des Graphen statt. Mit Hilfe eines MIP (siehe Kapitel 5), wird eine radial-konzentrische Zeichnung des Graphen angefertigt. Zuletzt wird diese Zeichnung in einer Datei ausgegeben.

Da die Laufzeit des MIP trotz der Verbesserungen bei größeren Netzwerken noch sehr hoch ist, beschränkt sich die Auswertung auf die relativ kleinen U-Bahn-Liniennetze von Montréal und Wien. Hierbei werden die verwendeten Parameter angegeben und die Qualität der erzeugten Zeichnungen untersucht.

6.1 Implementierung

Als Eingabe für das Java-Programm wird eine Datei im GraphML Dateiformat [Dat] erwartet. Dies ist ein XML-basiertes Dateiformat zur Beschreibung von Graphen. Diese Datei enthält alle wichtigen Informationen: die Beschreibung des Graphen und Zusatzinformationen wie Koordinaten von Knoten oder den Verlauf von U-Bahn-Linien. Das Einlesen der Datei erfolgt durch die in Java vorhandenen DOM-Funktionen [Mod]. Um den Graphen im Programm zu repräsentieren, wurde die Java-Graphen-Bibliothek JUNG [Fra] verwendet. Diese Graphen-Bibliothek bietet neben der Speicherung des Graphen weitere grundlegende Funktionen (wie die Ermittlung des Grades eines Knotens), die später im Programm genutzt werden.

Nachdem der Graph erzeugt wurde, erfolgt dessen Vereinfachung (siehe Abschnitt 4.1). Der so erhaltene Graph wird in ein MIP transformiert und das Modell solange um Ungleichungen erweitert, bis eine radial-konzentrische Zeichnung gefunden wurde, die alle grundlegenden Bedingungen erfüllt. Das MIP wird in Kapitel 5 ausführlich behandelt. Zum Lösen des MIP wurde das Programm Gurobi [Gur] verwendet.

Ist eine Lösung des MIP gefunden, wird dessen Ergebnis ausgewertet und durch das Zeichenprogramm Ipe [Ipe] eine Datei im entsprechenden Dateiformat erstellt. Dieses Dateiformat basiert wie das Eingabeformat auf XML. Eine Ipe-Datei ist zudem in eine PDF-Datei konvertierbar, welche durch freie Skalierbarkeit und hohe Qualität überzeugt.

Für Tests wurde ein Rechner mit einem Intel Core i5-760, 4x 2.80GHz Prozessor und 4 GB Arbeitsspeicher verwendet. Getestet wurden die U-Bahn-Liniennetze von Wien und Montréal. Bei größeren Netzwerken wie Sydney wurde bei einer Laufzeit des Algorithmus von über vier Stunden der Test abgebrochen.

6.2 Auswertung der Ergebnisse

Wien

Der Eingabegraph des U-Bahn-Liniennetzes von Wien besitzt 90 Knoten und 96 Kanten. Durch Vereinfachung des Graphen konnte die Anzahl der Knoten auf 19 und die Anzahl der Kanten auf 25 gesenkt werden. Die Tabelle 6.1 gibt eine Übersicht über die Gewichtung der einzelnen Faktoren für die Summen in der Zielfunktion. Außerdem sind die Werte der Konstanten eingetragen, welche zur Formulierung der Ungleichungen gebraucht wurden. Ebenso ist die benötigte Laufzeit zur Erzeugung der Zeichnung angegeben. Bereits moderate Änderungen der Parameter können zu starken Laufzeit-schwankungen führen. Mit diesen Einstellungen wurde der radial-konzentrische U-Bahn-Linienplan von Wien in Abbildung 6.1 erstellt. Die Tabelle 6.2 gibt an, wie häufig die jeweiligen Nebenbedingungen dem Modell hinzugefügt wurden. Es sei darauf hingewiesen, dass durch Nachbearbeitung aufeinanderliegende Linien und Liniensegmente zur besseren Übersicht leicht verschoben wurden. Außerdem sind die Grad-2-Knoten noch nicht wieder in den Graph eingefügt worden, wobei diese keinen Einfluss auf den Verlauf der Linien haben.

