Packalgorithmen für quaderförmige Objekte

Ilia Belozerov

Übersicht

1. Motivation
2. Definitionen und Sätze
3. Exakte Lösungsverfahren
4. Heuristische Methoden
5. Vergleich der Heuristiken

Bedeutung von Pack- und Zuschnittproblemen

Bedeutung von Pack- und Zuschnittproblemen

Wirtschaftliche Bedeutung:

Distributionslogistik:

- Reduktion des notwendigen Lagerplatzes
- Reduktion der Transportkosten

Papier- und Glasindustrie:

- Reduktion des Materialverschnittes

Bedeutung von Pack- und Zuschnittproblemen

Wirtschaftliche Bedeutung:

Distributionslogistik:

- Reduktion des notwendigen Lagerplatzes
- Reduktion der Transportkosten

Papier- und Glasindustrie:

- Reduktion des Materialverschnittes

Aber auch von großem theoretischen Interesse!

Ausprägungen der Probleme

Unterscheidungskriterien:

Ausprägungen der Probleme

Unterscheidungskriterien:

- Dimensionalität

Ausprägungen der Probleme

Unterscheidungskriterien:

- Dimensionalität
- Die Menge der kleinen Objekte
  identisch, schwach oder stark heterogen

Ausprägungen der Probleme

Unterscheidungskriterien:

- Dimensionalität
- Die Menge der kleinen Objekte
  identisch, schwach oder stark heterogen
- Die Menge der großen Objekte
  ein einziger Behälter, identisch, schwach oder stark heterogen

Ausprägungen der Probleme

Unterscheidungskriterien:

- Dimensionalität
- Die Menge der kleinen Objekte
  identisch, schwach oder stark heterogen
- Die Menge der großen Objekte
  ein einziger Behälter, identisch, schwach oder stark heterogen
- Aufgabentyp
  Input-Minimierung oder Output-Maximierung

Ausprägungen der Probleme

Unterscheidungskriterien:

- Dimensionalität **3-dimensional**
- Die Menge der kleinen Objekte
  identisch, schwach oder stark heterogen
- Die Menge der großen Objekte
  ein einziger Behälter, identisch, schwach oder stark heterogen
- Aufgabentyp
  Input-Minimierung oder **Output-Maximierung**

Ausprägungen der Probleme

Unterscheidungskriterien:

- Dimensionalität **3-dimensional**
- Die Menge der kleinen Objekte
  identisch, schwach oder stark heterogen
- Die Menge der großen Objekte
  ein einziger Behälter, identisch, schwach oder stark heterogen
- Aufgabentyp
  Input-Minimierung oder **Output-Maximierung**

$\Rightarrow$ **3-dimensional regular Identical Item Packing Problem**

Wichtige Definitionen und Sätze

Packproblem:
Ein (3D-IIPP-)Packproblem wird durch das Tupel (L, W, H, l, w, h) repräsentiert.

Wichtige Definitionen und Sätze

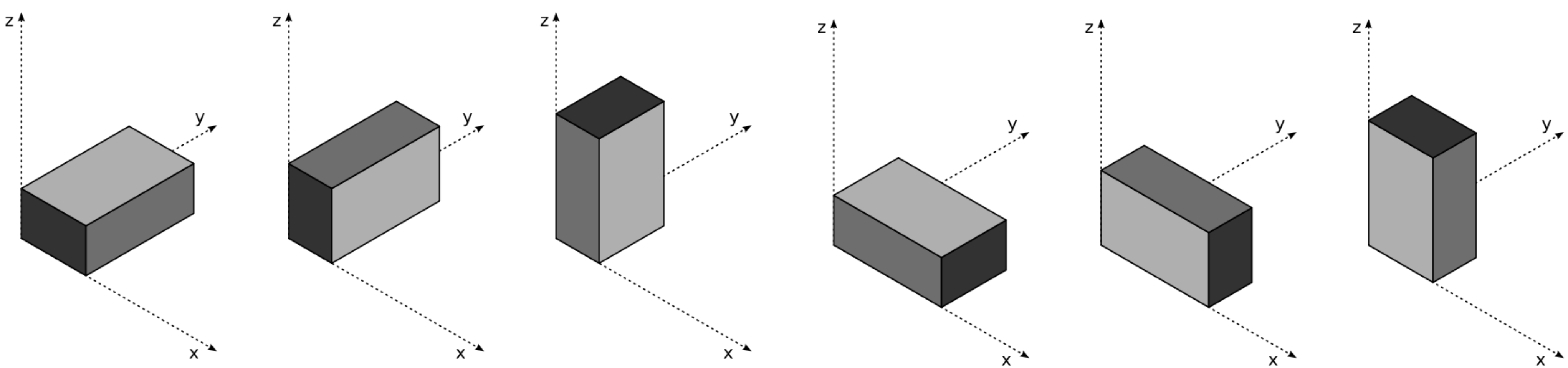
Packproblem:
Ein (3D-IIPP-)Packproblem wird durch das Tupel (L, W, H, l, w, h) repräsentiert.

