Katja Jucht

Klassen von Dreier-Partitionen

Diplomarbeit

WS 1995/96

Betreuer: Prof. Dr. Klaus W. Wagner

Universität Würzburg • Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Inhaltsverzeichnis

1

Einleitung

Das Thema dieser Diplomarbeit gehört in den Bereich der Komplexitätstheorie in der Theoretischen Informatik. Die Komplexitätstheorie entstand aus dem Bemühen, Algorithmen zu bestimmten Problemen, unabhängig von dem verwendeten Rechner, eine Qualität bezüglich verschiedener Aspekte zuzuordnen, wie zum Beispiel den Platz- oder Zeitbedarf eines Algorithmus.

Um einen Algorithmus formulieren zu können, wurden verschiedene Berechenbarkeitsmodelle definiert, von denen die Turingmaschine die für die Komplexitätstheorie größte Bedeutung erreicht hat. Um den Begriff eines algorithmischen Problems verdeutlichen zu können, benötigen wir einige formale Definitionen:

Im folgenden wird mit Σ ein endliches Alphabet, also eine endliche Menge von Buchstaben, bezeichnet. Σ^* ist dann die Menge aller Wörter über dem Alphabet Σ, und eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ nennen wir eine Sprache über dem Alphabet Σ. Ein Problem wird beschrieben durch die Frage, ob ein gegebenes Eingabewort in einer Sprache enthalten ist oder nicht. Das Beantworten dieser Frage mit Ja oder Nein (1 oder 0) nennt man „eine Sprache entscheiden".

Eine Komplexitätsklasse enthält alle Sprachen, die sich in Abhängigkeit von der Länge des Eingabewortes innerhalb einer bestimmten Komplexitätsschranke entscheiden lassen. Eine der wichtigsten Komplexitätsklassen bildet die Klasse P, die alle Sprachen enthält, die sich von einer deterministischen Turingmaschine in polynomieller Zeit entscheiden lassen. Diese Sprachen werden als „leicht" entscheidbar angesehen. Eine andere, auch für diese Arbeit sehr wichtige Komplexitätsklasse ist die Klasse NP, die genauso definiert ist wie P, nur daß als Maschinenmodell eine nichtdeterministische Turingmaschine zugrundegelegt wird. Es gilt zwar offensichtlich, daß P $\subseteq$ NP, da eine deterministische Turingmaschine einen Spezialfall einer nichtdeterministischen Turingmaschine darstellt. Die Frage nach der Ungleichheit der beiden Klassen stellt aber eines der wichtigsten ungelösten Probleme der Theoretischen Informatik dar.

Zu jeder Komplexitätsklasse $\mathcal{K}$ gibt es die komplementäre Komplexitätsklasse co-$\mathcal{K}$, die die Komplemente aller Sprachen aus $\mathcal{K}$ enthält. Wir definieren also für alle Sprachen $X \subseteq \Sigma^*$ das Komplement $\overline{X} =_{\text{def}} \Sigma^* \backslash X$, und für eine Klasse $\mathcal{K}$ von Sprachen die Komplementklasse co-$\mathcal{K} =_{\text{def}} \{\overline{X} | X \in \mathcal{K}\}$. Auch hier ist es bisher offen, ob NP = co-NP gilt oder nicht, das heißt, ob die Klasse der NP-Sprachen abgeschlossen ist bezüglich Komplementbildung.

Die charakteristische Funktion einer Menge $A \subseteq \Sigma^*$ ist definiert als 1 für alle $x \in \Sigma^*$ mit $x \in A$ und 0 sonst. Unter anderem beschäftigen sich die Arbeiten [CGH$^+$88] und [CGH$^+$89] mit der Frage, welche Klassen bei der Anwendung von booleschen Funktionen der Form $f\colon \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ auf die charakteristische Funktion von beliebigen Sprachen aus NP entstehen. Man untersucht dadurch entstandene Klassen von Sprachen und ordnet diese in eine Hierarchie ein, die sogenannte Boolesche Hierarchie. In der Arbeit [WW85] wird eine Methode vorgestellt, mit deren Hilfe man für eine gegebene boolesche Funktion berechnen kann, welcher Stufe der Booleschen Hierarchie ihre Anwendung auf Sprachen aus NP entspricht. Mit der Definition der Booleschen Hierarchie und den Ergebnissen aus [WW85] werden wir uns im zweiten Kapitel näher befassen.

Im dritten Kapitel werden wir die Ergebnisse aus dem zweiten Kapitel genauer analysieren, so daß sie sich für die weiteren Untersuchungen verwenden lassen. Dazu beschäftigen wir uns mit Graphen von Funktionen der Form $f\colon \{0,1\}^m \to \{0,1\}$. Wir zeigen verschiedene Eigenschaften dieser Graphen, vor allem in Bezug auf die Sprachklassen, die entstehen können, wenn wir die Knoten mit NP-Mengen belegen. Diese Ergebnisse bilden die Grundlage für die weiteren Kapitel.

In der klassischen Komplexitätstheorie werden nur Zweier-Partitionen des Raumes Σ^*, d.h. die Zerlegung von Σ^* in Sprachen A und $\overline{A}$, betrachtet. Man betrachtet Algorithmen, die für ein gegebenes Eingabewort $x \in \Sigma^*$ entscheiden, ob es in der Sprache A enthalten ist oder eben nicht. Ein interessantes Forschungsgebiet ist aber auch die Unterteilung von Σ^* in k-Partitionen $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, wobei $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_i A_i = \Sigma^*$. In diesem Fall soll für eine gegebene Eingabe $x \in \Sigma^*$ entschieden werden, in welcher der Sprachen A_i sie enthalten ist. Probleme dieser Art bilden die Grundlage dieser Arbeit. Im vierten Kapitel werden wir Definitionen zur Betrachtung von Partitionen und Klassen von Partitionen bereitstellen und einige Eigenschaften der Definitionen untersuchen.

Im Hauptteil der Arbeit wird untersucht, welche Klassen von Partitionen entstehen, wenn man Funktionen der Form $f\colon \{1, \ldots, l\}^m \to \{1, \ldots, k\}$ anwendet auf die charakteristischen Funktionen von l-Partitionen, die einer noch zu bestimmenden Grundklasse angehören. Es wird also der gleiche Ansatz wie bei der Entstehung der Booleschen Hierarchie verwendet. Wir werden aber sehen, daß die entstehenden Klassen keine einfache Struktur wie die Boolesche Hierarchie bilden. Wegen der großen Schwierigkeit dieses Gebietes werden wir uns dabei auf den Fall der Dreier-Partitionen, also den der dreiwertigen Funktionen, beschränken. Im fünften Kapitel werden Klassen von Dreier-Partitionen untersucht, die durch Anwendung von dreiwertigen Funktionen auf die charakteristischen Funktionen von NP-Mengen entstehen. Im sechsten Kapitel werden dann in einem neuen Ansatz bereits Dreier-Partitionsklassen als Grundklassen verwendet. Wir werden sehen, daß durch die Eigenschaften der Dreier-Partitionen der Ansatz stark vereinfacht wird, daß aber die Ergebnisse dieser Untersuchung aber von sehr komplexer Natur sind.