λ_{Eingabe}	λ_{Kante}	λ_{Verlauf}	λ_{Line}	ϵ	ϵ_r	Laufzeit
0.01	-30	5	60	20	0.95	13 Min.

Tab. 6.1: Die verwendeten Parameter und die benötigte Laufzeit (Wien)

Kreuzungen	72
Überlappungen	7
Mehrfachabbildung	0

Tab. 6.2: Häufigkeit der eingefügten Nebenbedingungen (Wien)

Der radial-konzentrische U-Bahn-Linienplan von Wien weist einige der in Abschnitt 3.2 definierten Optimierungskriterien auf: Die Anzahl der Knicke der Linien ist gering, so enthalten vier der fünf Linien weniger als vier Knicke. Die relativen Positionen zweier Knoten konnten beibehalten werden, ebenso wie ein Bezug zum Eingabegraphen.

Ein Problem, welches bisher auch in der Modellierung nicht berücksichtigt wurde, ist die Platzierung der Entfernten Grad-2-Knoten. So sind einige Liniensegmente sehr kurz im Vergleich zu der Anzahl der Grad-2-Knoten, die auf diesem Segment liegen.

Montréal

Der Eingabegraph des U-Bahn-Liniennetzes von Montréal besitzt 69 Knoten und 70 Kanten. Durch Vereinfachung des Graphen konnte die Anzahl der Knoten auf 15 und die Anzahl der Kanten auf 16 gesenkt werden. Es konnte jedoch keine Lösung mit dem in Kapitel 5 beschriebenen Modell in akzeptabler Zeit erzeugt werden. Dies ist überraschend, da der Graph von Montreal weniger Knoten und Kanten als der Graph von

Wien besitzt. Durch Ausgaben während den Tests konnte beobachtet werden, dass viele Kreuzungen auftraten. So konnte trotz über 90 verbotenen Kreuzungen zwischen geordneten Kantenpaaren noch keine Lösung berechnet werden (Vergleich Wien: 72 verbotene Kreuzungen). Ein weiterer Grund für die lange Laufzeit ist die häufige Neuberechnung des MIP, da immer nur wenige Nebenbedingungen auf einmal eingefügt werden.

Während des Entwicklungsvorgangs des MIP wurden jedoch Modelle gefunden, durch die zulässige Zeichnungen von Montréal erzeugt werden konnten. Der Unterschied zu der vorgestellten Modellierung liegt in der Knickminimierung einer Kante 5.2.2. Liegt ein radiales Liniensegment zwischen den Knoten seiner Kante, wird dies unabhängig von der Anzahl der Knicke in der Zielfunktion belohnt. Eine Kante wird durch das Optimierungskriterium in Abschnitt 5.2.3 belohnt, wenn sie komplett radial oder konzentrisch verläuft. Aus diesem Grund ist die Gewichtung der Faktoren (siehe Tabelle 6.3) nicht vergleichbar mit denen für die Zeichnung von Wien. Durch Nachbearbeitung wurden aufeinanderliegende Linien und Liniensegmente erneut leicht versetzt dargestellt und eine falsch gezeichnete Kante korrigiert. Die Grad-2-Knoten wurden noch nicht in den Graph eingefügt. Das Ergebnis dieses Modells ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Die Tabelle 6.4 bietet wieder eine Übersicht über die eingefügten Nebenbedingungen.

λ_{Eingabe}	λ_{Kante}	λ_{Verlauf}	λ_{Line}	ϵ	ϵ_r	Laufzeit
0.01	-15	30	30	5	0.95	10 Min. 59 Sek.