Packung:
Eine Packung von N Objekten für ein Packproblem ist eine Menge von Tupeln (x_i, y_i, z_i, o_i) mit $i = 1, \ldots, N$.

Wichtige Definitionen und Sätze

Packproblem:
Ein (3D-IIPP-)Packproblem wird durch das Tupel (L, W, H, l, w, h) repräsentiert.

Packung:
Eine Packung von N Objekten für ein Packproblem ist eine Menge von Tupeln (x_i, y_i, z_i, o_i) mit $i = 1, \ldots, N$.



Wichtige Definitionen und Sätze

Konische Linearkombinationen:
Linearkombinationen mit allen Koeffizienten ≥ 0

Wichtige Definitionen und Sätze

Konische Linearkombinationen:
Linearkombinationen mit allen Koeffizienten ≥ 0

Die Mengen von konischen Linearkombinationen S_L, S_W, S_H eines Packproblems (L, W, H, l, w, h) sind wie folgt definiert:

$$S_L = \{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid x = rl + sw + th, 0 \leq x \leq L, r, s, t \in \mathbb{N}_0\}$$

S_W und S_H werden analog definiert.

Wichtige Definitionen und Sätze

Konische Linearkombinationen als Koordinatenmengen:
Jede beliebige Packung lässt sich in eine Packung umformen, deren Objekte sich auf konischen Linearkombinationen befinden!

Wichtige Definitionen und Sätze

Rasterkoordinaten:
Für ein Problem (L, W, H, l, w, h) sind die Mengen der Rasterpunkte R_L, R_W, R_H wie folgt definiert:

$$R_L = \{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid x = \max\{\tilde{x} \in S_L \mid \tilde{x} \leq L - \hat{x}\}, \hat{x} \in S_L\}$$

R_W und R_H werden analog definiert.

Wichtige Definitionen und Sätze

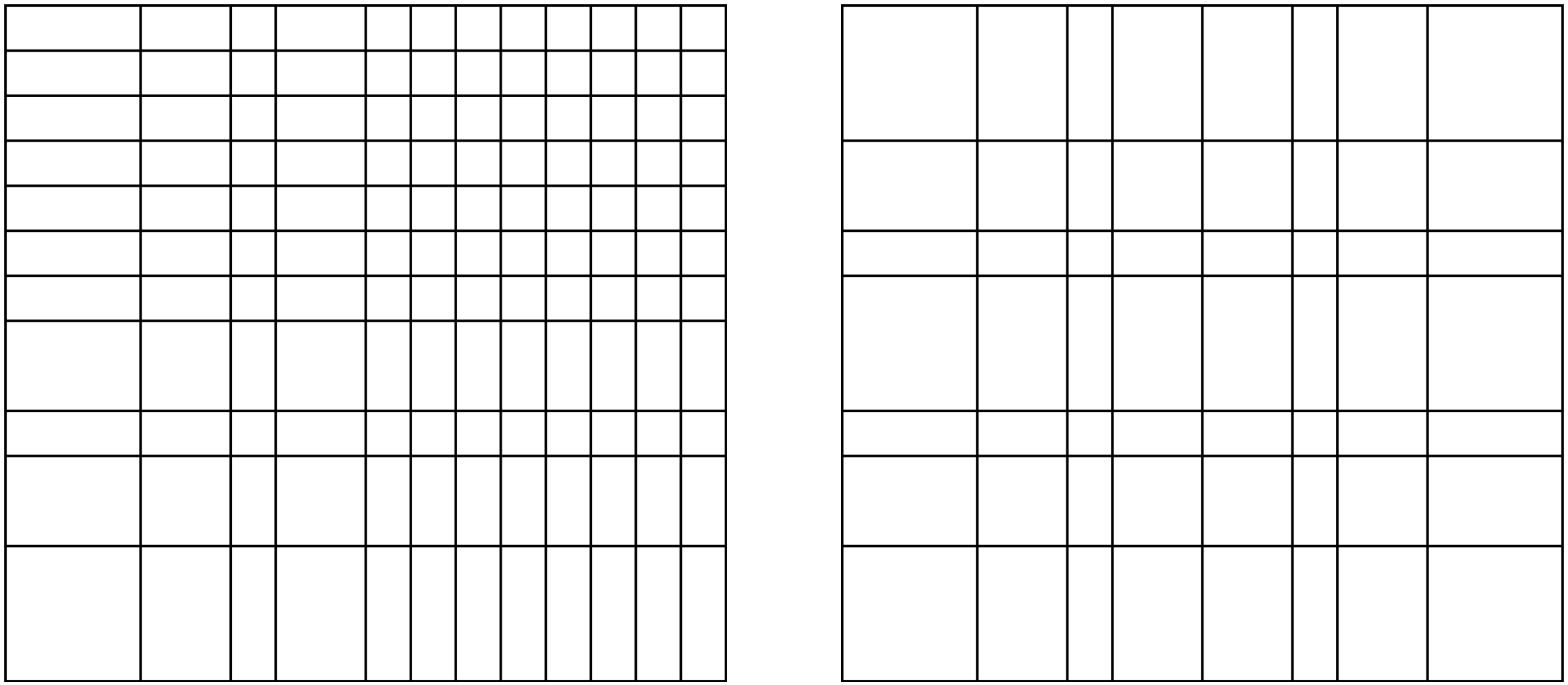
Rasterkoordinaten:
Für ein Problem (L, W, H, l, w, h) sind die Mengen der Rasterpunkte R_L, R_W, R_H wie folgt definiert:

$$R_L = \{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid x = \max\{\tilde{x} \in S_L \mid \tilde{x} \leq L - \hat{x}\}, \hat{x} \in S_L\}$$

R_W und R_H werden analog definiert.

Jede beliebige Packung lässt sich in eine Packung umformen, deren Objekte sich auf Rasterpunkten befinden!

Wichtige Definitionen und Sätze



Vergleich zwischen den konischen Linearkombinationen links und den Rasterpunkten rechts am Beispiel des Packproblems $(16, 15, 5, 3)$

Ganzzahlige lineare Programme

Auf Rasterkoordinaten basierendes Modell:

Ganzzahlige lineare Programme

Auf Rasterkoordinaten basierendes Modell:

- Eine binäre Variable für jede gültige Position und Ausrichtung eines Objektes

Ganzzahlige lineare Programme

Auf Rasterkoordinaten basierendes Modell:

- Eine binäre Variable für jede gültige Position und Ausrichtung eines Objektes
- Zielfunktion maximiert die Summe der Variablen

Ganzzahlige lineare Programme

Auf Rasterkoordinaten basierendes Modell:

- Eine binäre Variable für jede gültige Position und Ausrichtung eines Objektes
- Zielfunktion maximiert die Summe der Variablen
- Nebenbedingungen der Form $a + b \leq 1$

Rekursive Aufteilung

- Aufteilungsheuristik für 2D-IIPP

Rekursive Aufteilung

- Aufteilungsheuristik für 2D-IIPP
- Phase 1: 5-Block-Heuristik

Rekursive Aufteilung

- Aufteilungsheuristik für 2D-IIPP
- Phase 1: 5-Block-Heuristik
- Phase 2: L-Ansatz

Rekursive Aufteilung

- Aufteilungsheuristik für 2D-IIPP
- Phase 1: 5-Block-Heuristik
- Phase 2: L-Ansatz
- Optimalität ist nicht bewiesen, es wurde jedoch noch keine Instanz gefunden, die nicht optimal gelöst wird

