

Bachelorarbeit

Minimale Überdeckung von Knoten und Kanten in Graphen durch Geraden

Ursula Scherm

Abgabedatum: 24. Oktober 2016
Betreuer: Prof. Dr. Alexander Wolff
Dr. Steven Chaplick
Fabian Lipp, M. Sc.



Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen, Komplexität und wissensbasierte Systeme

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das Problem behandelt, zweidimensionale Zeichnungen von Graphen mit möglichst wenigen Geraden zu überdecken. Hierbei werden ausschließlich geradlinige und kreuzungsfreie Zeichnungen betrachtet.

Wir zeigen, dass die Kanten eines Dodekaeders mit zehn Geraden überdeckt werden können. Dazu geben wir zwei untere Schranken an, von denen eine besagt, dass zur Überdeckung eines Dodekaeders mindestens neun Geraden benötigt werden. Die andere besagt, dass mindestens zehn Geraden benötigt werden. Im zweiten Teil der Arbeit wird ein Algorithmus angegeben, der Tausendfüßler mit n Knoten und Maximalgrad Δ auf ein Gitter der Größe $\mathcal{O}(\sqrt{n\Delta}) \times \mathcal{O}(\sqrt{n\Delta})$ zeichnet. Des Weiteren wird gezeigt, dass jeder Tausendfüßler mit n Knoten und Maximalgrad Δ mit $\mathcal{O}(\sqrt{n\Delta}^{3/2})$ Geraden überdeckt werden kann.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Motivation	4
1.2	Definitionen	5
2	Dodekaeder	8
2.1	Der Dodekaeder in der Ebene	9
2.2	Der Dodekaeder im Raum	10
3	Tausendfüßler	11
3.1	Tausendfüßler mit Grad 4	12
3.2	Tausendfüßler mit höherem Grad	14
3.3	Tausendfüßler mit anderen Grundformen	20
3.4	Tausendfüßler im Raum	22
3.5	Ausblick auf allgemeine Tausendfüßler	25
4	Fazit und Ausblick	26
	Literaturverzeichnis	27

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Thematik der Überdeckung von Graphen durch Geraden steht im Zusammenhang mit anderen Bereichen des Graphenzeichnens, wie der Flächen- und Volumenminimierung und der visuellen Übersichtlichkeit von Zeichnungen.

Verwandte Arbeiten. Eine der gängigsten Arten Graphen anschaulich darzustellen ist, Kanten geradlinig zu zeichnen und Kreuzungen zu vermeiden. Die Klasse der Graphen, die sich in der Ebene kreuzungsfrei zeichnen lassen, nennt sich planare Graphen. Algorithmisch lassen sie sich abhängig von der Anzahl der Knoten in Linearzeit erkennen, was von Hopcroft et al. [HT74] gezeigt wurde. Fáry [Fár48], Stein [Ste51] und Wagner [Wag36] haben unabhängig voneinander gezeigt, dass alle planaren Graphen in der Ebene mit geradlinigen Kanten gezeichnet werden können. Sowohl de Fraysseix et al. [dFPP90] also auch Schnyder [Sch90] haben einen Algorithmus beschrieben, der planare Graphen in effizienter Zeit geradlinig und kreuzungsfrei auf ein Gitter der Größe $O(n) \times O(n)$ zeichnet. Die Klasse der planaren Graphen ist jedoch ziemlich klein, wodurch viele Graphen nicht kreuzungsfrei gezeichnet werden können. Um auch andere Graphen anschaulich darstellen zu können, lockert man die Planaritätsbedingungen ein wenig auf, jedoch nur so weit, sodass die Lesbarkeit darunter nicht zu sehr leidet. Diese Graphen nennen sich annähernd-planar. Ein Beispiel dafür sind die 1-planaren oder allgemeiner die k -planaren Graphen, bei denen die Anzahl der erlaubten Kreuzungen pro Kante auf eins beziehungsweise k beschränkt werden. Eine Möglichkeit, mehrere Kreuzungen pro Kante übersichtlich zu gestalten, besteht in sogenannten Block-Kreuzungen. Hierbei werden möglichst viele Kreuzungen auf einer Kante zu einer gemeinsamen Block-Kreuzung zusammengefasst. Anwendung finden die Block-Kreuzungen zum Beispiel beim Zeichnen von Linienplänen von U-Bahnen. Eine weitere Möglichkeit, Kreuzungen übersichtlich zu gestalten, bietet die Beschränkung der Winkel, unter denen sich Kanten kreuzen. So erlauben RAC-Zeichnungen (Right Angle Crossing) beispielsweise nur rechte Winkel (siehe hierzu [DEL11]). Die Klasse der RAC-Graphen besteht aus den Graphen, die eine RAC-Zeichnung erlauben. Eine Verallgemeinerung der RAC-Graphen bilden die ACE_α - (Angle Crossing Exactly) und ACL_α - Graphen (Angle Crossing at Least), bei denen der Kreuzungswinkel genau α oder mindestens α sein muss (siehe dazu [DL13]).

Dujmović et al. [DESW07] haben eingeführt, Zeichnungen von Graphen mit Strecken zu überdecken. Zudem haben sie eine Steigungszahl eingeführt, die angibt, wie viele verschiedene Steigungen benötigt werden, um einen Graphen mit Strecken zu überdecken. Eine andere Art der Überdeckung wurde von Schulz [Sch13] beschrieben, bei der Kanten bzw. Kantenfolgen mit Kreisbögen überdeckt werden. Die Zeichnung eines Graphen wird

allgemein als leichter verständlich und ästhetischer empfunden, wenn Pfade möglichst kontinuierlich und Kreuzungen rechtwinklig sind. Dies ergab eine Studie von Ware et al. [WPCM02]. Somit liegt es nahe, Kanten auf möglichst wenige Geraden zu legen, um die Lesbarkeit zu erhöhen. Chaplick et al. [CFL⁺de] haben das Problem eingeführt, wie viele Geraden oder Ebenen benötigt werden, um die Knoten und Kanten (oder auch nur die Knoten) von Graphen im zwei- und dreidimensionalen Raum zu überdecken. Ein möglicher Anwendungsbereich hiervon liegt beispielsweise im Leiterplattenentwurf, bei dem der Netzplan der Schaltung in ihrer räumlichen Anordnung von Bauteilen und Leiterbahnen optimiert werden soll.

Eigene Arbeit. Wir knüpfen an die Idee von Chaplick et al. an, Graphen in der Ebene mit Geraden zu überdecken und geben dabei einen kleinen Ausblick auf mögliche dreidimensionale Zeichnungen. Die Arbeit besteht aus zwei Teilen:

Der erste Teil der Arbeit behandelt die Überdeckung der Kanten des Dodekaeders. Dabei finden wir mit Hilfe zweier verschiedener Beweistechniken zwei verschiedene untere Schranken für die Anzahl benötigter Geraden in der Ebene. Der erste Beweis liefert eine untere Schranke von neun, wohingegen der zweite eine schärfere untere Schranke von zehn Geraden liefert. Als obere Schranke finden wir eine Zeichnung, in der die Kanten des Dodekaeders durch zehn Geraden überdeckt werden. Eine Überdeckung des Dodekaeders in der Ebene mit zehn Geraden ist somit optimal.

Im zweiten Teil werden verschiedene Arten von Tausendfüßlern betrachtet. Wir zeigen, dass Tausendfüßler mit n Knoten und einem Maximalgrad von 4 mit $2\sqrt{(n-2)/3}$ vielen Geraden überdeckt werden können. Die untere Schranke für die Überdeckung beträgt $\sqrt{2(n-2)/3}$. Allgemeiner zeigen wir, dass für alle Tausendfüßler mit n Knoten und Maximalgrad Δ gilt, dass die Anzahl der Geraden zwischen $\sqrt{n\Delta}$ und $\lceil\sqrt{n\Delta^{3/2}}\rceil$ liegt. Zudem werfen wir auch einen kleinen Blick auf dreidimensionale Zeichnungen von Tausendfüßlern, finden dafür jedoch keine Überdeckung mit weniger Geraden als in der Ebene.

1.2 Definitionen

Zunächst werden wir ein paar grundlegende Begriffe der Graphentheorie und des Graphenzeichnens definieren, auf denen diese Arbeit aufbaut.

Ein *ungerichteter Graph* G ist ein Paar (V, E) , das aus einer endlichen Menge V an Knoten und einer endlichen Menge E an Kanten besteht. Die Menge der Kanten ist eine Teilmenge aller zweielementigen Mengen aus V , also $E \subseteq \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$. Zwei Knoten u und v heißen benachbart oder adjazent, falls $\{u, v\} \in E$ gilt. Ein Knoten v und eine Kante e heißen inzident, falls $v \in e$ gilt. Es sei $n = |V|$ die Anzahl der Knoten und $m = |E|$ die Anzahl der Kanten in G .

Der *Grad* $\deg(v)$ eines Knotens $v \in V$ ist die Anzahl der zu v adjazenten Knoten in G , also $\deg(v) = |\{u \in V \mid \{v, u\} \in E\}|$. Das Maximum aller Knotengrade in G wird *Maximalgrad* $\Delta(G)$ genannt.