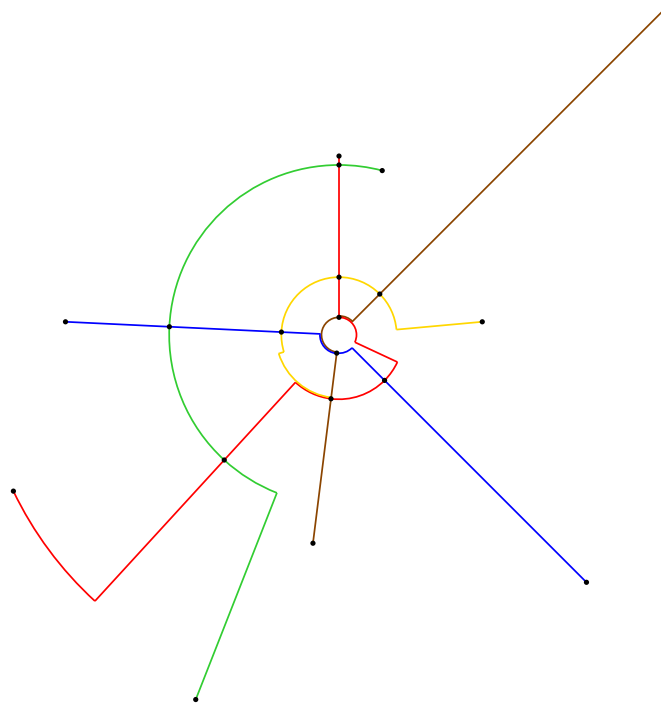
Tab. 6.3: Die verwendeten Parameter und die benötigte Laufzeit (Montréal)

Kreuzungen	35
Überlappungen	9
Mehrfachabbildung	0

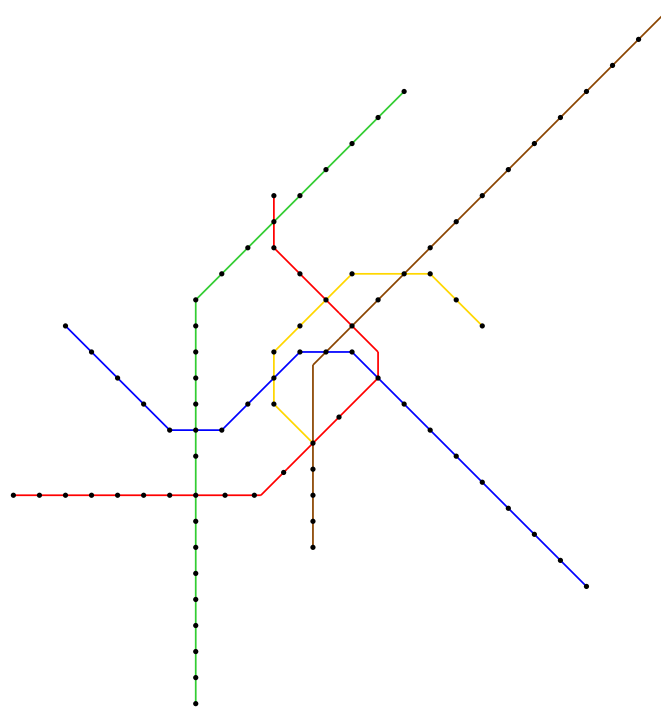
Tab. 6.4: Häufigkeit der eingefügten Nebenbedingungen (Montréal)

Die erzeugte Zeichnung kann den erwarteten Ansprüchen leider nicht gerecht werden. Die Linien enthalten viele und vermeidbare Knicke. Die relativen Positionen von Knoten zueinander konnte zumeist erhalten werden. Die Positionen der Knoten im Eingabegraph sind oft gleich mit denen in der Ausgabezeichnung.

Dieses Ergebnis kommt zum Teil auch durch die hohe Laufzeit zustande. So konnte einerseits die beschriebene Optimierung nach Knicke nicht angewandt werden und andererseits mussten die Parameter suboptimal gewählt werden. Dies resultiert unter anderem in einer relativ starken Gewichtung der Zielfunktion $\text{Kosten}_{\text{Eingabe}}$.