2

Die Boolesche Hierarchie

Wir werden uns in diesem Kapitel mit der bereits untersuchten Anwendung von booleschen Funktionen auf Zweier-Partitionen beschäftigen, um dann in den weiteren Kapiteln die gewonnenen Erkenntnisse auf größere Partitionen zu verallgemeinern. Im nun folgenden Kapitel werden vor allem die Ergebnisse aus [WW85] vorgestellt, in denen zunächst die Boolesche Hierarchie als Abschluß von NP unter Vereinigung, Durchschnitt und Komplementbildung definiert wurde. Außerdem wurde gezeigt, daß jede Klasse, die durch Anwendung einer booleschen Funktion auf NP entsteht, einer Stufe der Booleschen Hierarchie entspricht, die sich sogar eindeutig bestimmen läßt. Die Technik des Einordnens dieser Klassen in die Boolesche Hierarchie ist ein Ergebnis, das auch für die hier vorliegende Arbeit von großer Bedeutung ist. Zuletzt werden wir die Darstellung von booleschen Funktionen durch Graphen genauer betrachten.

Die folgende Definition beschreibt, wie die Anwendung von booleschen Funktionen auf Sprachen und Sprachklassen verstanden werden soll.

Definition 2.1 *1. Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann ist*

$$c_A(x) =_{\mathrm{def}} \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in A \\ 0 & \textit{falls } x \notin A \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von A.

2. Sei $f\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ eine boolesche Funktion. Seien $B_1, \ldots, B_k, A$ Sprachen. Dann ist $A = f(B_1, \ldots, B_k)$ genau dann, wenn $c_A(x) = f(c_{B_1}(x), \ldots, c_{B_k}(x))$.

3. Sei $f\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ eine boolesche Funktion. Seien $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_k$ Sprachklassen. Dann ist

$$f(\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_k) =_{\mathrm{def}} \{f(B_1, \ldots, B_k)\colon B_1 \in \mathcal{K}_1, \ldots, B_k \in \mathcal{K}_k\}$$

4. Sei $f\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ *eine boolesche Funktion. Dann ist*

$$f(\mathcal{K}) =_{\mathrm{def}} f(\underbrace{\mathcal{K},\ldots,\mathcal{K}}_{k\text{-}mal})$$

Zur Einführung der Booleschen Hierarchie wird folgende Definition benötigt:

Definition 2.2 *Seien* $\mathcal{K}_i$ *Sprachklassen für* $i \geq 1$. *Dann ist*

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2 & =_{\mathrm{def}} & \{B_1 \cap B_2\colon\ B_1 \in \mathcal{K}_1 \textit{ und } B_2 \in \mathcal{K}_2\} \\
\mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2 & =_{\mathrm{def}} & \{B_1 \cup B_2\colon\ B_1 \in \mathcal{K}_1 \textit{ und } B_2 \in \mathcal{K}_2\} \\
\text{co-}\mathcal{K} & =_{\mathrm{def}} & \{\overline{B}\colon\ B \in \mathcal{K}\} \\
\bigvee_{i=1}^{k} \mathcal{K}_i & =_{\mathrm{def}} & (\bigvee_{i=1}^{k-1} \mathcal{K}_i) \vee \mathcal{K}_k \textit{ für } k > 1 \\
\bigwedge_{i=1}^{k} \mathcal{K}_i & =_{\mathrm{def}} & (\bigwedge_{i=1}^{k-1} \mathcal{K}_i) \wedge \mathcal{K}_k \textit{ für } k > 1
\end{array}$$

Betrachten wir die obigen Verknüpfungen über NP, so gelten die folgenden Abschlußeigenschaften, die sich durch Konstruktion geeigneter Turingmaschinen leicht beweisen lassen.

Lemma 2.3 *1.* $\mathrm{NP} \wedge \mathrm{NP} = \mathrm{NP} \vee \mathrm{NP} = \mathrm{NP}$.

2. $\text{co-NP} \wedge \text{co-NP} = \text{co-NP} \vee \text{co-NP} = \text{co-NP}$.

In der nun folgenden Definition werden alle Klassen der Booleschen Hierarchie beschrieben.

Definition 2.4 *Die Stufen der Booleschen Hierarchie sind definiert als*

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{C}_0 = \mathrm{D}_0 = \mathrm{P} & \\
\mathrm{C}_n = \mathrm{D}_{n-1} \wedge \text{co-NP} & \textit{für } n > 0 \\
\mathrm{D}_n = \mathrm{C}_{n-1} \vee \mathrm{NP} & \textit{für } n > 0
\end{array}$$

Die Klasse „Boolesche Hierarchie" ist definiert als Vereinigung aller Stufen, also

$$\mathrm{BH} =_{\mathrm{def}} \bigcup_{i \geq 0} (C_i \cup D_i)$$

Da sowohl $\emptyset$ als auch Σ^* in NP enthalten sind, und damit auch in co-NP, gelten die folgenden Eigenschaften, die den Begriff der Hierarchie charakterisieren:

Lemma 2.5

- $\mathrm{C}_n \subseteq \mathrm{C}_{n+1}$ *und* $\mathrm{C}_n \subseteq \mathrm{D}_{n+1}$.
- $\mathrm{D}_n \subseteq \mathrm{C}_{n+1}$ *und* $\mathrm{D}_n \subseteq \mathrm{D}_{n+1}$.

Die Echtheit dieser Inklusionen konnte bisher aber nicht nachgewiesen werden.

Die Klasse BC(NP) bezeichnet den Abschluß von NP unter Anwendung von booleschen Funktionen wie in der Definition 2.1.4 beschrieben, also die Vereinigung aller Klassen $f(\mathrm{NP})$, die durch Funktionen $f\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ entstanden sind. Aufgrund der Möglichkeit, alle booleschen Funktionen in konjunktiver bzw. disjunktiver Normalform darstellen zu können, ist leicht einzusehen, daß die Boolesche Hierarchie alle möglichen Klassen der Form $f(\mathrm{NP})$ enthält, daß also $\mathrm{BC(NP)} = \mathrm{BH}$ gilt.

Zur Veranschaulichung sind die ersten Stufen der Booleschen Hierarchie in der folgenden Abbildung aufgezeichnet.

Um für jede boolesche Funktion f die Klasse $f(\mathrm{NP})$ einer bestimmten Stufe der Booleschen Hierarchie zuordnen zu können, wurde in [WW85] die sogenannte „mind change"-Technik eingeführt, die auch in den folgenden Kapiteln häufig verwendet wird. Daher wollen wir diese Technik hier vorstellen. Zunächst einige Definitionen:

Definition 2.6 *1. Seien* $a = (a_1, \ldots, a_k), b = (b_1, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^k$. *Dann ist* $(a_1, \ldots, a_k) \leq (b_1, \ldots, b_k) \Longleftrightarrow_{\text{def}} a_i \leq b_i$, *für alle* $i = 1, \ldots, k$.

2. *Sei* $f\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ *eine boolesche Funktion. Man sagt* f *hat einen „mind change" von* a *zu* $b \Longleftrightarrow_{\text{def}} a \leq b$ *und* $f(a) \neq f(b)$.