Dreidimensionale Schichtenheuristik von George

- Findet die maximale Packung, die aus parallelen Objektschichten besteht

Dreidimensionale Schichtenheuristik von George

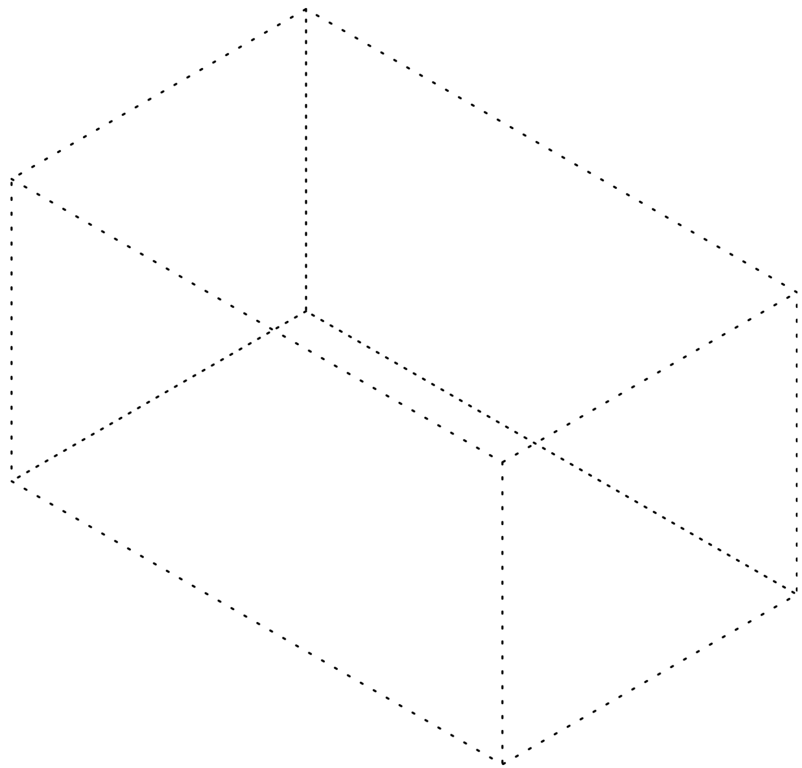
- Findet die maximale Packung, die aus parallelen Objektschichten besteht
- Verwendet im Original einen speziellen Algorithmus zum Bestimmen der Packmengen der einzelnen Schichten und berücksichtigt die Stabilität der Packung