Für zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißt G' *Teilgraph* von G , wenn

$V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt. Für eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt der Teilgraph $G[U] = (U, \binom{U}{2} \cap E)$ auf U *induzierter Teilgraph* von G .

Die Definition von Zeichnungen ist angelehnt an Di Battista et al. [DETT98].

Eine Abbildung ζ heißt *Zeichnung* von G , falls

- für alle $v \in V$ gilt $\zeta(v) \in \mathbb{R}^2$ und
- für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $\zeta(\{u, v\}) = \zeta_{\{u, v\}}[0, 1]$,
wobei $\zeta_{\{u, v\}}$ offene Jordankurve mit $\zeta_{\{u, v\}}(0) = \zeta(u)$ und $\zeta_{\{u, v\}}(1) = \zeta(v)$.

Eine offene Jordankurve ist eine homöomorphe Einbettung des Intervalls $[0, 1]$ in einen topologischen Raum. In unserem Fall ist dieser topologische Raum die euklidische Ebene. Eine Jordankurve ist also eine offene, stetige Kurve, die sich nicht selbst schneiden oder berühren darf und zwei voneinander verschiedene Anfangs- und Endpunkte hat.

Ein Graph G heißt *planar*, wenn er eine Zeichnung ζ besitzt, deren Kanten sich nur in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

Eine Zeichnung ζ von G heißt *geradlinig*, wenn alle Kanten als Strecken abbilden werden. Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf planare und geradlinige Zeichnungen.

Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \zeta_G$ heißen Facetten von ζ . Sei f die Anzahl an Facetten von ζ . Ist G planar, so ist die Anzahl der Facetten in jeder planaren Zeichnung in G dieselbe.

Wie bereits im Titel erwähnt, behandelt diese Arbeit Überdeckungen von Graphen mit Geraden. Deshalb definieren wir im Folgenden, was unter einer Überdeckung zu verstehen ist:

Hat ein Graph eine Zeichnung, in der seine Kanten (oder nur die Knoten) auf geometrische Objekte wie Geraden, Strecken oder Kreisbögen gelegt werden können, so spricht man von einer Kanten- (oder Knoten-) *Überdeckung* des Graphen. In dieser Arbeit werden nur Kantenüberdeckungen betrachtet. Wir definieren die *Geradenüberdeckungszahl* $\ell(G)$ von G als die minimale Anzahl an Geraden, mit der die Kanten von G überdeckt werden können.

Im Folgenden geben wir eine kombinatorische untere Schranke für die Überdeckung von Knoten nach Chaplick et al. [CFL⁺de] an:

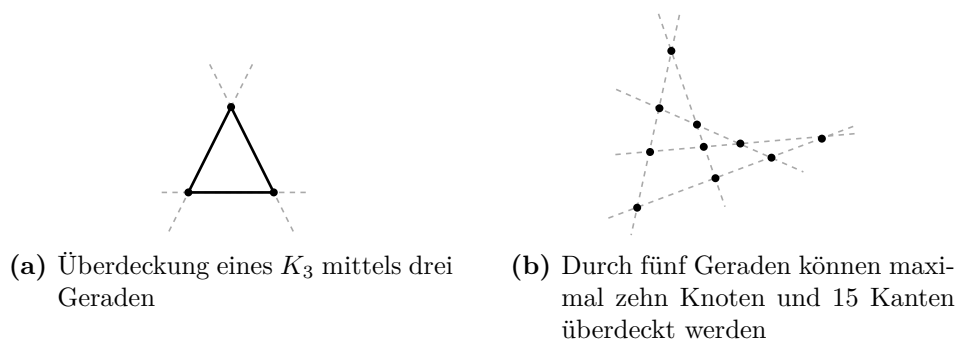


Abb. 1.1: Überdeckung essentieller Knoten

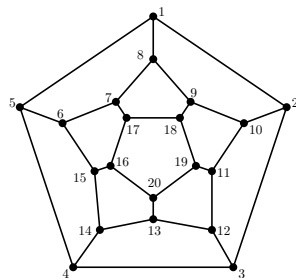
Chaplick et al. nennen Knoten v von einem Graphen G *essentiell*, wenn deren Grad größer 2 ist oder sie zu einem K_3 gehören, der Teilgraph von G ist. Sei $\text{es}(G)$ die Zahl der essentiellen Knoten in G . Jeder Knoten mit Grad größer 2 liegt auf dem Schnittpunkt von mindestens zwei Geraden, um die inzidenten Kanten zu überdecken. Die Knoten eines K_3 liegen ebenfalls auf dem Schnittpunkt mindestens zweier Geraden, da mindestens drei Geraden benötigt werden, um einen Kreis zu überdecken (vgl. Abb. 1.1a). Somit ergibt sich für die Anzahl an essentiellen Knoten, die von ℓ Geraden überdeckt werden können, $\text{es}(G) \leq \binom{\ell}{2} = \frac{\ell(\ell-1)}{2} < \frac{\ell^2}{2}$. Daraus ergibt sich als untere Schranke für die Geraden, die benötigt werden, um alle essentiellen Knoten zu überdecken,

$$\ell > \sqrt{2 \text{es}(G)}. \quad (1.1)$$

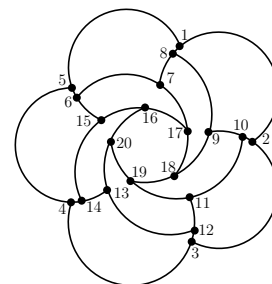
Die Anzahl der Kanten zwischen den Knoten, die von den ℓ Geraden überdeckt werden können, beträgt $\ell \cdot (\ell-2)$. Jede der ℓ Geraden wird von $\ell-1$ Geraden geschnitten, wodurch $\ell-2$ Teilstücke auf jeder Gerade entstehen (vgl. Abb. 1.1b).

2 Dodekaeder

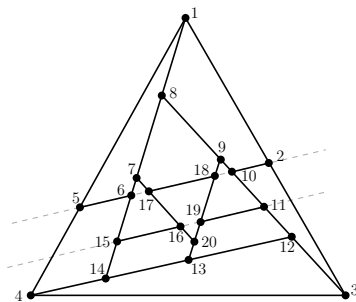
Das (regelmäßige) Pentagondodekaeder ist ein dreidimensionaler, geometrischer Körper mit 12 regelmäßigen Fünfecken als Flächen, 20 Ecken, von denen jede zu drei Flächen benachbart ist, und 30 (im Raum gleich langen) Kanten, von denen jede die Seite von zwei Fünfecken ist (vgl. Abb. 2.1a). Im weiteren Verlauf dieser Arbeit bezeichnen wir das Pentagondodekaeder als Dodekaeder. Schulz [Sch13] hat gezeigt, dass man mit zehn Kreisbögen alle Kanten eines Dodekaeders überdecken kann, was optimal ist, da es 20 Knoten vom Grad drei gibt und deshalb in jedem Knoten der Endpunkt eines Kreisbogens liegen muss. Doch wie viele Geraden werden benötigt, um die Kanten des Dodekaeders zu überdecken? Abschnitt 2.1 handelt von der Überdeckung des Dodekaeders in der Ebene. In Abschnitt 2.2 wird kurz darauf eingegangen, dass wir im Raum keine Überdeckung mit geringerer Geradenüberdeckungszahl als in der Ebene finden konnten.



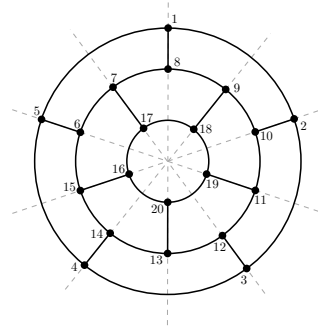
(a) Planare, geradlinige Zeichnung des Dodekaeders



(b) Zeichnung des Dodekaeders auf zehn Kreisbögen



(c) Zeichnung des Dodekaeders auf zehn Geraden



(d) Zeichnung des Dodekaeders auf drei Kreisen und fünf Geraden

Abb. 2.1: Planare Zeichnungen des Dodekaeders

2.1 Der Dodekaeder in der Ebene

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass der Dodekaeder in der Ebene optimal mit zehn Geraden überdeckt werden kann. Durch Anwendung zweier verschiedener Beweisansätze erzielen wir dabei zwei unterschiedliche untere Schranken. Im ersten Beweis betrachten wir essentielle Knoten, wodurch wir zu einer unteren Schranke von neun Geraden gelangen. Im zweiten Beweis werden separierende Kreise betrachtet. Dadurch erreichen wir eine untere Schranke von zehn Geraden, die zur Überdeckung aller Kanten nötig sind.