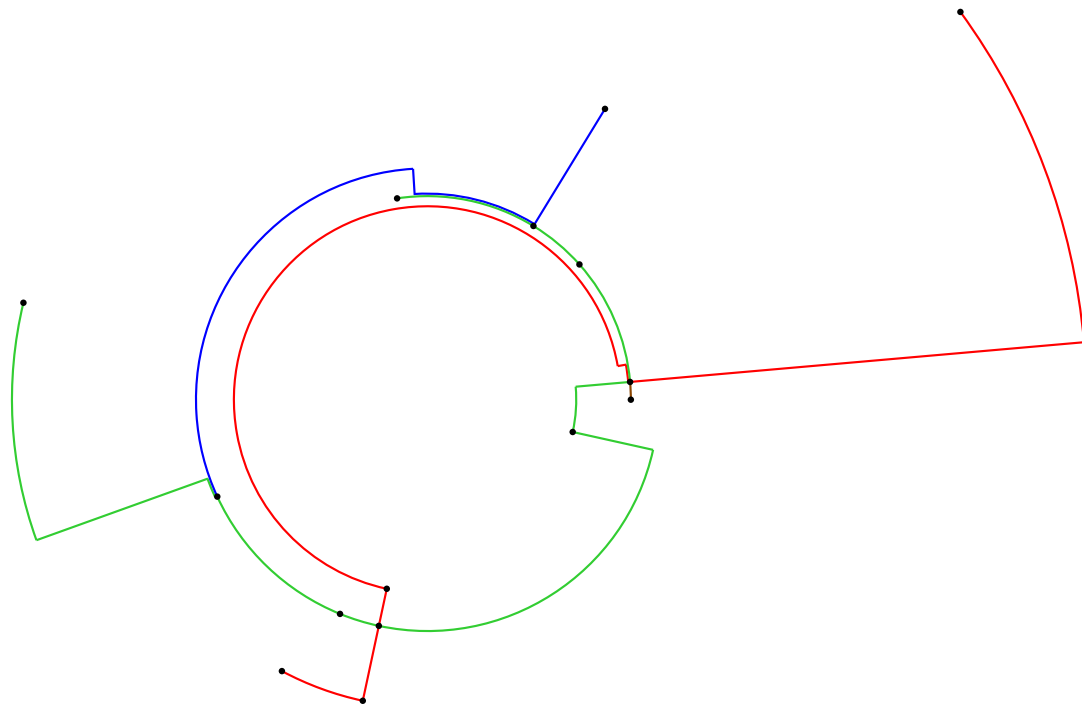


(a) Radial-konzentrischer U-Bahn-Linienplan von Wien

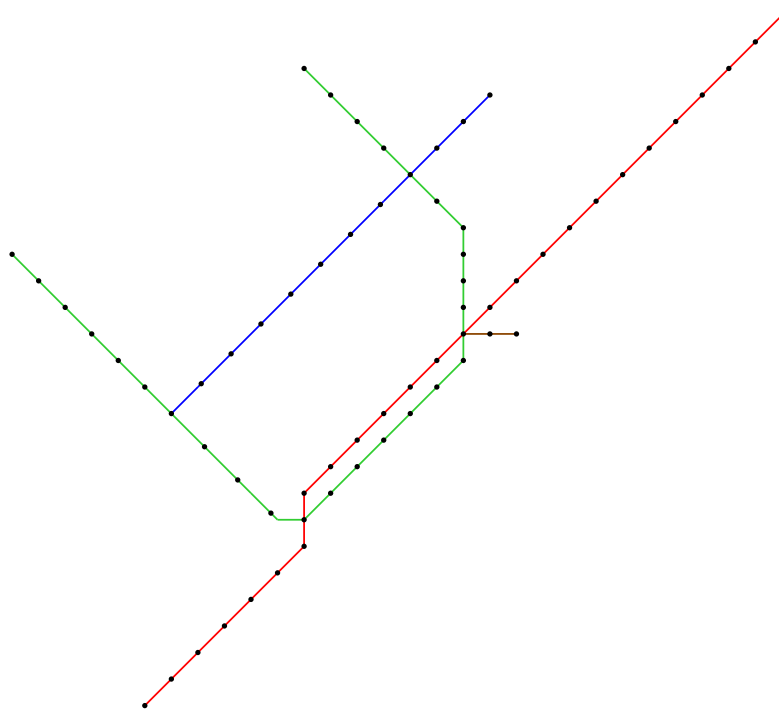


(b) Oktilinearer U-Bahn-Linienplan von Wien

Abb. 6.1: Die radial-konzentrische Ausgabe und die dazugehörige Eingabe



(a) Radial-konzentrischer U-Bahn-Linienplan von Montréal



(b) Oktilinearer U-Bahn-Linienplan von Montréal

Abb. 6.2: Die radial-konzentrische Ausgabe und die dazugehörige Eingabe

7 Zusammenfassung und Ausblick

Anhand des in Abschnitt 6.2 erzeugten U-Bahn-Linienplanes von Wien ist zu erkennen, dass die bisherige Modellierung des MIP durchaus zur Erzeugung von qualitativ guten radial-konzentrischen U-Bahn-Linienplänen imstande ist. Bisher ist eine praxistaugliche Anwendung dennoch nicht möglich, da die Laufzeit selbst für kleine Netzwerke sehr hoch ist.

Die Verbesserung der Laufzeit muss deshalb im Mittelpunkt weiterer Arbeiten an dem vorgestellten Algorithmus stehen. Dies könnte erreicht werden, indem die Struktur der Nebenbedingungen und Optimierungskriterien vereinfacht wird und diese so zu formulieren, dass weniger Variablen benötigt werden. So kann das in Abschnitt 5.2.2 beschriebene Optimierungskriterium durch minimale Erweiterung alle