3. $$\begin{aligned} m(f) &=_{\text{def}} \text{ die maximale Anzahl von „mind changes" von } f \\ &= \max\{m\colon \exists a_0, a_1, \ldots, a_m \in \{0,1\}^k \text{ mit } a_{i-1} \leq a_i \text{ und} \\ &\qquad f(a_{i-1}) \neq f(a_i) \text{ für } i = 1, \ldots, m\}. \end{aligned}$$

4. *Mit* $c(f)$ *bezeichnen wir die längste 0-1-Kette von „mind changes" von* f, *also* $c(f) =_{\text{def}} f(a_0)f(a_1)\ldots f(a_{m(f)})$ *wobei* $a_{i-1} \leq a_i$ *und* $f(a_{i-1}) \neq f(a_i)$ *für* $i = 1, \ldots, m(f)$

Wegen der allgemeineren Schreibweise identifizieren wir im folgenden den Funktionswert 0 mit $-$ und den Funktionswert 1 mit $+$. Es gilt der folgende Satz:

Satz 2.7 *[WW85] Für jede boolesche Funktion* $f\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ *gilt*

$$f(\mathrm{NP}) = \begin{cases} C_{m(f)} & \text{, falls } c(f) \text{ mit } - \text{ endet} \\ D_{m(f)} & \text{, falls } c(f) \text{ mit } + \text{ endet} \end{cases}$$

Da für $i < j$ sowohl D_i als auch C_i in D_j und C_j enthalten sind, ergibt sich sofort die

Folgerung 2.8 *Sei* $f\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ *eine boolesche Funktion und* $s \geq 1$. *Dann gilt*

1. *Enthält* $c(f)$ *die Folge* $\underbrace{\ldots + - + -}_{s+1}$, *so gilt* $f(\mathrm{NP}) \supseteq \mathrm{C}_s$.

2. *Enthält* $c(f)$ *die Folge* $\underbrace{\ldots - + - +}_{s+1}$, *so gilt* $f(\mathrm{NP}) \supseteq \mathrm{D}_s$.

Der Satz 2.7 liefert einen Algorithmus, mit dem für eine beliebige k-stellige boolesche Funktion f entschieden werden kann, welcher Stufe der Booleschen Hierarchie $f(\mathrm{NP})$ entspricht. Dazu zeichnet man zunächst einen Graphen zu dieser Funktion, der als Knoten die verschiedenen Belegungen der Variablen besitzt, also alle möglichen Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$. Eine Kante existiert zwischen zwei Knoten des Graphen, wenn sie sich nur durch die Belegung einer Stelle unterscheiden, das heißt eine Kante verbindet zwei Knoten, die direkte Nachbarn bezüglich der $\leq$-Beziehung sind.

Dabei entsteht ein k-dimensionaler Würfel. Dann markiert man alle Knoten mit einem $+$, für die die Funktion den Wert 1 annimmt, und alle Knoten mit einem $-$, für die die Funktion den Wert 0 annimmt. Nun untersucht man die Pfade durch diesen Graphen. Die Pfade müssen in dem Knoten $(0, \ldots, 0)$ beginnen, da diese Belegung kleiner als alle anderen Belegungen ist, und in der größten aller Belegungen, nämlich dem Knoten $(1, \ldots, 1)$, enden. Der Pfad geht immer entlang der Kanten von „kleineren“ Knoten zu „größeren“ Knoten, das heißt die $\leq$-Beziehung bleibt gewahrt. Aus allen diesen möglichen Pfaden wählt man einen Pfad aus, der eine maximale Anzahl von Wechseln zwischen $+$ und $-$ aufweisen kann. Hat man nun so einen Pfad gefunden, so entspricht dieser Pfad dem $c(f)$ aus der obigen Definition, wenn man nebeneinanderliegende gleiche Zeichen $+$ und $-$ identifiziert. Man kann nun den Satz 2.7 anwenden und die Klasse $f(\mathrm{NP})$ bestimmen.

Beispiel. Es sei f eine boolesche Funktion, $f\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, definiert durch die Wertetabelle:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Wir zeichnen jetzt den Graphen dieser Funktion auf.

Gemäß der oben vorgestellten Technik suchen wir einen Pfad ausgehend von dem Knoten 000 bis hin zum Knoten 111 mit maximaler Anzahl von Wechseln zwischen $+$ und $-$, wobei $+$ gleichbedeutend ist mit dem Funktionswert 1 und $-$ mit dem Funktionswert 0. Wir finden drei Pfade mit maximalem Wechsel zwischen $+$ und $-$, nämlich $--+-$, $-+--$ und $-++-$. In jedem Pfad findet zunächst ein Wechsel von $-$ nach $+$ statt und dann wieder zurück, und jeder Pfad endet mit $-$. Wenden wir jetzt die obengenannte Technik an, so sehen wir, daß $c(f)$ mit $-$ endet und $m(f) = 2$. Damit erhalten wir nach Satz 2.7 $f(\mathrm{NP}) = C_2$.

3

Funktionsgraphen

Wir werden in diesem Kapitel die Funktionsgraphen aus dem vorigen Kapitel noch genauer betrachten, um einige Eigenschaften zu beweisen, die in den folgenden Kapiteln immer wieder verwendet werden. Wir gehen dabei davon aus, daß wir bestimmte Teile des Funktionsgraphen bereits kennen, bzw. daß wir von bestimmten Teilen wissen, daß sie nicht im Funktionsgraphen vorkommen, und ziehen daraus Folgerungen für die entstehenden Klassen $f(\mathrm{NP})$. Desweiteren werden wir eine neue Betrachtungsweise der Funktionsgraphen kennenlernen und auf diese Weise feststellen, wie die Sprachen aus NP in die Klasse $f(\mathrm{NP})$ eingehen. Wir werden diese Betrachtungsweise verwenden, um vorgegebene Sprachen so in den Funktionsgraphen einzubauen, daß diese Sprachen in $f(\mathrm{NP})$ enthalten sind.

3.1 Eigenschaften von Funktionsgraphen

Wir werden nun einige Eigenschaften von Funktionsgraphen beweisen unter der Annahme, daß die Boolesche Hierarchie nicht zusammenbricht, also vor allem, daß die Klassen NP und co-NP unvergleichbar sind, das heißt, daß es keine Inklusion oder Gleichheit zwischen den beiden Klassen gibt. Wir betrachten dabei alle Funktionsgraphen von Funktionen $f\colon \{0,1\}^m \to \{0,1\}$, wobei wir Aussagen über die Klassen $f(\mathrm{NP})$ treffen wollen. Wir zeigen zunächst einige Eigenschaften von Funktionsgraphen, die einen bestimmten Teilgraphen nicht enthalten:

Lemma 3.1 *Unter der Voraussetzung* $\mathrm{NP} \neq \text{co-NP}$ *gilt für jede boolesche Funktion* f*:*

1. *Es kommt* $\begin{smallmatrix}\bullet^{-}\\ |\\ \bullet_{+}\end{smallmatrix}$ *im Funktionsgraphen von* f *nicht vor genau dann, wenn* $f(\mathrm{NP}) \subseteq \mathrm{NP}$.

2. *Es kommt* $\begin{smallmatrix}+\\-\end{smallmatrix}$ *im Funktionsgraphen von* f *nicht vor genau dann, wenn* $f(\mathrm{NP}) \subseteq$ co-NP.