Satz 2.1. *Für den Dodekaeder ist eine Überdeckung mit zehn Geraden optimal.*

Lemma 2.2. *Für den Dodekaeder D gilt $\ell(D) \geq 9$.*

Beweis. Für die untere Schranke wenden wir Ungleichung 1.1 auf den induzierten Teilgraphen $G[6, \dots, 20]$ an, der aus den inneren 15 Knoten 6 bis 20, 20 Kanten und sechs Facetten des Dodekaeders besteht (vgl. Abb. 2.1a). Um 15 Knoten zu überdecken, werden sechs Geraden benötigt, da $\sqrt{2 \cdot 15} \approx 5,5$. Mit sechs Geraden können $4 \cdot 6 = 24$ Kanten überdeckt werden. Das ist ausreichend, um die inneren 20 Kanten zu überdecken. Für die äußeren fünf Knoten, die einen Kreis bilden, werden mindestens drei zusätzliche Geraden benötigt. Die übrigen fünf Kanten, welche die inneren 15 Knoten mit den äußeren fünf Knoten verbinden, können auf den Geraden platziert werden, die für die Überdeckung der inneren 15 Knoten verwendet wurden. Somit werden mindestens neun Geraden benötigt, um die Kanten des Dodekaeders zu überdecken. \square

Im Folgenden geben wir noch eine alternative Beweisidee an und erzielen somit eine schärfere untere Schranke:

Lemma 2.3. *Für den Dodekaeder D gilt $\ell(D) \geq 10$.*

Beweis. Ein Dodekaeder besteht aus drei geschachtelten Kreisen. Für jeden Kreis werden mindestens drei Geraden benötigt, um ihn zu überdecken. Hinzu kommen noch die Verbindungen zwischen den Kreisen. Jeweils maximal drei der fünf Kanten zwischen dem äußeren und dem zweiten Kreis, sowie dem zweiten und dem innersten Kreis können auf die schon existierenden Geraden gelegt werden. Für die übrigen vier Kanten wird somit mindestens eine zusätzliche Gerade benötigt. Zusammenfassend benötigt man also mindestens $3 + 3 + 3 + 1 = 10$ Geraden, um die Kanten des Dodekaeders zu überdecken. \square

Abbildung 2.1c zeigt die Überdeckung eines Dodekaeders mit zehn Geraden. Wie soeben gezeigt, liegt die untere Schranke ebenfalls bei zehn Geraden. Somit ist die Geradenüberdeckungszahl des Dodekaeders zehn.

Anmerkung. Wie man in Zeichnung 2.1d erkennen kann, erlaubt die gemeinsame Nutzung von Kreisbögen und Geraden eine Überdeckung mit insgesamt nur acht Objekten.

2.2 Der Dodekaeder im Raum

Vermutung. Wir haben die Vermutung, dass eine Überdeckung mit zehn Geraden auch im Raum optimal ist. Grund dafür könnte sein, dass die drei separierenden Kreise sehr starr miteinander verbunden sind.

3 Tausendfüßler

Ein Tausendfüßler ist ein Graph T , der aus einem beliebig langen Pfad (im weiteren Verlauf Rückgrat genannt) besteht und von dessen Knoten nur Pfade der Länge 1 (Füße genannt) abzweigen (vgl. Abb. 3.1). Die Anzahl der Knoten des Rückgrats bezeichnen wir mit n' .

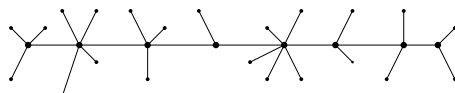


Abb. 3.1: Zeichnung eines Tausendfüßlers

Dieses Kapitel befasst sich damit, wie viele Geraden benötigt werden, um die Kanten von Tausendfüßlern zu überdecken. Es wird ein Zeichenalgorithmus beschrieben, der Tausendfüßler mit n Knoten und Grad Δ auf ein Gitter der Größe $\mathcal{O}(\sqrt{n\Delta}) \times \mathcal{O}(\sqrt{n\Delta})$ zeichnet. Die Grundidee hierbei ist, das Rückgrat spiralförmig aufzuwickeln, um möglichst viele Geraden mehrfach für die Überdeckung verwenden zu können. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass alle Knoten auf dem Rückgrat dieselbe Anzahl an Füßen haben (mit Ausnahme des ersten und letzten, die anstelle eines zweiten benachbarten Rückgratknotens einen zusätzlichen Fuß haben). Alle Knoten des Rückgrats sind folglich vom selben Grad. Sei $T(n', \Delta)$ der Tausendfüßler mit n' Knoten auf dem Rückgrat, jeder vom Grad Δ . Dabei betrachten wir nur gerade Δ , da pro Gerade maximal zwei inzidente Kanten eines Knotens überdeckt werden können.

Wir werden zeigen, dass Tausendfüßler T mit n Knoten und Grad Δ in der Ebene durch $\mathcal{O}(\sqrt{n\Delta}^{3/2})$ viele Geraden überdeckt werden können. Des weiteren zeigen wir, dass mindestens $\Omega(\sqrt{n\Delta})$ viele Geraden benötigt werden, um Tausendfüßler zu überdecken. Die Beweise dazu befinden sich in Abschnitt 3.2. In Abschnitt 3.3 betrachten wir alternative Darstellungen von Tausendfüßlern in der Ebene. In den Kapiteln 3.4 und 3.5 geben wir abschließend zu den Tausendfüßlern noch einen kleinen Ausblick auf mögliche dreidimensionale Darstellungen und allgemeine Tausendfüßler.

Anmerkung. Wie man sieht, sind Tausendfüßler Bäume. Dujmović et al. [DESW07] haben gezeigt, dass Bäume mit $\eta/2$ vielen Strecken überdeckt werden können, wobei η die Anzahl an Knoten mit geradem Grad ist. Chaplick et al. [CFL⁺de] haben gezeigt, dass Binärbäume mit $(6/\sqrt{2})\sqrt{n-1} - 5$ Geraden überdeckt werden können.

Satz 3.1. Für einen Tausendfüßler T mit n Knoten und Grad Δ existieren $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, sodass gilt $c_1(\sqrt{n\Delta}) < \ell(T) \leq c_2(\sqrt{n\Delta}^{3/2})$.

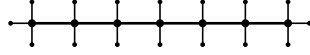


Abb. 3.2: Zeichnung eines Tausendfüßlers mit Grad 4

3.1 Tausendfüßler mit Grad 4

In diesem Abschnitt betrachten wir Tausendfüßler der Art $T(n', 4)$ als einfachen Fall der Tausendfüßler, um an ihnen die Grundidee zu erklären. Abbildung 3.2 zeigt einen solchen Tausendfüßler.

Lemma 3.2. *Für einen Tausendfüßler T mit n' Knoten auf dem Rückgrat und Grad 4 gilt $\sqrt{2n'} < \ell(T) \leq 2 \lceil \sqrt{n'} \rceil$.*

Beweis. Der einfachste Fall eines Tausendfüßlers dieser Art ist der mit nur einem Knoten auf dem Rückgrat ($n' = 1$). Da dieser Knoten sowohl den Anfang als auch das Ende des Tausendfüßlers bildet, besitzt er anstelle von zwei Füßen vier, ist also vom Grad 4. Um ihn zu überdecken, werden offensichtlich zwei Geraden benötigt (vgl. Abb. 3.3a).

Damit schrittweise größere Tausendfüßler mit mehr Rückgratknoten konstruiert werden können, wird die Zeichnung spiralförmig gegen den Uhrzeigersinn erweitert. Pro Stufe der Erweiterung werden dazu zwei neue Geraden eingefügt, die sich im rechten Winkel schneiden. Abwechselnd werden diese einen Gitterpunkt diagonal oben rechts (bei geraden Stufen), beziehungsweise unten links (bei ungeraden Stufen) zur Zeichnung angefügt. Vergleiche dazu Abbildung 3.4a. Auf dem Schnittpunkt der beiden neu eingefügten Geraden und dort, wo diese die schon vorhandenen Geraden schneiden, fügen wir neue Rückgratknoten ein (vgl. Abb. 3.4b). Das Rückgrat wird entlang der äußersten Gerade verlängert, bis es eine der neuen Geraden kreuzt und von dort an, entlang der neuen Geraden, weiter verlängert. Der Fuß, der sich zuvor am Ende des Rückgrats befand, wird dabei entfernt (vgl. Abb. 3.4c). An die neu entstandenen Knoten des Rückgrats werden zum Schluss noch je zwei Füße angefügt. Diese liegen auf den Geraden, die das Rückgrat in den neuen Rückgratknoten schneiden. Ein zusätzlicher Fuß wird am Ende des verlängerten Rückgrats eingefügt. Vergleiche dazu Abbildung 3.4d.

Wir gehen beim Zeichnen der Tausendfüßler davon aus, dass das Innere der Zeichnung komplett ist, d.h auf jeder Kreuzung von zwei Geraden ein Knoten des Rückgrats liegt. Ist ein Tausendfüßler zu kurz, um die Stufe einer Zeichnung ganz zu füllen, so füllt man das Innere der Zeichnung komplett, sodass nur die letzten Geradenschnittpunkte am Äußeren der Zeichnung frei bleiben.

Somit ist jede Zeichnung um je eine Einheit breiter und höher als die Zeichnung der nächst kleineren Stufe. Da das Rückgrat der Zeichnung von der Stufe 1 nur aus einem Punkt besteht, ist die Zeichnung jeder höheren Stufe quadratisch. Die Seitenlänge jeder Zeichnung ist um eine Einheit kleiner als die Stufe der Zeichnung. Die Länge der Füße wird dabei vernachlässigt, da sie beliebig klein gezeichnet werden können.