Beste-Schicht-Zuerst-Heuristik

- Schneidet schrittweise Scheiben vom Behälter ab und packt diese mit Objekten

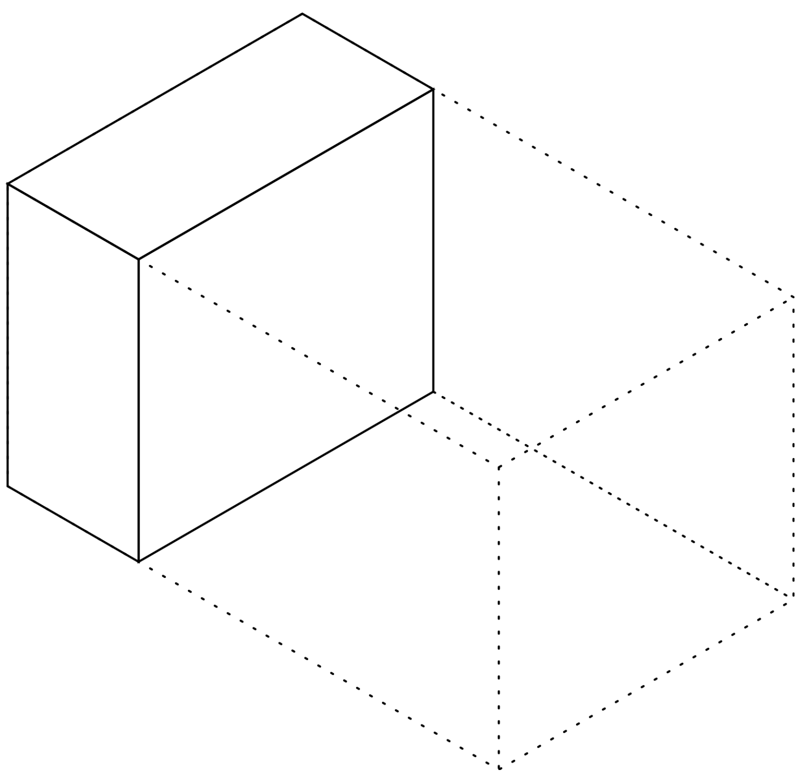
Beste-Schicht-Zuerst-Heuristik

- Schneidet schrittweise Scheiben vom Behälter ab und packt diese mit Objekten



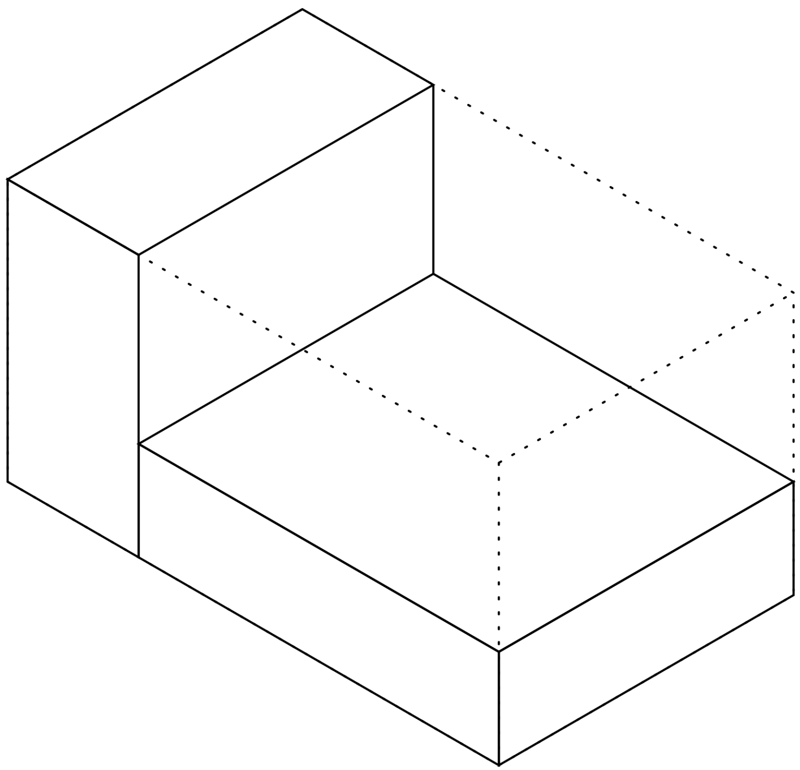
Beste-Schicht-Zuerst-Heuristik

- Schneidet schrittweise Scheiben vom Behälter ab und packt diese mit Objekten



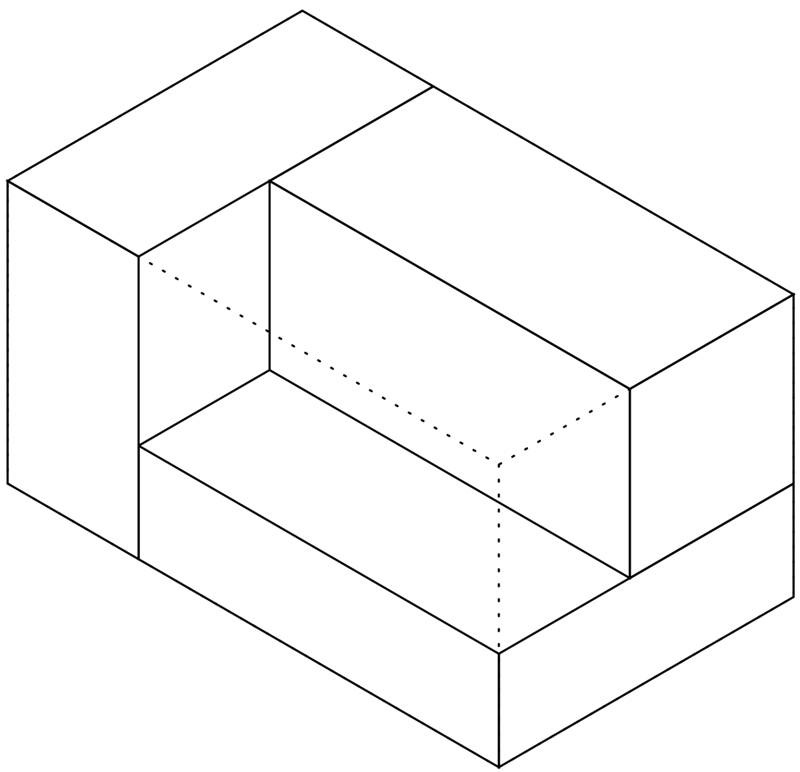
Beste-Schicht-Zuerst-Heuristik

- Schneidet schrittweise Scheiben vom Behälter ab und packt diese mit Objekten



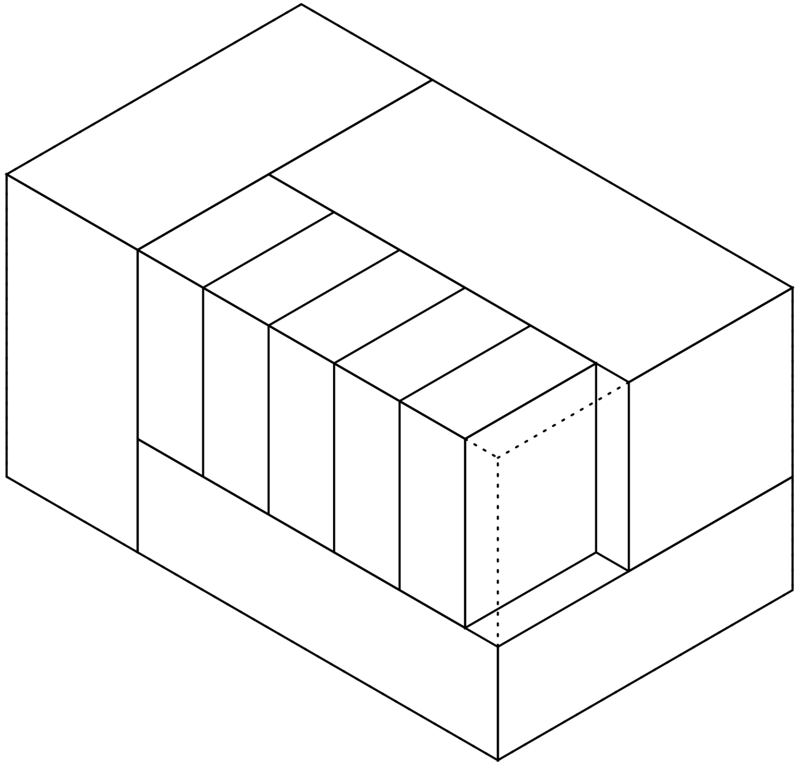
Beste-Schicht-Zuerst-Heuristik

- Schneidet schrittweise Scheiben vom Behälter ab und packt diese mit Objekten



Beste-Schicht-Zuerst-Heuristik

- Schneidet schrittweise Scheiben vom Behälter ab und packt diese mit Objekten



Beste-Schicht-Zuerst-Heuristik

- In jedem Algorithmusschritt wird aus den 9 möglichen Schnitten, derjenige gewählt, der das verschwendete Volumen minimiert

Beste-Schicht-Zuerst-Heuristik

- In jedem Algorithmusschritt wird aus den 9 möglichen Schnitten, derjenige gewählt, der das verschwendete Volumen minimiert

$$\frac{\text{Schnittvolumen} - \text{Objektvolumen} \cdot \text{Objektanzahl}}{\text{Objektanzahl}}$$