Beweis. Wir zeigen Teil 1 des Lemmas:

- $\Leftarrow$ Angenommen, $\begin{smallmatrix}-\\+\end{smallmatrix}$ kommt im Funktionsgraphen vor. Dann gibt es einen Pfad, der $+-$ enthält. Nach Folgerung 2.8 gilt dann co-NP $\subseteq f(\mathrm{NP}) \subseteq$ NP. Dies widerspricht unserer Annahme der Unvergleichbarkeit der beiden Klassen.
- $\Rightarrow$ Es gilt wegen der Voraussetzung, daß kein Pfad von einem $+$ wieder in ein $-$ wechseln kann. Das heißt also, der längste Pfad im Graphen ist entweder vom Typ $+$ oder $-+$. Damit gilt $f(\mathrm{NP}) \subseteq$ NP.

Teil 2 des Lemmas läßt sich völlig analog zeigen. Man muß nur im Beweis $+$ und $-$ vertauschen. $\square$

Desweiteren gelten noch die beiden folgenden Eigenschaften für die zweite Stufe der Hierarchie:

Lemma 3.2 *Unter der Voraussetzung* NP $\vee$ co-NP $\neq$ NP $\wedge$ co-NP *gilt für jede boolesche Funktion* f*:*

1. *Es kommt* $\begin{smallmatrix}-\\+\\-\end{smallmatrix}$ *im Funktionsgraphen von* f *nicht vor genau dann, wenn* $f(\mathrm{NP}) \subseteq$ NP $\vee$ co-NP.
2. *Es kommt* $\begin{smallmatrix}+\\-\\+\end{smallmatrix}$ *im Funktionsgraphen von* f *nicht vor genau dann, wenn* $f(\mathrm{NP}) \subseteq$ NP $\wedge$ co-NP.

Beweis. Zunächst werden wir den ersten Teil des Lemmas zeigen:

- $\Leftarrow$ Angenommen, $\begin{smallmatrix}-\\+\\-\end{smallmatrix}$ ist in dem Funktionsgraphen vorhanden. Dann gibt es in einem Pfad ein Teilstück $-+-$. Nach Folgerung 2.8 gilt dann NP $\wedge$ co-NP $\subseteq f(\mathrm{NP}) \subseteq$ NP $\vee$ co-NP. Das widerspricht der Annahme der Unvergleichbarkeit der beiden Klassen.
- $\Rightarrow$ Aufgrund der Voraussetzung gilt, daß $-+-$ nicht ein Teil irgendeines Pfades in dem Funktionsgraphen sein kann. Damit kommen aber nur noch folgende Typen von Pfaden in Frage:

- $-$ oder $+$
- $-+$ oder $+-$
- $+-+$

In jedem längeren Pfad ist $-+-$ ein Teilstück. Für alle oben angegebenen Pfade gilt allerdings $f(\mathrm{NP}) \subseteq \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}$, und damit die Behauptung.

Auch hier läßt sich für den zweiten Teil der gleiche Beweis verwenden, wenn man $+$ und $-$ vertauscht. $\square$

Solche Aussagen lassen sich analog auch für höhere Stufen fortsetzen, da sie aber völlig analog funktionieren, wollen wir hier auf eine Ausformulierung verzichten.

Die folgenden Lemmata betrachten Funktionsgraphen auf eine andere Weise. Sie untersuchen nämlich, was sich folgern läßt, wenn man einen Teil des Graphen kennt. Diese Aussagen sind direkte Folgerungen der Aussage 2.8, weswegen wir auf Beweise verzichten können. Sie wurden nur, des besseren Verständnisses der folgenden Kapitel wegen, noch einmal für die benötigten Spezialfälle aufgeführt.

Lemma 3.3 *Sei $f\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Sei* $\begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ *ein Teil des Funktionsgraphen von f, dann gilt* $\text{co-NP} \subseteq f(\mathrm{NP})$.
2. *Sei* $\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$ *ein Teil des Funktionsgraphen von f, dann gilt* $\mathrm{NP} \subseteq f(\mathrm{NP})$.

Dasselbe für die zweite Stufe der Booleschen Hierarchie:

Lemma 3.4 *Sei $f\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Sei* $\begin{smallmatrix} + \\ - \\ + \end{smallmatrix}$ *im Funktionsgraphen enthalten, dann gilt* $\mathrm{NP} \vee \text{co-NP} \subseteq f(\mathrm{NP})$.
2. *Sei* $\begin{smallmatrix} - \\ + \\ - \end{smallmatrix}$ *im Funktionsgraphen enthalten, dann gilt* $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP} \subseteq f(\mathrm{NP})$.

Auch hier gelten analoge Eigenschaften auf höheren Stufen der Booleschen Hierarchie. Wir wollen aber auf eine Ausformulierung verzichten, da diese völlig analog zu den bisher gezeigten Fällen verläuft.

3.2 Graphen von NP-Sprachen

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir uns eine andere Betrachtungsweise der Funktionsgraphen anschauen, durch die das Eingehen der NP-Sprachen in die Klasse $f(\mathrm{NP})$ besser verdeutlicht werden kann. Dazu werden wir die Definition von $f(\mathrm{NP})$ so umschreiben, daß die NP-Sprachen im Vordergrund stehen, auf die die Funktion angewendet wird. Dazu benötigen wir zunächst die Disjunktive Normalform (DNF) einer booleschen Funktion, wie sie im folgenden Satz beschrieben wird:

Satz 3.5 *Sei $f\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ eine boolesche Funktion. Dann ist*

$$f(x_1,\dots,x_k) = \bigvee_{f(a_1,\dots,a_k)=1} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}$$

mit $x^0 =_{\mathrm{def}} \bar{x}$ und $x^1 =_{\mathrm{def}} x$ für $x \in \{0,1\}$, wobei $\bar{0} = 1$ und $\bar{1} = 0$.

Analog zu x^a definieren wir für $B \subseteq \Sigma^*$ die Mengen $B^0 =_{\mathrm{def}} \overline{B}$ und $B^1 =_{\mathrm{def}} B$.

Wir verwenden die KNF, um die Definition von $f(\mathrm{NP})$ äquivalent umzuformen:

$$
\begin{aligned}
A \in f(\mathrm{NP}) \quad & \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists B_1,\dots,B_k \in \mathrm{NP} \text{ mit } \forall z \in \Sigma^* \Big(c_A(z) = f(c_{B_1}(z),\dots,c_{B_k}(z))\Big) \\
& \overset{\mathrm{DNF}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists B_1,\dots,B_k \in \mathrm{NP} \text{ mit} \\
& \qquad\qquad \forall z \in \Sigma^* \Big(c_A(z) = \bigvee_{f(a_1,\dots,a_k)=1} c_{B_1}(z)^{a_1} \dots c_{B_k}(z)^{a_k}\Big) \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists B_1,\dots,B_k \in \mathrm{NP} \text{ mit} \\
& \qquad\qquad \forall z \in \Sigma^* \Big(z \in A \Longleftrightarrow \bigvee_{f(a_1,\dots,a_k)=1} (z \in B_1^{a_1} \wedge \dots \wedge z \in B_k^{a_k})\Big) \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists B_1,\dots,B_k \in \mathrm{NP} \text{ mit } A = \bigcup_{f(a_1,\dots,a_k)=1} (B_1^{a_1} \cap \dots \cap B_k^{a_k}) \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists B_1,\dots,B_k \in \mathrm{NP} \text{ mit } A = \bigcup_{f(a_1,\dots,a_k)=1} \Big(\bigcap_{a_i=1} B_i \cap \bigcap_{a_j=0} \overline{B_j}\Big) \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists B_1,\dots,B_k \in \mathrm{NP} \text{ mit } A = \bigcup_{f(a_1,\dots,a_k)=1} \Big(\bigcap_{a_i=1} B_i \cap \overline{\bigcup_{a_j=0} B_j}\Big) \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists B_1,\dots,B_k \in \mathrm{NP} \text{ mit } A = \bigcup_{f(a_1,\dots,a_k)=1} \Big(\bigcap_{a_i=1} B_i \setminus \bigcup_{a_j=0} B_j\Big) \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists B_1,\dots,B_k \in \mathrm{NP} \text{ mit} \\
& \qquad\qquad A = \bigcup_{f(a_1,\dots,a_k)=1} \Big(\bigcap_{a_i=1} B_i \setminus \bigcup_{a_j=0} (B_j \cap \bigcap_{a_i=1} B_i)\Big)
\end{aligned}
$$