Zur einfacheren Berechnung führen wir ein paar Funktionen ein:

- Sei $n'_i(i)$ die Anzahl der Rückgratknoten, die eine Zeichnung der Stufe i enthalten kann, und

- $i'(n')$ die Stufe, die benötigt wird, um n' Rückgratknoten unterzubringen.

Für die Anzahl der Geraden führen wir drei verschiedene Funktionen ein:

- Sei $\ell^*(i, \Delta)$ die Anzahl an Geraden, die benötigt wird, um eine Zeichnung der Stufe i von Tausendfüßlern mit Grad Δ zu überdecken,
- $\ell'(n', \Delta)$ sei die Anzahl an Geraden, die benötigt wird, um Tausendfüßler mit n' Knoten auf dem Rückgrat und Grad Δ zu überdecken, und
- $\ell(n, \Delta)$ die Anzahl an Geraden, die benötigt wird, um Tausendfüßler mit insgesamt n Knoten und Grad Δ zu überdecken.

Somit ergeben sich folgende Gleichungen für die Anzahl der Rückgratknoten $n'_i(i)$ und Anzahl der benötigten Geraden $\ell^*(i, \Delta)$ in Abhängigkeit der Stufe

$$n'_i(i) \leq i^2$$

und

$$\ell^*(i, 4) = 2i. \quad (3.1)$$

Für die benötigte Stufe und die Anzahl der Geraden in Abhängigkeit der Anzahl der Rückgratknoten ergibt sich daraus

$$i'(n') = \lceil \sqrt{n'} \rceil$$

und

$$\ell'(n', 4) = 2 \lceil \sqrt{n'} \rceil.$$

Da jeder Rückgratknoten, bis auf die beiden Knoten an den Enden, zwei Füße hat, folgt daraus für die Gesamtanzahl der Knoten $n = 3n' + 2$. Für die Zahl der Geraden in Abhängigkeit der Gesamtzahl der Knoten gilt somit

$$\ell(n, 4) = 2 \left\lceil \sqrt{\frac{n-2}{3}} \right\rceil.$$

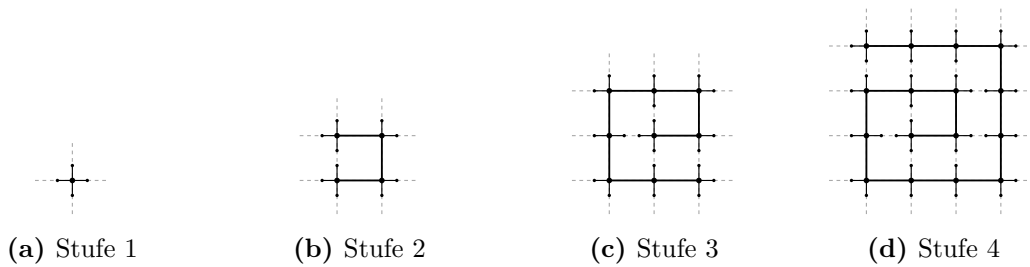


Abb. 3.3: Tausendfüßler mit (a) einem, (b) vier, (c) neun und (d) sechzehn Knoten auf dem Rückgrat

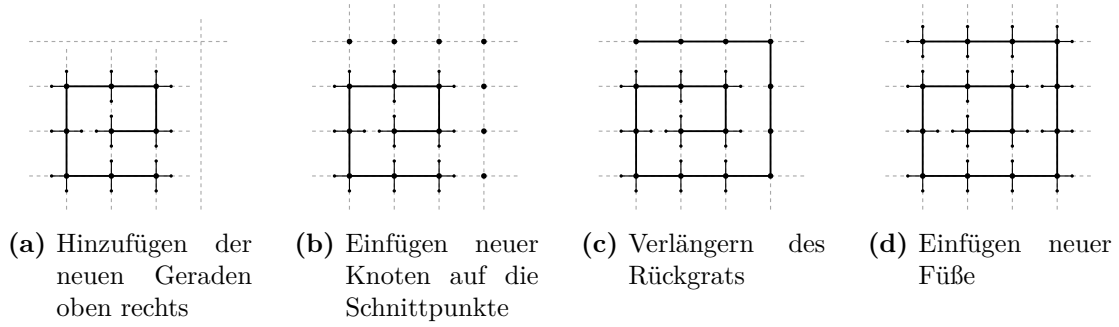


Abb. 3.4: Konstruktion eines Tausendfüßlers der Stufe 4

Für eine untere Schranke wenden wir Ungleichung 1.1 an. Im Fall der Tausendfüßler entsprechen die essentiellen Knoten den Knoten auf dem Rückgrat. Daraus ergibt sich als untere Schranke für die Tausendfüßler mit Grad 4

$$\ell'(n', 4) > \sqrt{2n'}. \quad (3.2)$$

Die Anzahl der Geraden, die zum Überdecken der Tausendfüßler vom Grad 4 benötigt werden, liegt also zwischen $\sqrt{2n'}$ und $2\lceil\sqrt{n'}\rceil$. \square

Anmerkung. Die Steigungszahl von Tausendfüßlern mit Grad 4 beträgt zwei, genau wie die Steigungszahl von Binärbäumen. Grund dafür ist, dass sowohl bei den Tausendfüßlern als auch bei den Binärbäumen kein Knoten vom Grad größer 4 existiert und somit die inzidenten Kanten eines Knoten mit maximal zwei Geraden überdeckt werden können. Daraus folgt, dass beide rechtwinklige Zeichnungen haben, da Dujmović et al. [DESW07] gezeigt haben, dass ein Graph eine rechtwinklige Zeichnung hat, wenn seine Steigungszahl zwei ist. Graphen mit Steigungszahl zwei haben somit Zeichnungen mit geringer visueller Komplexität.

3.2 Tausendfüßler mit höherem Grad

In diesem Abschnitt betrachten wir Tausendfüßler $T(n, \Delta)$ mit $\Delta > 4$. Dabei betrachten wir nur gerade Δ . Um Satz 3.1 zu beweisen, geben wir zuerst eine obere Schranke für die Geradenüberdeckungszahl von Tausendfüßler an. Als zweites zeigen wir, dass jeder Tausendfüßler auf ein Gitter der Größe $\mathcal{O}(\sqrt{n\Delta}) \times \mathcal{O}(\sqrt{n\Delta})$ gezeichnet werden kann. Im Anschluss daran geben wir eine untere Schranke für die Geradenüberdeckungszahl an. Abschließend geben wir eine Tabelle mit den genauen Werten der unteren und oberen Schranke in Abhängigkeit des Grades an.

Lemma 3.3. *Für einen Tausendfüßler T mit n Knoten und Grad Δ gilt $\ell(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n\Delta}^{3/2})$.*

Beweis. Seien $x(i)$ und $y(i)$ die Anzahl der Rückgratknoten in x-Richtung beziehungsweise in y-Richtung einer Zeichnung der Stufe i . Wir nehmen zur leichteren Berechnung

an, dass die Stufe einer Zeichnung immer voll besetzt ist, d.h die Anzahl der Rückgratknoten des Tausendfüßlers quadratisch ist. Dabei gilt $x(i) = y(i) = i$, da die Zeichnungen immer quadratisch sind.

Um Knoten auf dem Rückgrat mit Grad 6 zu überdecken, fügt man zusätzliche Geraden mit Steigung 1 in das quadratische Grundgerüst ein (vgl. Abb. 3.5a). Um alle Rückgratknoten am unteren Rand der Zeichnung zu überdecken, benötigt man $x(i)$ viele Geraden. Für die Rückgratknoten am linken Rand benötigt man $y(i)$ viele Geraden. Da die linke untere Ecke nun doppelt überdeckt wurde, kann man eine Gerade wieder abziehen. Es genügen $x(i) + y(i - 1)$ viele Geraden, um alle Knoten des Rückgrats mit Geraden der Steigung 1 zu überdecken. Die Gesamtzahl der benötigten Geraden entspricht damit

$$\begin{aligned}\ell^*(i, 6) &= \ell^*(i, 4) + x(i) + y(i - 1) \\ &= 2i + i + i - 1 \\ &= 4i - 1.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Äquivalent dazu werden die Zeichnungen der Tausendfüßler mit Grad 8 mittels Geraden der Steigung -1 konstruiert (siehe Abb. 3.5b). Sie werden zusätzlich zu den Geraden mit Steigung 1 eingefügt. Die Zahl der Geraden beträgt

$$\begin{aligned}\ell^*(i, 8) &= \ell^*(i, 6) + x(i) + y(i - 1) \\ &= (4i - 1) + i + i - 1 \\ &= 6i - 2.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Nach demselben Schema werden die Zeichnungen für die Grade 10 (vgl. Abb. 3.5c) und 12 mittels Geraden der Steigung ± 2 überdeckt. Sie werden zusätzlich zu allen zuvor eingefügten Geraden hinzugefügt. Dadurch gilt für die Gesamtzahl der benötigten Geraden für Tausendfüßler mit Grad 10

$$\begin{aligned}\ell^*(i, 10) &= \ell^*(i, 8) + x(i) + 2y(i - 1) \\ &= (6i - 2) + i + 2i - 2 \\ &= 9i - 4.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Für die Zeichnungen mit je zwei aufeinanderfolgenden geraden Graden (z.B. 6 und 8 oder 10 und 12) werden zusätzliche Geraden mit betragsmäßig gleicher Steigung eingefügt. Die Anzahl dieser Geraden in Abhängigkeit zur Stufe der Zeichnung ist somit