Aufgaben des Optimierungskriterium in Abschnitt 5.2.3 übernehmen, was durch den schrittweisen Entwicklungsverlauf jedoch nicht umgesetzt werden konnte. Konkrete Formulierungen von Nebenbedingungen und Optimierungskriterien sind ohne weitere Tests aufgrund der komplexen Theorie und des externen Programms zur Lösung von MIP nicht möglich. Das Ziel ist, größere Netzwerke wie das U-Bahn-Netzwerk von Sydney oder sogar London in akzeptabler Zeit zu erzeugen.

Zur Verbesserung der Qualität der erzeugten U-Bahn-Linienpläne können weitere Optimierungskriterien definiert werden: Bisher sind Überlappungen zwischen Kanten von unterschiedlichen Linien erlaubt, wenn der Verlauf der Linien eindeutig ist. Solche erlaubten Überlappungen sollten dabei so kurz wie möglich sein, sodass einer Linie leichter gefolgt werden kann (siehe Abbildung 7.1).

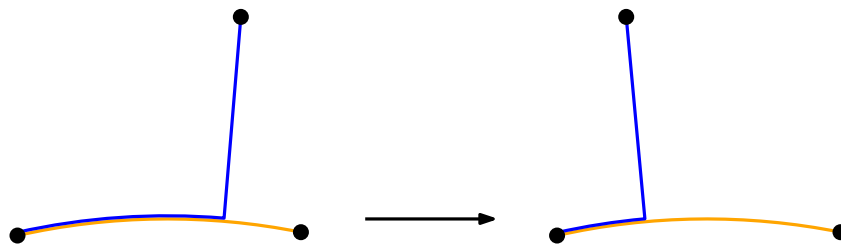


Abb. 7.1: Möglichst kurze Überlappungen

Der Verlauf einer Linie sollte so wenig Veränderungen wie möglich haben, auch wenn Knicke in den Kanten enthalten sind. Die Linien in Abbildung 7.2 werden im bisherigen Modell gleichwertig behandelt, obwohl sie verschieden viele Knicke haben und die Qualität der Ergebnisse erheblich beeinflussen.