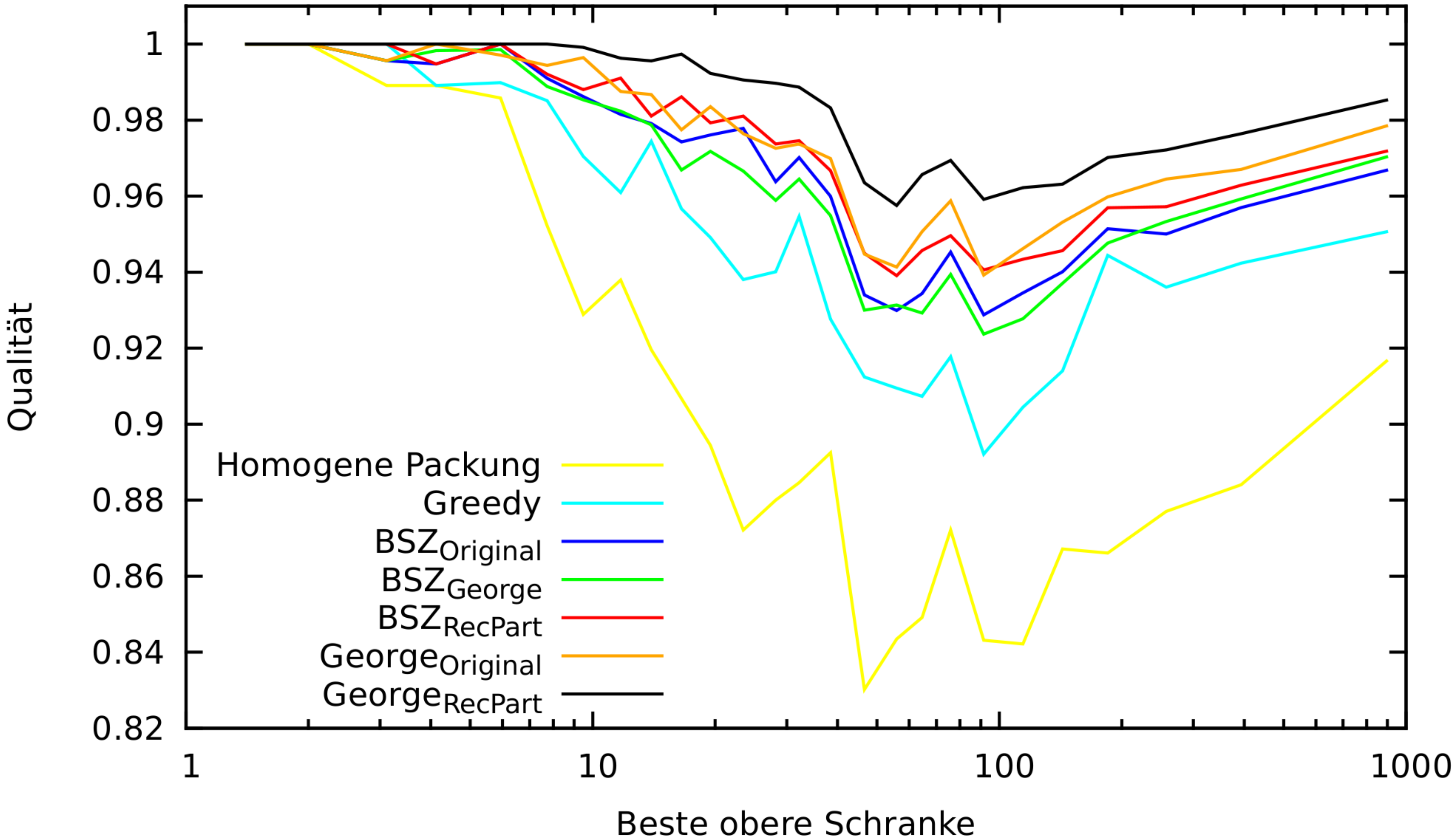
Greedy Heuristik

- Graphbasierter Ansatz: die Knoten entsprechen möglichen Objektplatzierungen, zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden wenn sich die entsprechenden Objekte überlappen
- Größte unabhängige Knotenmenge des Graphen ist eine optimale Lösung des Packproblems
- Wähle den Knoten mit dem kleinsten Grad und entferne seine Nachbarn aus dem Graphen bis alle übrig gebliebenen Knoten isoliert sind