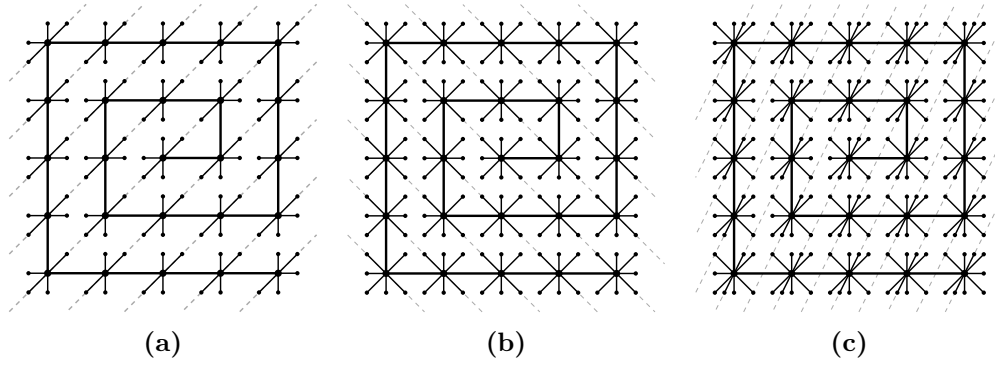


Abb. 3.5: Zusätzliche Geraden mit (a) Steigung 1, (b) Steigung -1 und (c) Steigung 2, um die Kanten der Knoten mit Grad 6, 8 und 10 zu überdecken

dieselbe. Allgemein gilt für die Anzahl der Geraden in Abhängigkeit eines Grades

$$\begin{aligned}
 \ell^*(i, \Delta) &= \ell^*(i, \Delta - 2) + x(i) + \left(\left\lceil \frac{\Delta}{4} \right\rceil - 1 \right) y(i - 1) \\
 &= \ell^*(i, \Delta - 2) + \left\lceil \frac{\Delta}{4} \right\rceil i - \left(\left\lceil \frac{\Delta}{4} \right\rceil - 1 \right) \\
 &= 2i + \sum_{\substack{j=6 \\ j \text{ gerade}}}^{\Delta} \left(\left\lceil \frac{j}{4} \right\rceil i - \left\lceil \frac{j}{4} \right\rceil + 1 \right).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Daraus ergibt sich für die Anzahl der Geraden in Abhängigkeit der Rückgratknoten

$$\begin{aligned}
\ell'(n', \Delta) &= 2 \lceil \sqrt{n'} \rceil + \sum_{\substack{j=6 \\ j \text{ gerade}}}^{\Delta} \left(\left\lceil \frac{j}{4} \right\rceil \lceil \sqrt{n'} \rceil - \left\lceil \frac{j}{4} \right\rceil + 1 \right) \\
&= 2 \lceil \sqrt{n'} \rceil + \sum_{\substack{j=6 \\ j \text{ gerade}}}^{\Delta} \left\lceil \frac{j}{4} \right\rceil \lceil \sqrt{n'} \rceil - \sum_{\substack{j=6 \\ j \text{ gerade}}}^{\Delta} \left\lceil \frac{j}{4} \right\rceil + \sum_{\substack{j=6 \\ j \text{ gerade}}}^{\Delta} 1 \\
&= 2 \lceil \sqrt{n'} \rceil + \lceil \sqrt{n'} \rceil \sum_{\substack{j=6 \\ j \text{ gerade}}}^{\Delta} \left\lceil \frac{j}{4} \right\rceil - \sum_{\substack{j=6 \\ j \text{ gerade}}}^{\Delta} \left\lceil \frac{j}{4} \right\rceil + \sum_{\substack{j=6 \\ j \text{ gerade}}}^{\Delta} 1 \\
&= 2 \lceil \sqrt{n'} \rceil + \lceil \sqrt{n'} \rceil \sum_{j=3}^{\frac{\Delta}{2}} \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil - \sum_{j=3}^{\frac{\Delta}{2}} \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil + 2 \sum_{j=3}^{\frac{\Delta}{2}} 1 \\
&= 2 \lceil \sqrt{n'} \rceil + (\lceil \sqrt{n'} \rceil - 1) \sum_{j=3}^{\frac{\Delta}{2}} \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil + 2 \left(\frac{\Delta}{2} - 3 + 1 \right) \\
&\leq 2 \lceil \sqrt{n'} \rceil + (\lceil \sqrt{n'} \rceil - 1) \sum_{j=3}^{\frac{\Delta}{2}} j + 2 \left(\frac{\Delta}{2} - 2 \right) \\
&\stackrel{(*)}{=} 2 \lceil \sqrt{n'} \rceil + (\lceil \sqrt{n'} \rceil - 1) \left(\frac{\frac{\Delta}{2}(\frac{\Delta}{2} + 1)}{2} - 3 \right) + (\Delta - 4) \\
&= 2 \lceil \sqrt{n'} \rceil + (\lceil \sqrt{n'} \rceil - 1) \left(\frac{\Delta^2}{8} + \frac{\Delta}{4} - 3 \right) + (\Delta - 4) \\
&\in \mathcal{O}(\sqrt{n'}) + \mathcal{O}(\sqrt{n'}) \cdot \mathcal{O}(\Delta^2) + \mathcal{O}(\Delta) \\
&\in \mathcal{O}(\sqrt{n'} \Delta^2).
\end{aligned}$$

(*) Gauß'sche Summenformel

Für die Gesamtzahl n der Knoten in Abhängigkeit des Grades gilt

$$\begin{aligned}
n &= n' + n'(\Delta - 2) + 2 \\
&= n'(\Delta - 1) + 2,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

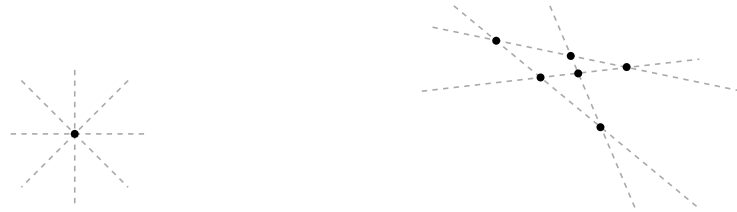
da jeder der n' Knoten auf dem Rückgrat $\Delta - 2$ Füße und der Tausendfüßler an beiden Enden einen zusätzlichen Fuß hat. Daraus ergibt sich für die Anzahl der Geraden in

Abhängigkeit der Anzahl aller Knoten und des Grades

$$\begin{aligned}
 \ell(n, \Delta) &\in \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{n-2}{\Delta-1}}\Delta^2\right) \\
 &\in \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{n}{\Delta}}\Delta^2\right) \\
 &\in \mathcal{O}\left(\sqrt{n}\Delta^{-\frac{1}{2}}\Delta^2\right) \\
 &\in \mathcal{O}\left(\sqrt{n}\Delta^{\frac{3}{2}}\right).
 \end{aligned}$$

□

Für die untere Schranke verallgemeinern wir das Argument der essentiellen Knoten aus Kapitel 1.2. Das heißt, dass sich ein Knoten mit Grad größer 4 aus mehreren Knoten vom Grad 4 zusammensetzen, für deren Anzahl an überdeckenden Geraden wir eine untere Schranke kennen.



(a) Knoten vom Grad 8, überdeckt von vier Geraden

(b) Vier Geraden schneiden sich in sechs Punkten

Abb. 3.6: Überdeckung von Knoten mit Grad größer 4

Lemma 3.4. Für Tausendfüßler mit n Knoten und Grad Δ gilt $\ell \in \Omega(\sqrt{n\Delta})$.

Beweis. Um einen Knoten vom Grad Δ zu überdecken, benötigt man $\Delta/2$ Geraden. Mit $\Delta/2$ Geraden können $\binom{\Delta/2}{2}$ Knoten mit Grad 4 überdeckt werden, sodass jeder auf dem Schnittpunkt von zwei Geraden liegt (siehe Abb. 3.6). Fasst man diese $\binom{\Delta/2}{2}$ Knoten zu einem zusammen, so wird dieser von $\Delta/2$ Geraden geschnitten. Um n Knoten vom Grad Δ zu überdecken, benötigt man mindestens $(\Delta/2)n$ Knoten, die auf den Schnittpunkten von je zwei Geraden liegen. Mit $\binom{\ell}{2}$ dieser Schnittpunkte auf ℓ Geraden, von denen je $\binom{\Delta/2}{2}$ Schnittpunkte zusammengefasst werden, können maximal k Knoten vom Grad Δ entstehen, d.h.

$$k < \frac{\binom{\ell}{2}}{\binom{\Delta/2}{2}}.$$

Aus $k < \binom{\ell}{2} / \binom{\Delta/2}{2} = \frac{\ell(\ell-1)}{\frac{\Delta}{2}(\frac{\Delta}{2}-1)} < \frac{\ell^2}{\frac{\Delta^2}{4} - \frac{\Delta}{2}}$ ergibt sich für die Anzahl an Geraden $\ell > \sqrt{((\Delta^2/4) - (\Delta/2))k}$.