Im bisher geschilderten Graphen wurden als Knoten alle Belegungen des Tupels $a_1, \ldots, a_k$ gewählt, und es wurde mit $+$ bzw. $-$ eingetragen, ob diese Belegung den Wert 1 bzw. 0 liefert. Wir wählen nun anstatt des Knotens $(a_1, \ldots, a_k)$ die Menge $\bigcap_{a_i=1} B_i$. Da eine Kante im Graphen direkte Nachbarn bezüglich der $\leq$-Beziehung verbindet, unterscheiden sich zwei durch eine Kante verbundene Knoten nur durch eine 1 statt einer 0 im Tupel an der Stelle j. Das heißt, in unserem neuen Graphen steht an dem „nächsthöheren“ Knoten (den wir im folgenden Nachfolgerknoten nennen wollen) eine Menge der Form $B_j \cap \bigcap_{a_i=1} B_i$. Eine Kante zwischen einem Knoten und seinem Nachfolgerknoten steht also in diesem Fall für eine Teilmengenbeziehung. Man beachte, daß für die Mengen an den Knoten $(a_1, \ldots, a_k) \geq (b_1, \ldots, b_k)$ gilt: Die Menge an dem Knoten $(a_1, \ldots, a_k)$ ist eine Teilmenge der Menge an dem Knoten $(b_1, \ldots, b_k)$. Vergleichen wir diese Darstellung mit der obigen Formel, so können wir sehen, daß wir zur Bestimmung von A die Mengen mit einem $+$ am Knoten wählen, und davon die Vereinigung der Mengen an allen Nachfolgerknoten abziehen. Um dies zu verdeutlichen, werden wir das Beispiel aus dem zweiten Kapitel noch einmal betrachten.

Beispiel. Wir zeichnen nun den neuen Graphen wie beschrieben, indem wir an den Knoten die Schnittmengen der 1-Belegungen auftragen:

Wir wollen jetzt aus dem Graphen die Menge $A \in f(\mathrm{NP})$ bestimmen, die durch B_1, B_2 und B_3 festgelegt wird. Dazu betrachten wir die Mengen an den $+$-Knoten abzüglich der Mengen an den Nachfolger-Knoten. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} A = \quad & (B_2 \backslash ((B_3 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2))) \\ \cup \quad & (B_3 \backslash ((B_1 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_3))) \\ \cup \quad & ((B_1 \cap B_2) \backslash (B_1 \cap B_2 \cap B_3)) \\ \cup \quad & ((B_2 \cap B_3) \backslash (B_1 \cap B_2 \cap B_3)). \end{aligned}$$

Wir können jetzt diese Betrachtungsweise verwenden, um einen Algorithmus zur Bestimmung von $f(\mathrm{NP})$ in Spezialfällen zu formulieren:

Satz 3.6 *Sei ein beliebiger Teil des Funktionsgraphen von* $f\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ *bekannt. Sei mindestens ein Knoten dieses bekannten Teilgraphen mit der Menge* Σ^* *belegt, und sei die Belegung des Teilgraphen mit Mengen so gewählt, daß die Teilmengenbeziehung der Kanten gewahrt bleibt. Dann können wir Mengen* $B_1, \ldots, B_k$ *finden, so daß nur die Knoten des bekannten Teilgraphen einen Beitrag zu* $f(B_1, \ldots, B_k)$ *liefern.*

Beweis. Wir berufen uns auf die Tatsache, daß nur die +-Knoten abzüglich ihrer Nachfolgerknoten einen Beitrag zu $f(B_1, \ldots, B_k)$ liefern. Wir „füllen" deshalb den Graphen „von oben her auf", indem wir die Spitze mit der leeren Menge belegen, soweit sie nicht Teil des bekannten Teilgraphen ist. Alle weiteren Knoten, mit Ausnahme der Knoten des Teilgraphen, erhalten als Belegung die Vereinigung aller Nachfolgermengen. Damit ist die Teilmengenbeziehung der Kante auch für diese Knoten gewahrt. Da im Teilgraphen die Menge Σ^* vorkommt, pflanzt sie sich auf diese Weise nach unten hin fort, so daß an der Wurzel des Graphen ebenfalls Σ^* zu finden ist. Es gilt nun, da jede Menge nur abzüglich der Nachfolgermengen in $f(B_1, \ldots, B_k)$ eingeht, daß alle Mengen außerhalb des bekannten Teilgraphen keinen Beitrag liefern können, da sie entweder leer oder die Vereinigung aller Nachfolgermengen sind. Es sind also nur die Mengen aus dem bekannten Teilgraphen für $f(B_1, \ldots, B_m)$ relevant. Die Mengen $B_1, \ldots, B_m$ sind die Mengen an den Nachfolgerknoten der mit Σ^* belegten Wurzel.

□

Um den Nutzen dieses Algorithmus verdeutlichen zu können, werden wir Lemma 3.4 nocheinmal zeigen. Dazu benötigen wir allerdings zwei Aussagen, die wir auch später noch oft verwenden werden:

Lemma 3.7 1. *Sei* X *eine beliebige Menge aus* $\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}$. *Dann gibt es* $A, B \in \mathrm{NP}$, $A \subseteq B$ *mit* $X = A \cup \overline{B}$.

2. *Sei* X *eine beliebige Menge aus* $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}$, *dann gibt es* $A, B \in \mathrm{NP}$, $A \subseteq B$ *mit* $X = B \cap \overline{A}$.

Beweis.

zu 1. Da $X \in \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}$, gibt es nach Definition $C, B \in \mathrm{NP}$ mit $X = C \cup \overline{B}$. Sei nun $A =_{\mathrm{def}} B \cap C$. Dann gilt $A \in \mathrm{NP}$ und $X = A \cup \overline{B}$. Und natürlich ist $A \subseteq B$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

zu 2. Da $X \in \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}$, gibt es $C, B \in \mathrm{NP}$ mit $X = B \cap \overline{C}$. Sei nun $A =_{\mathrm{def}} B \cap C$, dann gilt $A \in \mathrm{NP}$, $A \subseteq B$ und $X = B \cap \overline{A}$. Damit gilt die Behauptung.