In der Zielfunktion findet bisher keine Optimierung der Kantenlängen statt. Um bei der Platzierung der Grad-2-Knoten nicht in Platzprobleme zu geraten, was zu einem

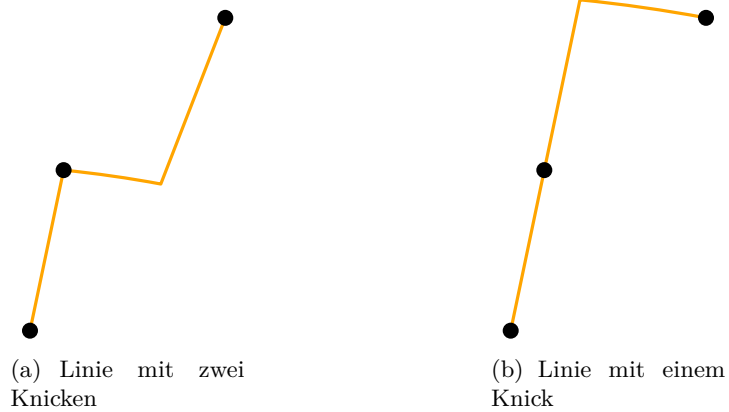


Abb. 7.2: Diese Linien werden in der Zielfunktion des MIP gleich bewertet

unübersichtlichen Linienplan führt, muss auf die Anzahl der Grad-2-Knoten auf einer Kante Rücksicht genommen werden. Umso mehr dieser Knoten sich auf einer Linie befinden, desto länger sollte diese sein (siehe Abbildung 7.3). Im Optimalfall würde somit jede Kante der Zeichnung, die alle Knoten des Eingabegraphen enthält, gleich lang sein.

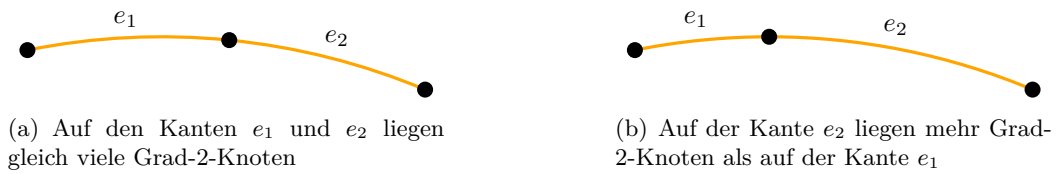


Abb. 7.3: Länge der Kanten unter Berücksichtigung der Anzahl von Grad-2-Knoten pro Kante

Literaturverzeichnis

- [BETT99] Giuseppe Di Battista, Peter Eades, Roberto Tamassia und Ioannis G. Tollis: *Graph Drawing: Algorithms for the Visualization of Graphs*. Prentice-Hall, 1999, ISBN 0-13-301615-3.
- [BT97] Dimitris Bertsimas und John Tsitsiklis: *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific, 1st Auflage, 1997, ISBN 1886529191.
- [CR10a] Vijay Chandru und M. R. Rao: Integer Programming. In: Mikhail J. Atallah und Marina Blanton (Herausgeber): *Algorithms and Theory of Computation Handbook*, Kapitel 31. Chapman & Hall/CRC, 2010, ISBN 978-1-58488-822-2. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1882757.1882788>.
- [CR10b] Vijay Chandru und M. R. Rao: Linear Programming. In: Mikhail J. Atallah und Marina Blanton (Herausgeber): *Algorithms and Theory of Computation Handbook*, Kapitel 30. Chapman & Hall/CRC, 2010, ISBN 978-1-58488-822-2. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1882757.1882787>.
- [Dat] Das GraphML Dateiformat. <http://graphml.graphdrawing.org>.
- [FHN⁺13] Martin Fink, Herman Haverkort, Martin Nöllenburg, Maxwell Roberts, Julian Schuhmann und Alexander Wolff: Drawing Metro Maps using Bézier Curves. In: Walter Didimo und Maurizio Patrignani (Herausgeber): *Proceedings of the 20th International Symposium on Graph Drawing (GD'12)*, Band 7704 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 463–474. Springer-Verlag, 2013.
- [Fra] Java Universal Network/Graph Framework. <http://jung.sourceforge.net>.
- [Gur] Gurobi. <http://www.gurobi.com>.
- [HMdN06] Seok-Hee Hong, Damian Merrick und Hugo A. D. do Nascimento: Automatic Visualisation of Metro Maps. *Journal of Visual Languages & Computing*, 17(3):203–224, Juni 2006, ISSN 1045-926X. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jvlc.2005.09.001>.
- [HW02] William C. Hahn und Robert A. Weinberg: *A subway map of cancer pathways*. Nature Publishing Group, 2002. <http://www.nature.com/nrc/poster/subpathways/index.html>.