Für die Anzahl der Geraden in Abhängigkeit der Rückgratknoten gilt somit

$$\begin{aligned} \ell'(n', \Delta) &> \sqrt{\left(\frac{\Delta^2}{4} - \frac{\Delta}{2}\right) n'} \\ &\in \Omega(\sqrt{n'\Delta}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mittels Gleichung 3.7 ergibt sich für die Zahl der benötigten Geraden in Abhängigkeit der Anzahl aller Knoten

$$\begin{aligned} \ell(n, \Delta) &\in \Omega\left(\sqrt{\frac{n-2}{\Delta-1}\Delta}\right) \\ &\in \Omega(\sqrt{n\Delta}). \end{aligned}$$

□

Im Folgenden zeigen wir, wie groß die Fläche ist, die eine Gitterzeichnung von Tausendfüßlern benötigt.

Lemma 3.5. *Jeder Tausendfüßler T mit n Knoten und Grad Δ lässt sich auf ein Gitter der Größe $\mathcal{O}(\sqrt{n\Delta}) \times \mathcal{O}(\sqrt{n\Delta})$ zeichnen.*

Beweis. Lässt man die Füße außer Acht, so hängt die Größe einer Gitterzeichnung nur von der Anzahl der Rückgratknoten n' ab. Da die Zeichnung quadratisch und im Inneren komplett gefüllt ist, entspricht die Seitenlänge $\lceil \sqrt{n'} \rceil$. Die Seitenlänge einer solchen Zeichnung in Abhängigkeit der Anzahl aller Knoten n ist somit $\lceil \sqrt{(n-2)/(\Delta-1)} \rceil$. Die Füße liegen dabei auf den überdeckenden Geraden um die Rückgratknoten, jedoch nicht auf Gitterpunkten. Eine solche Gitterzeichnung hat die Größe $\mathcal{O}(\sqrt{n/\Delta}) \times \mathcal{O}(\sqrt{n/\Delta})$.

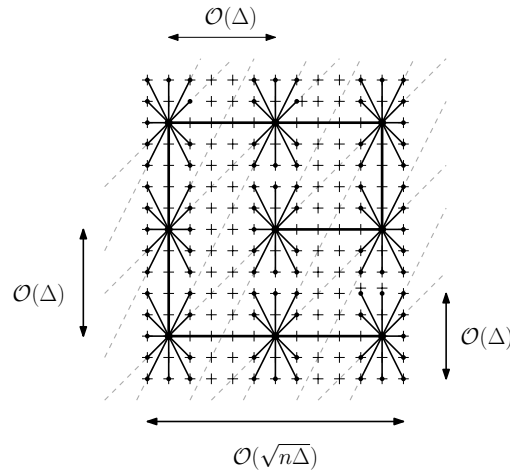


Abb. 3.7: Anordnung der Füße eines $T(9, 12)$ in kleinen Rechtecken um den zu ihnen benachbarten Rückgratknoten in einer Gitterzeichnung der Größe $\mathcal{O}(\sqrt{n\Delta}) \times \mathcal{O}(\sqrt{n\Delta})$.

Möchte man die Füße auch auf Gitterpunkte zeichnen, so benötigt man ein größeres Gitter. Dabei liegen die Füße auf kleinen Rechtecken um ihren benachbarten Rückgratknoten und werden von Geraden mit ganzzahligen Steigungen überdeckt. Die Größe dieser Rechtecke ist dabei linear vom Grad des Tausendfüßlers abhängig und beträgt $3 \times \mathcal{O}(\Delta)$ Gitterpunkte (vgl. Abb. 3.7). Diese Rechtecke müssen zueinander einen vertikalen Abstand von einer Einheit haben, damit sie nicht überlappen. Der vertikale Abstand zwischen den Rückgratknoten beträgt somit $\mathcal{O}(\Delta)$. Der horizontale Abstand zwischen Rückgratknoten muss ebenfalls $\mathcal{O}(\Delta)$ betragen, da die Geraden, die die Füße überdecken das Rückgrat sonst nicht in Rückgratknoten schneiden. Die gesamte Zeichnung hat somit eine Größe von $\mathcal{O}(\Delta\sqrt{n'}) \times \mathcal{O}(\Delta\sqrt{n'})$, bzw in Abhängigkeit der Anzahl aller Knoten $\mathcal{O}(\sqrt{n}\Delta) \times \mathcal{O}(\sqrt{n}\Delta)$. \square

Als Abschluss dieses Abschnitts geben wir noch eine Tabelle mit den exakten Werten der benötigten Geraden an.

Stufe	max. Anzahl Rückgratknoten	Geraden							
		$\Delta = 4$		$\Delta = 6$		$\Delta = 8$		$\Delta = 10$	
		Gl. 3.2 untere Schranke	Gl. 3.1 obere Schranke	Gl. 3.8 untere Schranke	Gl. 3.3 obere Schranke	Gl. 3.8 untere Schranke	Gl. 3.4 obere Schranke	Gl. 3.8 unter Schranke	Gl. 3.5 obere Schranke
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
2	4	3	4	5	7	7	10	9	14
3	9	5	6	8	11	11	16	14	23
4	16	6	8	10	15	14	22	18	32
5	25	8	10	13	19	18	28	23	41
6	36	9	12	15	23	21	34	27	50
7	49	10	14	18	27	25	40	32	59
8	64	12	16	20	31	28	46	36	68
9	81	13	18	23	35	32	52	41	77

Tab. 3.1: Übersicht über die exakte Anzahl der Geraden in Abhängigkeit des Grades und der Stufe. Dabei beziehen sich die oberen und unteren Schranken jeweils auf die dazu angegebene Gleichung.

3.3 Tausendfüßler mit anderen Grundformen

Im Zuge dieser Arbeit wurden auch Dreiecke anstelle von Quadraten als Grundform für die Tausendfüßler betrachtet. Die Konstruktion ist dabei ähnlich zu der Konstruktion der Quadrate in Abschnitt 3.1. Dabei betrachten wir wiederum nur Tausendfüßler vom Grad 4.

Wir beginnen mit drei Geraden, die sich in drei Punkten schneiden und dadurch ein Dreieck bilden. Das Rückgrat wird jedoch nur von zwei der drei Geraden überdeckt. Die

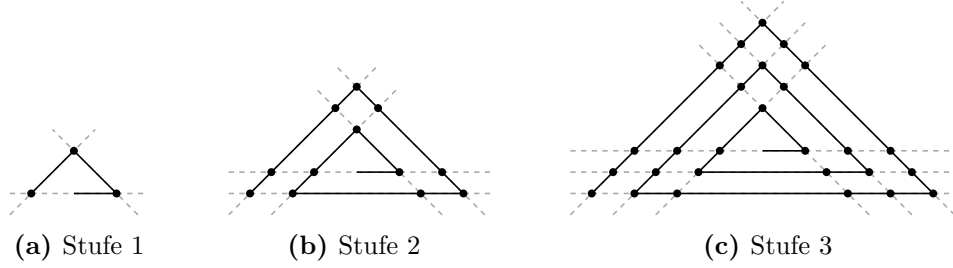


Abb. 3.8: Tausendfüßler mit (a) drei, (b) 12 und (c) 27 Knoten auf dem Rückgrat in der Form von Dreiecken

dritte Geraden überdeckt den zusätzlichen Fuß am inneren Ende des Tausendfüßlers (vgl. Abb. 3.8a). Pro Stufe wird dann auf jeder der drei Seiten des Dreiecks eine neue Gerade eingefügt, das Rückgrat entlang dieser Geraden verlängert und auf die Schnittpunkte der Geraden neue Knoten eingefügt (vgl. Abb. 3.8). Der Übersichtlichkeit wegen wurden die Füße hier weggelassen. Sie liegen jedoch genau wie bei den Quadraten auf den Geraden, die sich in einem Rückgratknoten schneiden. Die Anzahl der Rückgratknoten beträgt dabei

$$n'(i) = 3i^2,$$

da sich an den Ecken des Dreiecks kleine Rauten aus Rückgratknoten mit Seitenlänge i bilden (vgl. Abb. 3.8c). Die Anzahl der Geraden erhöht sich pro Stufe um 3, beträgt also

$$\ell^*(i) = 3i.$$

Für die Anzahl an Geraden in Abhängigkeit der Rückgratknoten ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \ell'(n', 4) &= 3 \left\lceil \sqrt{\frac{n'}{3}} \right\rceil \\ &= \lceil \sqrt{3n'} \rceil. \end{aligned}$$

Vergleichend ergibt sich für die Anzahl an benötigten Geraden für Tausendfüßler auf dreieckigem und quadratischem Grundgerüst $\ell'_\Delta(n') = \lceil \sqrt{3n'} \rceil$ und $\ell'_\square(n') = \lceil \sqrt{4n'} \rceil$.

Um Tausendfüßler zu überdecken, die einen höheren Grad haben, werden ebenfalls zusätzliche Geraden mit unterschiedlichen Steigungen eingefügt. Dabei liegt die Anzahl der neu eingefügten Geraden für jedes nächst größere gerade Δ in $\mathcal{O}(\sqrt{n'}\Delta)$. Die Anzahl aller Geraden liegt somit, genau wie zuvor bei den Quadraten in Kapitel 3.2 gesehen, in $\mathcal{O}(\sqrt{n'}\Delta^2)$.