□

Wir zeigen nun den ersten Teil des Lemma 3.4 nocheinmal, wobei wir die Konstruktion aus dem vorigen Satz verwenden werden:

Beweis. Wir wissen, daß $\begin{smallmatrix}\bullet\, + \\ | \\ \bullet\, - \\ | \\ \bullet\, +\end{smallmatrix}$ ein Teilgraph des Funktionsgraphen ist. Sei nun $A \cup \overline{B}$ eine beliebige Menge aus $\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}$ mit $A \subseteq B$ und $A, B \in \mathrm{NP}$. Dann belegen wir den uns bekannten Teilgraphen folgendermaßen: $\begin{smallmatrix}\bullet\, A \\ | \\ \bullet\, B \\ | \\ \bullet\, \Sigma^*\end{smallmatrix}$. Der Rest des Funktionsgraphen wird so aufgefüllt, daß die Mengen an den anderen Knoten keinen Beitrag zu $f(\mathrm{NP})$ mehr liefern, wie im Beweis von Satz 3.6 beschrieben wurde. Dann gilt offensichtlich $A \cup \overline{B} \in f(\mathrm{NP})$ und damit $\mathrm{NP} \vee \text{co-NP} \subseteq f(\mathrm{NP})$. □

Diese Methode, den Graphen von oben her aufzufüllen, werden wir von nun an als „Auffüll"-Methode bezeichnen.

4

Partitionen

Um die Ergebnisse aus den vorigen Kapiteln verallgemeinern zu können, benötigen wir zunächst einige Definitionen zum Begriff der k-Partition. In diesem Kapitel wird dieser Begriff eingeführt, und es werden analog zu den Sprachklassen verschiedene k-Partitionen zu Klassen zusammengefaßt, die etwas über die Komplexität der enthaltenen Partitionen aussagen. Anschließend definieren wir, was die Anwendung von nun k-wertigen Funktionen auf solche Klassen von Partitionen bedeuten soll. Schließlich werden wir den Fall der k-wertigen Funktionen zurückführen auf die bereits bekannte Behandlung von booleschen Funktionen. Dazu führen wir eine Kodierung ein und zeigen, wie sich die Verfahren der vorhergehenden Kapitel mit Hilfe dieser Kodierung auch für den k-wertigen Fall einsetzen lassen.

Die nun folgende Definition führt den Begriff der k-Partition ein.

Definition 4.1 *Es sei Σ ein endliches Alphabet.*

1. *Ein Tupel $A = (A_1, \ldots, A_k)$ heißt* k-Partition *von Σ^* genau dann, wenn $\bigcup_i A_i = \Sigma^*$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k$. Die Menge A_i heißt die i-te Komponente von A. Für eine beliebige k-Partition A bezeichnen wir mit A_i stets ihre i-te Komponente ($i = 1, \ldots, k$).*

2. *Die Funktion $c_A \colon \Sigma^* \to \{1, \ldots, k\}$ heißt* charakteristische Funktion *von A, wenn $c_A(x) = i \Longleftrightarrow x \in A_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$ und alle $x \in \Sigma^*$ gilt.*

Wir werden uns in dieser Arbeit mit Klassen von Partitionen beschäftigen. Eine Partition hat die Form $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, wobei die Komponenten A_i Sprachen sind für $i = 1, \ldots, k$. Deshalb liegt die Idee nahe, Klassen von Partitionen zu definieren, indem man zu jeder Komponente angibt, in welcher Sprachklasse sie liegt. Wir definieren also:

Definition 4.2 *Seien $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ Sprachklassen, so ist*

$$(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k) =_{\mathrm{def}} \{A\colon A \text{ ist } k\text{-Partition und } A_i \in \mathcal{F}_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\}$$

eine Klasse von k-Partitionen.

Wir werden auch hier die Komponenten einer Klasse von k-Partitionen einzeln ansprechen und definieren deshalb:

Definition 4.3 *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von k-Partitionen. Dann bezeichnen wir für $i = 1, \ldots, k$ mit $\mathcal{K}_i$ die Klasse aller i-ten Komponenten von Partitionen in $\mathcal{K}$, also*

$$\mathcal{K}_i =_{\mathrm{def}} \{A\colon \begin{array}{l} \text{es existieren } A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k \\ \text{mit } (A_1, \ldots, A_{i-1}, A, A_{i+1}, \ldots, A_k) \in \mathcal{K}\} \end{array}$$

Wie man aus der Definition sofort sieht, gilt die Eigenschaft:

$$\mathcal{K} \subseteq (\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_m)$$

Da mindestens eine Komponente einer k-Partition unmittelbar aus den anderen Komponenten hervorgeht, nämlich durch Negation der Vereinigung aller anderen Komponenten, werden wir einen Sonderfall von Klassen von k-Partitionen, die sogenannten Punktklassen, betrachten.

Definition 4.4 *Seien $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k-1}$ Sprachklassen, so ist*

$$(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k-1}, \odot) =_{\mathrm{def}} \{A\colon A \text{ ist } k\text{-Partition und } A_i \in \mathcal{F}_i \text{ für } i = 1, \ldots, k-1\}$$

Analog gilt die Definition für $\odot$ an einer anderen Stelle im Tupel.

Der folgende Satz ordnet die Punktklassen in die Klassen von k-Partitionen ein.

Satz 4.5 *Sei $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{k-1}, \mathcal{K}_k)$ eine Klasse von k-Partitionen. Dann gilt*

$$(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{k-1}, \mathcal{K}_k) \subseteq (\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{k-1}, \odot) \subseteq (\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{k-1}, \text{co-}(\bigvee_{i=1}^{k-1} \mathcal{K}_i))$$

Beweis. Die erste Inklusion gilt nach Definition. Sei nun $A = (A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_k) \in (\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{k-1}, \odot)$, dann gilt $A_k = \overline{(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)}$ wegen der Partitionseigenschaft, und damit $A = (A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_k) \in (\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{k-1}, \text{co-}(\bigvee_{i=1}^{k-1} \mathcal{K}_i))$. □

Daraus folgt nun:

Folgerung 4.6 $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{k-1}, \odot) = (\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{k-1}, \text{co-}(\bigvee_{i=1}^{k-1} \mathcal{K}_i))$

Beweis. Setzen wir im obigen Satz $\mathcal{K}_k = \text{co-}(\bigvee_{i=1}^{k-1} \mathcal{K}_i)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{k-1}, \text{co-}(\bigvee_{i=1}^{k-1} \mathcal{K}_i)) &\subseteq (\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{k-1}, \odot) \\ &\subseteq (\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_{k-1}, \text{co-}(\textstyle\bigvee_{i=1}^{k-1} \mathcal{K}_i))\end{aligned}$$

$\square$

Wir werden in den folgenden Kapiteln untersuchen, welche neuen Klassen von Partitionen entstehen, wenn wir k-wertige logische Funktionen auf Partitionsklassen anwenden. Dazu zunächst die folgenden Definitionen:

Definition 4.7 *Sei $f\colon \{1, \ldots, l\}^m \to \{1, \ldots, k\}$ eine Funktion.*

1. *Seien $B_1, \ldots, B_m$ l-Partitionen. Dann ist die k-Partition $f(B_1, \ldots, B_m)$ folgendermaßen definiert:*

$$A = f(B_1, \ldots, B_m) \iff_{\text{def}} c_A(x) = f(c_{B_1}(x), \ldots, c_{B_m}(x)) \text{ für alle } x \in \Sigma^*$$

2. *Seien $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_m$ Klassen von l-Partitionen.*

$$f(\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_m) =_{\text{def}} \{f(B_1, \ldots, B_m) \colon B_1 \in \mathcal{K}_1, \ldots, B_m \in \mathcal{K}_m\}$$

3. $f(\mathcal{K}) =_{\text{def}} f(\underbrace{\mathcal{K}, \ldots, \mathcal{K}}_{m\text{-mal}})$

Es wird hier also festgelegt, wie eine Partition aussieht, die durch Anwendung von k-wertiger Logik aus einer l-Partition entstanden ist. In den folgenden beiden Kapiteln werden wir für den Fall $k = 3$ und die Fälle $l = 2$ bzw. $l = 3$ genauer betrachten, von welcher Gestalt die entstandenen Partitionen sind, wobei wir die Grundklasse $\mathcal{K}$ geeignet wählen.