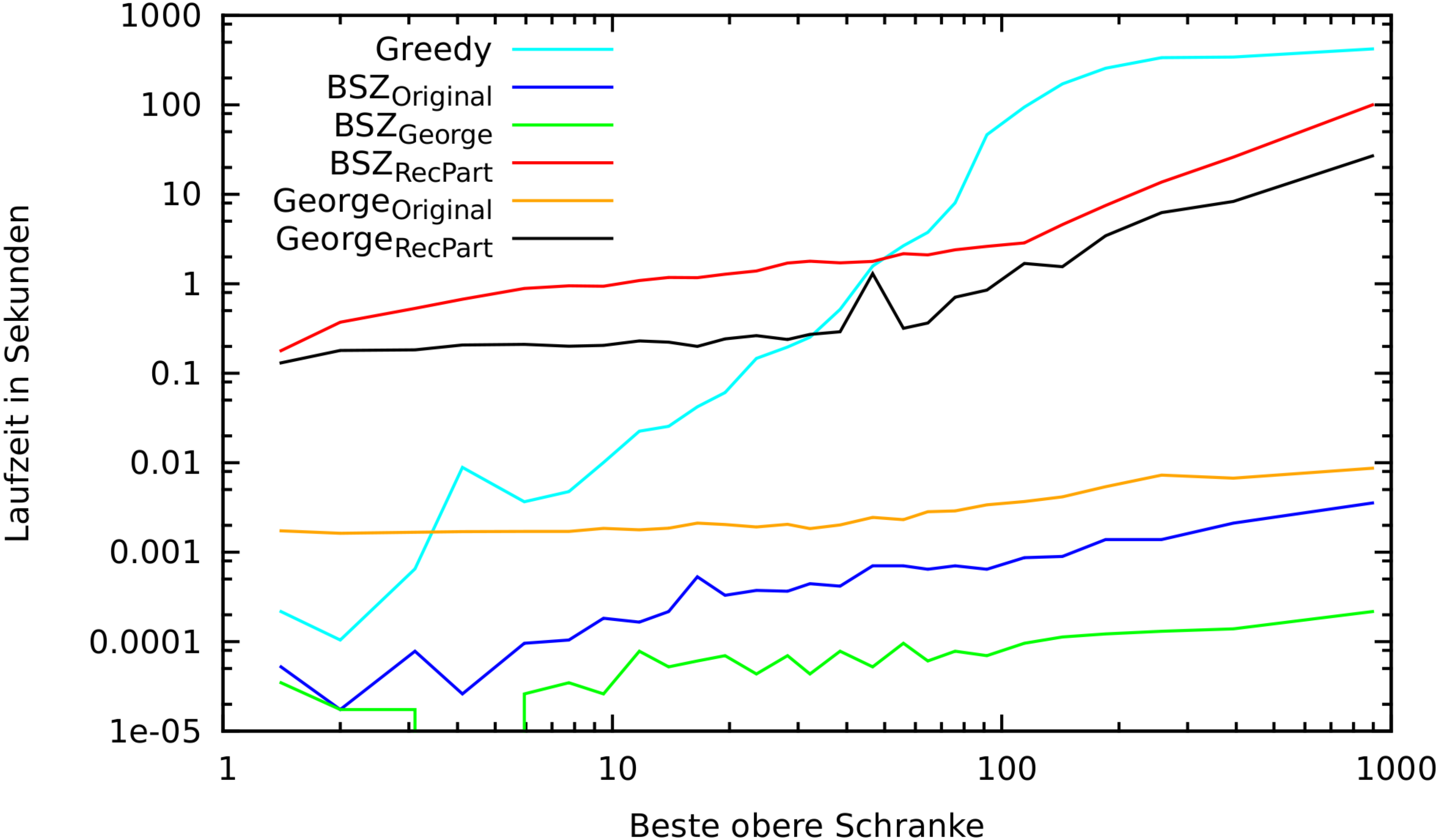
Vergleich der Methoden

Algorithmus	Optimum gefunden	Anteil am Optimum	Durchschnittliche Laufzeit je Problem in ms	Standardabweichung der Laufzeit
Homogene Packung	44,8%	90,5%	-	-
Greedy	49,9%	95,0%	64826,84	183329,07
BSZ	55,9%	96,6%	0,65	1,27
BSZ_{George}	53,6%	96,4%	**0,07**	**0,26**
$BSZ_{RecPart}$	57,7%	97,2%	6989,76	44947,77
George	61,1%	97,4%	2,98	3,81
$George_{RecPart}$	**67,0%**	**98,4%**	2110,62	12604,68

Vergleich der Methoden



Vergleich der Methoden



Fazit

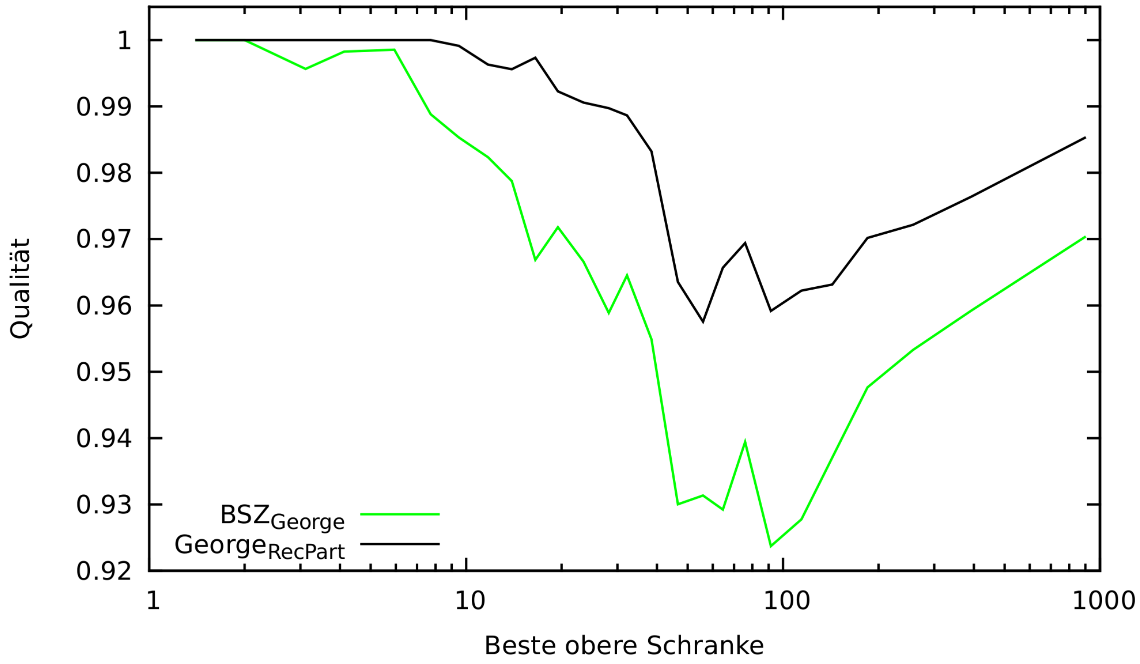
Beste Lösungsqualität:
Schichtenheuristik von George mit rekursiver Aufteilung als 2D-Algorithmus

Beste Laufzeit:
Beste-Schicht-Zuerst-Heuristik mit dem 2D-Algorithmus von George

Fazit

Beste Lösungsqualität:
Schichtenheuristik von George mit rekursiver Aufteilung als 2D-Algorithmus

Beste Laufzeit:
Beste-Schicht-Zuerst-Heuristik mit dem 2D-Algorithmus von George



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!