Eine weitere Möglichkeit für die Form des Grundgerüst von Tausendfüßlern wäre ein Zickzack-Muster. Dabei könnten auf $\mathcal{O}(\sqrt{n'})$ Geraden je $\mathcal{O}(\sqrt{n'})$ Rückgratknoten platziert werden. Siehe dazu Abbildung 3.9. Rückgratknoten vom Grad 4 lassen sich dabei einfach durch das Einfügen waagrechter Geraden überdecken. Für die Anzahl der benötigten Geraden gilt also $\ell'(n', 4) = \lceil 2\sqrt{n'} \rceil$.

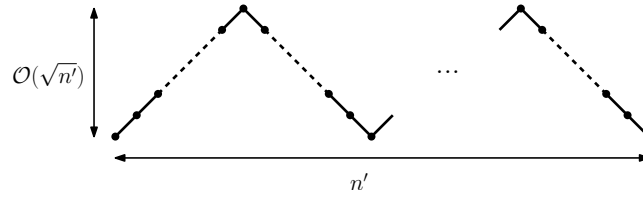


Abb. 3.9: Tausendfüßler mit je $\mathcal{O}(\sqrt{n'})$ Rückgratknoten auf $\mathcal{O}(\sqrt{n'})$ Geraden

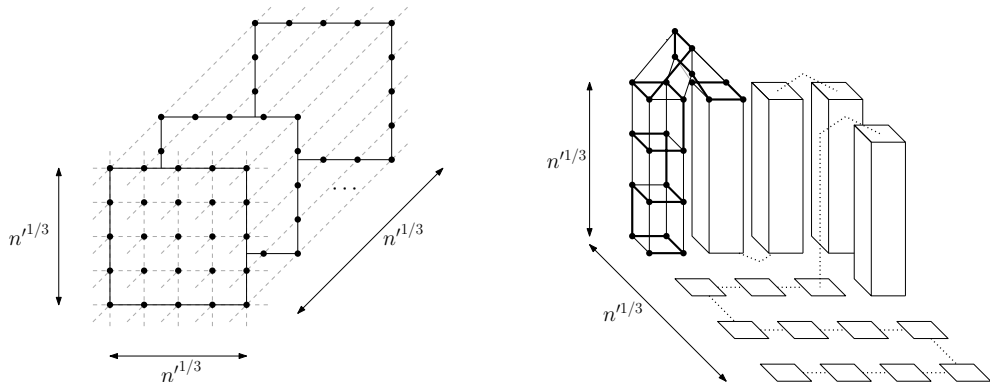
3.4 Tausendfüßler im Raum

Allgemein gilt für alle Graphen, dass die benötigten Geraden im Raum nicht mehr sein können als in der Ebene. Somit ist es also möglich, die obere Schranke noch zu verbessern. In Anlehnung an die Wahl von Quadraten als Grundstruktur in der Ebene, bietet sich im Raum die Form des Würfels an. Dieser Würfel hat ein Volumen von $\mathcal{O}(n')$, Seitenlänge $\mathcal{O}(n'^{1/3})$ und liegt in einem kartesischen Koordinatensystem. Um auch die Kanten des Rückgrats zu überdecken, die zwischen den einzelnen Ebenen verlaufen, liegt jeder der n' Rückgratknoten auf dem Schnittpunkt von drei Geraden, die jeweils parallel zu einer der drei Achsen verlaufen (vgl. Abb. 3.10a). Die Anzahl der Geraden, die benötigt werden, um eine Seite des Würfels senkrecht und waagrecht zu überdecken, entspricht $2 \lceil n'^{1/3} \rceil$. Um alle Schichten des Würfels mit Senkrechten und Waagrecht zu überdecken, benötigt man also $2 \lceil n'^{1/3} \rceil \cdot \lceil n'^{1/3} \rceil = 2 \lceil n'^{2/3} \rceil$ Geraden. Zuletzt müssen alle Rückgratknoten noch mit Geraden in Richtung der dritten Dimension überdeckt werden. Die Anzahl dieser beträgt $\lceil n'^{1/3} \rceil \cdot \lceil n'^{1/3} \rceil = \lceil n'^{2/3} \rceil$. Die Anzahl aller Geraden beträgt somit $2 \lceil n'^{2/3} \rceil + \lceil n'^{2/3} \rceil = 3 \lceil n'^{2/3} \rceil$. Da jeder Rückgratknote auf dem Schnittpunkt von drei Geraden liegt, können jeweils vier Füße mit überdeckt werden, ohne dass zusätzliche Geraden benötigt werden. Um mehr Füße überdecken zu können, werden (wie zuvor bei den quadratischen Tausendfüßlern) in jede der $\lceil n'^{1/3} \rceil$ Schichten des Würfels Diagonalen eingefügt. Da hierbei erst ab $\Delta = 8$ zusätzliche Geraden eingefügt werden und diese ebenfalls mit positiver und negativer Steigung verwendet werden, beträgt die Anzahl der zusätzlichen Geraden pro Schicht $\lfloor \Delta/4 \rfloor \lceil n'^{1/3} \rceil - (\lfloor \Delta/4 \rfloor - 1)$.

$$\begin{aligned}
\ell'(n', \Delta) &= 3 \left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil + \sum_{\substack{j=8 \\ j \text{ gerade}}}^{\Delta} \left(\left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor \left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil - \left(\left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor - 1 \right) \left\lceil n'^{\frac{1}{3}} \right\rceil \right) \\
&= 3 \left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil + \sum_{j=4}^{\frac{\Delta}{2}} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor \left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil - \sum_{j=4}^{\frac{\Delta}{2}} \left(\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor - 1 \right) \left\lceil n'^{\frac{1}{3}} \right\rceil \\
&= 3 \left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil + \left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil \sum_{j=4}^{\frac{\Delta}{2}} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor - \left\lceil n'^{\frac{1}{3}} \right\rceil \sum_{j=4}^{\frac{\Delta}{2}} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + \left\lceil n'^{\frac{1}{3}} \right\rceil \sum_{j=4}^{\frac{\Delta}{2}} 1 \\
&= 3 \left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil + \left(\left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil - \left\lceil n'^{\frac{1}{3}} \right\rceil \right) \sum_{j=4}^{\frac{\Delta}{2}} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + \left\lceil n'^{\frac{1}{3}} \right\rceil \left(\frac{\Delta}{2} - 4 + 1 \right) \\
&\leq 3 \left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil + \left(\left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil - \left\lceil n'^{\frac{1}{3}} \right\rceil \right) \sum_{j=4}^{\frac{\Delta}{2}} j + \left\lceil n'^{\frac{1}{3}} \right\rceil \left(\frac{\Delta}{2} - 3 \right) \\
&= 3 \left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil + \left(\left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil - \left\lceil n'^{\frac{1}{3}} \right\rceil \right) \left(\frac{\frac{\Delta}{2} \left(\frac{\Delta}{2} + 1 \right)}{2} - 6 \right) + \left\lceil n'^{\frac{1}{3}} \right\rceil \left(\frac{\Delta}{2} - 3 \right) \\
&= 3 \left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil + \left(\left\lceil n'^{\frac{2}{3}} \right\rceil - \left\lceil n'^{\frac{1}{3}} \right\rceil \right) \left(\frac{\Delta^2}{8} + \frac{\Delta}{4} - 6 \right) + \left\lceil n'^{\frac{1}{3}} \right\rceil \left(\frac{\Delta}{2} - 3 \right) \\
&\in \mathcal{O} \left(n'^{\frac{2}{3}} \right) + \mathcal{O} \left(n'^{\frac{2}{3}} \right) \cdot \mathcal{O} \left(\Delta^2 \right) + \mathcal{O} \left(n'^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \mathcal{O} \left(\Delta \right) \\
&\in \mathcal{O} \left(n'^{\frac{2}{3}} \Delta^2 \right)
\end{aligned}$$

Die Form des Würfels lässt also im Fall der Tausendfüßler keine Überdeckung mit weniger Geraden als in der Ebene zu. Dabei ist es egal, ob man das Rückgrat in jeder Schicht spiralförmig (vgl. Abb. 3.11a) aufwickelt oder in Mäanderform (vgl. Abb. 3.11b) durch die Ebene legt. Die Anzahl der benötigten Geraden verringert sich auch nicht, wenn man die Geraden, die Knoten mit Graden größer 4 überdecken, so legt, dass sie Rückgratknoten verschiedener Schichten schneiden.

Eine weitere mögliche Idee, Tausendfüßler im Raum mit weniger Geraden zu überdecken, bezieht sich auf einen Beweis von Chaplick et al. [CFL⁺de]. Dieser zeigt, dass es Graphen mit n Knoten gibt, bei denen in der Ebene in $\mathcal{O}(n)$ Geraden benötigt werden, die im Raum aber mit $\mathcal{O}(n^{2/3})$ Geraden überdeckt werden können. Ein Beispiel hierfür sind die Graphen, die aus geschachtelten Rechtecken bestehen (siehe Abbildung 3.11c). Diese können auf einer Fläche der Größe $\mathcal{O}(n^{1/3}) \times \mathcal{O}(n^{1/3})$ zu $\mathcal{O}(n^{1/3})$ hohen Türmen gestapelt werden, die abwechselnd am unteren bzw. am oberen Ende verbunden sind (ähnlich zu Abbildung 3.10b). Zur Überdeckung werden dabei $\mathcal{O}(n^{2/3})$ Geraden benötigt.