Um die Ergebnisse aus dem zweiten Kapitel verwenden zu können, müssen wir Funktionen der Form $f\colon \{1, \ldots, l\}^m \to \{1, \ldots, k\}$ zu booleschen Funktionen umwandeln. Dazu kodieren wir zunächst die Menge $\{1, \ldots, l\}$ in der folgenden Weise:

$$code_l\colon \{1, \ldots, l\} \to \{0,1\}^{l-1} \text{ mit } code_l(i) =_{\text{def}} \begin{cases} 0^{i-1}10^{l-i-1} & \text{für } i < l \\ 0^{l-1} & \text{für } i = l \end{cases}$$

Diese Kodierung ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Surjektivität wird in unserem Kontext aber nicht benötigt, wie sich im 6. Kapitel noch zeigen wird. Wir benötigen allerdings die Umkehrfunktion $code_l^{-1}$, die undefiniert ist für alle $x \in \{0,1\}^{l-1}$, die mehr als eine 1 im Wort enthalten.

Wir definieren jetzt den Übergang von k-wertigen Funktionen zu k booleschen Funktionen:

Definition 4.8 *Sei $f\colon \{1,\ldots,l\}^m \to \{1,\ldots,k\}$ eine k-wertige Funktion. Dann definieren wir*

1. *Für $i = 1,\ldots,k$ ist $f_i\colon \{0,1\}^{m(l-1)} \to \{0,1\}$ definiert durch*

$$f_i(y_{(1,1)},\ldots,y_{(l-1,1)},y_{(1,2)},\ldots,y_{(l-1,2)},\ldots,y_{(1,m)},\ldots,y_{(l-1,m)}) =_{\text{def}}$$

$$\begin{cases} 1 & \text{, falls } x_j = code_l^{-1}(y_{(1,j)}\ldots y_{(l-1,j)}) \text{ für } j = 1,\ldots,m \\ & \quad \text{und } f(x_1,\ldots,x_m) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. *Wir erinnern uns an die Definition 2.6 von $m(f)$ und $c(f)$ und definieren für $i = 1,\ldots,k$:*

$$m_i(f) =_{\text{def}} m(f_i); \quad c_i(f) =_{\text{def}} c(f_i)$$

Um uns die Arbeit im folgenden Abschnitt zu erleichtern, führen wir eine neue Bezeichnung ein:

$$\mathrm{NP}^l =_{\text{def}} (\underbrace{\mathrm{NP},\mathrm{NP},\ldots,\mathrm{NP}}_{l-\text{mal}},\text{co-NP}).$$

Wir zeigen nun den folgenden Satz:

Satz 4.9 *Sei $f\colon \{1,\ldots,l\}^m \to \{1,\ldots,k\}$ eine k-wertige Funktion, und sei $i \in \{1,\ldots,k\}$. Dann gilt*

$$f(\mathrm{NP}^{l-1})_i = f_i(\mathrm{NP})$$

Zum Beweis des Satzes formulieren wir zunächst den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 4.10 *Sei A eine k-Partition, also $A = (A_1,\ldots,A_k)$. Dann gilt:*

$$code_k(c_A(x)) = c_{A_1}(x)c_{A_2}(x)\ldots c_{A_{k-1}}(x)$$

Beweis. Für $i = 1, \ldots, k$ gilt:

$$\begin{aligned} c_A(x) = i &\iff x \in A_i \\ &\iff c_{A_i} = 1 \text{ und } c_{A_j} = 0 \text{ für alle } j \neq i \text{ (Partition!)} \\ &\iff c_{A_1}(x) \ldots c_{A_{k-1}}(x) = \begin{cases} 0^{i-1}10^{k-i-1} & i < k \\ 0^{k-1} & i = k \end{cases} \end{aligned}$$

Es folgt also $c_{A_1}(x) \ldots c_{A_{k-1}}(x) = code_k(c_A(x))$. □

Wir beweisen nun den Satz 4.9:

Beweis.

- $\subseteq$ Sei $A \in f(\mathrm{NP}^{l-1})_i$, dann existieren nach Definition $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k$ mit

  $$(A_1, \ldots, A_{i-1}, A, A_{i+1}, \ldots, A_k) \in f(\mathrm{NP}^{l-1}).$$

  Das heißt, es existieren $B_1, \ldots, B_m \in \mathrm{NP}^{l-1}$ mit

  $$(A_1, \ldots, A_{i-1}, A, A_{i+1}, \ldots, A_k) = f(B_1, \ldots, B_m).$$

  Da $B_i \in \mathrm{NP}^{l-1}$ für $i = 1, \ldots, m$, lassen sich die B_i auch schreiben als Partitionen $B_i = (B_{(1,i)}, \ldots, B_{(l-1,i)}, \overline{\bigcup_{j=1}^{l-1} B_{(j,i)}})$ mit $B_{(j,i)} \in \mathrm{NP}$ für $j = 1, \ldots, l-1$ und $i = 1, \ldots, m$. Wegen des Hilfssatzes 4.10 gilt dann:

  $$\begin{aligned} x \in A &\iff f(c_{B_1}(x), \ldots, c_{B_m}(x)) = i \\ &\iff f_i(c_{B_{(1,1)}}(x), \ldots, c_{B_{(l-1,1)}}(x), c_{B_{(1,2)}}(x), \ldots, c_{B_{(l-1,2)}}(x), \\ &\qquad\qquad \ldots, c_{B_{(1,m)}}(x), \ldots, c_{B_{(l-1,m)}}(x)) = 1 \end{aligned}$$

  Es folgt also $c_A(x) = f_i(c_{B_{(1,1)}}(x), \ldots, c_{B_{(l-1,1)}}(x),\ c_{B_{(1,2)}}(x), \ldots, c_{B_{(l-1,2)}}(x), \ldots, c_{B_{(1,m)}}(x), \ldots, c_{B_{(l-1,m)}}(x))$ und daher auch

  $$A = f_i(B_{(1,1)}, \ldots, B_{(l-1,1)}, B_{(1,2)}, \ldots, B_{(l-1,2)}, \ldots, B_{(1,m)}, \ldots, B_{(l-1,m)}).$$

  Damit ist das Gewünschte gezeigt, nämlich $A \in f_i(\mathrm{NP})$.