- [Ipe] Ipe. <http://ipe7.sourceforge.net>.
- [KN09] Sven O. Krumke und Hartmut Noltemeier: *Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen*. Vieweg Studium. Vieweg Verlag, Friedr. & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 2009, ISBN 9783834895929. http://books.google.de/books?id=UILN_2xS90kC.
- [Mod] Document Object Model. <http://www.w3.org/DOM/>.
- [Nes04] Keith V. Nesbitt: Getting to More Abstract Places Using the Metro Map Metaphor. In: *Proceedings of the Information Visualisation, Eighth International Conference, IV '04*, Seiten 488–493, Washington, DC, USA, 2004. IEEE Computer Society, ISBN 0-7695-2177-0. <http://dx.doi.org/10.1109/IV.2004.65>.
- [NW11] Martin Nöllenburg und Alexander Wolff: Drawing and Labeling High-Quality Metro Maps by Mixed-Integer Programming. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 17(5):626–641, Mai 2011, ISSN 1077-2626. <http://dx.doi.org/10.1109/TVCG.2010.81>.
- [O'R03] O'Reilly, 2003. <http://www.oreilly.de/artikel/routemap.pdf>.
- [RNL10] Maxwell J. Roberts, Elizabeth J. Newton und Fabio D. Lagattolla: Objective and subjective measures of metro map usability: investigating the benefits of breaking design rules. *Manuskript*, 2010.
- [Sch99] Alexander Schrijver: *Theory of linear and integer programming*. Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization. John Wiley & Sons, Inc., 1999, ISBN 978-0-471-98232-6.
- [SGSK01] Elmer S. Sandvad, Kaj Grønbæk, Lennert Sloth und Jørgen Lindskov Knudsen: A Metro Map Metaphor for Guided Tours on the Web: The Webwise Guided Tour System. In: *Proceedings of the 10th International Conference on World Wide Web, WWW '01*, Seiten 326–333, New York, NY, USA, 2001. ACM, ISBN 1-58113-348-0. <http://doi.acm.org/10.1145/371920.372079>.
- [SRB⁺05] Jonathan M. Stott, Peter Rodgers, Remo Aslak Burkhard, Michael Meier und Matthias Thomas Jelle Smis: Automatic Layout of Project Plans Using a Metro Map Metaphor. In: *Proceedings of the Ninth International Conference on Information Visualisation, IV '05*, Seiten 203–206, Washington, DC, USA, 2005. IEEE Computer Society, ISBN 0-7695-2397-8. <http://dx.doi.org/10.1109/IV.2005.26>.
- [SRMOW11] Jonathan M. Stott, Peter Rodgers, Juan Carlos Martinez-Ovando und Stephen G. Walker: Automatic Metro Map Layout Using Multicriteria Optimization. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*,

17(1):101–114, Januar 2011, ISSN 1077-2626. <http://dx.doi.org/10.1109/TVCG.2010.24>.

- [WC11] Yu Shuen Wang und Ming Te Chi: Focus+Context Metro Maps. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 17(12):2528–2535, Dezember 2011, ISSN 1077-2626. <http://dx.doi.org/10.1109/TVCG.2011.205>.

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel und Quellen als die angegebenen benutzt habe. Weiterhin versichere ich, die Arbeit weder bisher noch gleichzeitig einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt zu haben.

Würzburg, den _____,

_____ (Magnus Lechner)