(a) Überdeckung eines dreidimensionalen Tausendfüßlers mit Grad 8 in Würfel-
form (b) ... (nach Chaplick et al. [CFL⁺de])

Abb. 3.10: Mögliche Konstruktionen dreidimensionaler Zeichnungen von Tausendfüßlern

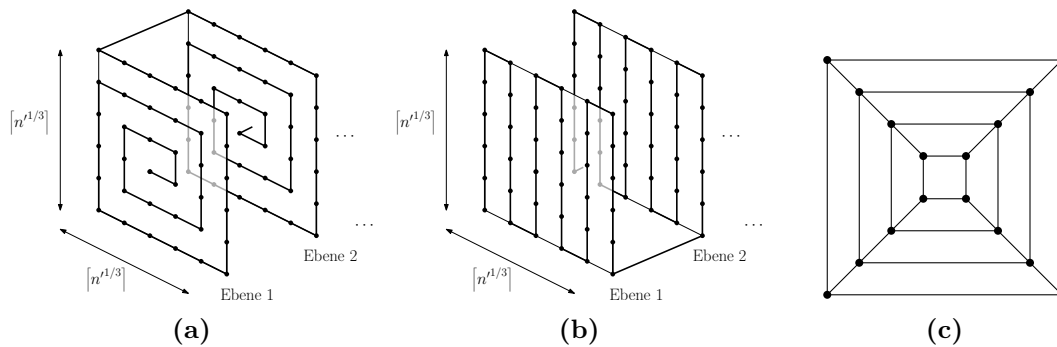


Abb. 3.11: (a) Spiralförmiges und (b) mäanderförmiges aufwickeln der Tausendfüßler in jeder Ebene des Würfels. (c) Zeichnung eines Graphen, der aus vier geschachtelten Rechtecken besteht.

Wendet man diese Technik auf die Tausendfüßler an, indem man sie um die $n^{1/3}$ hohen Türme wickelt, so benötigt man ebenfalls $\mathcal{O}(n^{2/3})$ Geraden für $\Delta = 6$ und insgesamt $\mathcal{O}(n^{2/3}\Delta^2)$ viele Geraden. Das Resultat der zweidimensionalen Zeichnungen liefert somit eine bessere Geradenüberdeckungszahl. Grund dafür scheint zu sein, dass Tausendfüßler zu wenig Kanten haben, um im Raum effizienter überdeckt werden zu können als in der Ebene.

Anmerkung. Dabei stellt sich die Frage, ob es eine allgemeingültige Bedingung dafür gibt, dass man Graphen oder bestimmte Graphenklassen, im Raum nicht mit weniger Geraden überdecken kann als in der Ebene. Spielt möglicherweise das Verhältnis der Anzahl der Kanten zur Anzahl der Knoten dabei eine Rolle oder lassen sich noch andere Klassen von Graphen finden, bei denen die Geradenüberdeckungszahl im Raum nicht geringer ist als in der Ebene?

3.5 Ausblick auf allgemeine Tausendfüßler

Im allgemeinen Fall haben die Rückgratknoten von Tausendfüßlern nicht alle denselben Grad. Man könnte allgemeine Tausendfüßler überdecken, indem man den in Kapitel 3.2 beschriebenen Algorithmus mit dem Maximalgrad des Tausendfüßlers anwendet. Hierbei werden jedoch einige Geraden keine oder nur wenige Kanten überdecken. Andernfalls könnte man den Algorithmus auch mit dem häufigsten Grad oder dem Durchschnitt aller Grade anwenden (Grad eins und zwei ausgenommen). Da die Geraden, die Knoten vom Grad größer 4 überdecken, das Rückgrat nicht nur in Gitterpunkten schneiden, könnten die bis dahin außer Acht gelassenen Knoten auf solchen Punkten platziert werden. Knoten ohne Füße können dabei vernachlässigt werden, da sie überall auf dem Rückgrat platziert werden können.

Wir konnten jedoch leider keine Methode finden, um allgemeine Tausendfüßler effizient zu überdecken. Es stellt sich jedoch die Frage, ob es NP-schwer ist, eine optimale Überdeckung für allgemeine Tausendfüßler zu finden.

4 Fazit und Ausblick

Wir haben gezeigt, dass man einen Dodekaeder in der Ebene optimal mit zehn Geraden überdecken kann. Kombiniert man jedoch Geraden und Kreisbögen, benötigt man insgesamt weniger Objekte, um alle Kanten zu überdecken. Eine interessante Frage dabei ist, wie weit man die gemeinsame Nutzung verschiedener Objekte, wie beispielsweise Geraden und Kreisbögen, zur Überdeckung von Graphen optimieren kann und ob eine gemeinsame Nutzung für alle Graphen eine Überdeckung mit weniger Objekten erlaubt.

Im zweiten Teil der Arbeit haben wir gezeigt, dass sich Tausendfüßler mit n Knoten und Grad Δ mit $\mathcal{O}(\sqrt{n}\Delta^{3/2})$ vielen Geraden auf einem Gitter der Größe $\mathcal{O}(\sqrt{n}\Delta) \times \mathcal{O}(\sqrt{n}\Delta)$ überdecken lassen. Im Raum konnten wir allerdings keine Verbesserungen erzielen. Wir haben aber festgestellt, dass sich manche planaren Graphen im Raum mit weniger Geraden überdecken lassen als in der Ebene. Das wirft die Frage auf, ob es eine für planare Graphen allgemeingültige Bedingung dafür gibt, dass sie sich im Raum nicht mit weniger Geraden überdecken lassen als in der Ebene. Wie am Beispiel des Dodekaeders zu sehen war, brauchen Graphen eine gewisse Größe, bzw. Beweglichkeit. Doch das alleine scheint nicht auszureichen, da beispielsweise Tausendfüßler beliebig groß werden können und auch sehr beweglich in ihrer Struktur sind, wir aber trotzdem im Raum keine Überdeckung mit weniger Geraden finden konnten als in der Ebene.

Die Klärung der oben genannten, offenen Fragen kann als Grundlage weiterführender Forschung dienen und neue, interessante Resultate beinhalten.

Literaturverzeichnis

- [CFL⁺de] S. Chaplick, K. Fleszar, F. Lipp, A. Ravsky, O. Verbitsky und A. Wolff: Drawing Graphs on Few Lines and Few Planes. In: *Graph Drawing and Network Visualization*, Band 9801 der Reihe LNCS. Springer Verlag, erscheint in Bände. <http://arxiv.org/abs/1607.01196>.
- [DEL11] W. Didimo, P. Eades und G. Liotta: Drawing graphs with right angle crossings. *Theoretical Computer Science*, 412:5156–5166, 2011. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-03367-4_19.
- [DESW07] V. Dujmovic, D. Eppstein, M. Suderman und D. Wood: Drawings of Planar Graphs with Few Slopes and Segments. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 38:194–212, 2007. <https://arxiv.org/abs/math/0606450>.
- [DETT98] G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia und I. Tollis: *Graph Drawing: Algorithms for the Visualization of Graphs*. Prentice Hall PTR, 1. Auflage, 1998.
- [dFPP90] H. de Fraysseix, J. Pach und R. Pollack: How to draw a planar graph on a grid. *Combinatorica*, 10(1):41–51, 1990. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02122694>.
- [DL13] W. Didimo und G. Liotta: The Crossing-Angle Resolution in Graph Drawing. In: J. Pach (Herausgeber): *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Seiten 167–184. Springer Verlag, 2013. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-0110-0_10.
- [Fár48] I. Fáy: On straight line representation of planar graphs. *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math.*, 11:229–233, 1948.
- [HT74] J. Hopcroft und R. Tarjan: Efficient Planarity Testing. *J. ACM*, 21(4):549–568, 1974. <http://dx.doi.org/10.1145/321850.321852>.
- [Sch90] W. Schnyder: Embedding Planar Graphs on the Grid. In: *Proceedings of the First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA '90*, Seiten 138–148. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=320176.320191>.
- [Sch13] A. Schulz: Drawing Graphs with Few Arcs. *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, 8165:406–417, 2013. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-45043-3_35.

- [Ste51] S. Stein: Convex Maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2(3):464–466, 1951. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1978-0503546-9>.
- [Wag36] K. Wagner: Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 46:26–32, 1936. <http://eudml.org/doc/146109>.
- [WPCM02] C. Ware, H. Purchase, L. Colpoys und M. McGill: Cognitive measurements of graph aesthetics. *Information Visualisation*, 1(2):103–110, 2002. <http://dx.doi.org/10.1057/palgrave.ivs.9500013>.

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Abschlussarbeit selbstständig verfasst zu haben, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben und die Arbeit bisher oder gleichzeitig keiner anderen Prüfungsbehörde unter Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt zu haben.

Würzburg, den 24. Oktober 2016

.....
Ursula Scherm