- $\supseteq$ Sei $A \in f_i(\mathrm{NP})$, dann existieren $B_{(1,1)}, \ldots, B_{(l-1,1)}, B_{(1,2)}, \ldots, B_{(l-1,2)}, \ldots, B_{(1,m)}, \ldots, B_{(l-1,m)} \in \mathrm{NP}$ mit

  $$A = f_i(B_{(1,1)}, \ldots, B_{(l-1,1)}, B_{(1,2)}, \ldots, B_{(l-1,2)}, \ldots, B_{(1,m)}, \ldots, B_{(l-1,m)}).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
x \in A \iff & f_i(c_{B_{(1,1)}}(x), \dots, c_{B_{(l-1,1)}}(x), c_{B_{(1,2)}}(x), \dots, c_{B_{(l-1,2)}}(x), \\
& \qquad \dots, c_{B_{(1,m)}}(x), \dots, c_{B_{(l-1,m)}}(x)) = 1 \\
\iff & \exists B_1, \dots, B_m \in \mathrm{NP}^l \text{ mit } c_{B_i}(x) = \mathit{code}_l^{-1}(c_{B_{1,i}}(x), \dots, c_{B_{l-1,i}}(x)) \\
& \text{für } i = 1, \dots, m \text{ und es gilt } f(c_{B_1}(x), \dots, c_{B_m}(x)) = i
\end{aligned}$$

Dann gilt für $i = 1, \dots, m$, daß B_i eine l-Partition aus NP^{l-1} ist mit $B_i = (B_{1,i}, \dots, B_{l-1,i}, \overline{\bigcup_{j=1}^{l-1} B_{j,i}})$, denn wegen der gewählten Kodierung gilt für $j = 1, \dots, l-1$:

$$c_{B_i}(x) = j \iff c_{B_{(j,i)}}(x) = 1 \text{ und } c_{B_{(k,i)}}(x) = 0 \text{ für } k \in \{1, \dots, l-1\} \backslash \{j\}$$

und außerdem

$$c_{B_i}(x) = l \iff c_{B_{(j,i)}}(x) = 0 \text{ für alle } j = 1, \dots, l-1 \iff x \in \overline{\bigcup_{j=1}^{l-1} B_{j,i}}.$$

Also gilt $A = f(B_1, \dots, B_m)_i$ mit $B_j \in \mathrm{NP}^{l-1}$ für $j = 1, \dots, m$ und damit $A \in f(\mathrm{NP}^{l-1})_i$.

□

Wir können nun den Satz 2.7 und die Folgerung 2.8 aus dem zweiten Kapitel zusammen mit dem eben bewiesenen Satz 4.9 anwenden und erhalten die Folgerung:

Folgerung 4.11 *Seien $f\colon \{1, \dots, l\}^m \to \{1, \dots, k\}$ eine k-wertige Funktion, $s \geq 1$ und $i \in \{1, \dots, k\}$. Dann gilt*

1. $f(\mathrm{NP}^{l-1})_i = \begin{cases} \mathrm{C}_{m_i(f)} & \text{, falls } c_i(f) \text{ mit } - \text{ endet} \\ \mathrm{D}_{m_i(f)} & \text{, falls } c_i(f) \text{ mit } + \text{ endet} \end{cases}$
2. $f(\mathrm{NP}^{l-1})_i \supseteq \mathrm{C}_s$, *falls $c_i(f)$ die Folge* $\underbrace{\dots + - + - + - + -}_{s+1}$ *enthält*

   $f(\mathrm{NP}^{l-1})_i \supseteq \mathrm{D}_s$, *falls $c_i(f)$ die Folge* $\underbrace{\dots - + - + - + - +}_{s+1}$ *enthält*

Wir können also auch für k-Partitionen den „mind change“-Algorithmus aus Kapitel 2 verwenden, soweit die zugrundeliegende Klasse eine der Klassen NP^l für $l \geq 1$ ist. Beispiele für dieses Verfahren werden wir in den folgenden Kapiteln sehen.

5

Anwendung von dreiwertigen Funktionen auf NP-Mengen

Wir werden jetzt die bisher gewonnenen Erkenntnisse anwenden und uns die Dreier-Partitionen anschauen, die durch dreiwertige Funktionen entstehen. Dabei gehen wir, genau wie bei der Booleschen Hierarchie, von NP als Grundklasse aus, um eventuell vergleichbare Ergebnisse zu erhalten. Um Dreier-Partitionsklassen zu erhalten, müssen wir also jetzt dreiwertige Funktionen, definiert auf $\{0, 1\}$, und ihre Anwendung auf die charakteristischen Funktionen von NP-Sprachen betrachten, wie in der Definition 4.7 formal beschrieben wurde: Sei $f\colon \{0,1\}^m \to \{1,2,3\}$ eine auf $\{0, 1\}$ definierte, m-stellige 3-wertige Funktion. Dann ist

$$A \in f(\mathrm{NP}) \Longleftrightarrow_{\mathrm{def}} \exists B_1, \ldots, B_m \in \mathrm{NP} \text{ mit } c_A(x) = f(c_{B_1}(x), \ldots, c_{B_m}(x))$$

Hierbei können beliebige NP-Mengen verwendet werden. Die Partitionseigenschaft der Menge A ergibt sich aus der vollständigen Definition von f.

Wir werden in diesem und dem nächsten Kapitel nur surjektive Funktionen f betrachten, denn bei der Anwendung von nicht surjektiven Funktionen, also Funktionen, bei denen mindestens einer der Funktionswerte $1, 2, 3$ nicht vorkommt, ist immer mindestens eine Komponente der entsprechenden Partition die leere Menge. Solche Partitionen lassen sich aber leicht auf den Zweier-Partitionsfall zurückführen.

Formal gesehen müßten wir statt $A \in \mathrm{NP}$ schreiben $(A, \overline{A}) \in (\mathrm{NP}, \text{co-NP}) = \mathrm{NP}^1$ und die Definitionsmenge der Funktionen müßte $\{1, 2\}$ sein statt $\{0, 1\}$. Da es in der bisherigen Praxis der Komplexitätstheorie üblich ist, die Menge $\overline{A}$ wegzulassen, und da die Kodierungsfunktion $code_l$ für $l = 2$ die Menge $\{1, 2\}$ bijektiv in die Menge $\{0, 1\}$ abbildet, werden wir in diesem Kapitel die gängige Schreibweise beibehalten.

Verwenden wir die Ergebnisse aus dem vorigen Kapitel, so erhalten wir also für $f\colon \{0,1\}^m \to \{1,2,3\}$ drei Funktionen f_1, f_2, f_3, die nach Definition 4.8 folgendermaßen aussehen: $f_i\colon \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ mit

$$f_i(x_1,\ldots,x_m) =_{\text{def}} \begin{cases} 1 & \text{, falls } f(x_1,\ldots,x_m) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir können den „mind change“-Algorithmus auf diese drei Funktionen anwenden und erhalten so Aussagen über die Klassen $f(\mathrm{NP})_i$.

Um den „mind change“-Algorithmus anwenden zu können, müssen wir für jede der Funktionen f_1, f_2, f_3 den Funktionsgraphen zeichnen. Wir wollen uns in Zukunft diese Arbeit erleichtern, indem wir den Graphen nur einmal zeichnen, und an den Knoten auftragen, welche der Funktionen f_1, f_2, f_3 dort den Funktionswert 1 annimmt. Wir markieren also den Knoten $(a_1,\ldots,a_m)$ mit $i \in \{1,2,3\}$, wenn $f(a_1,\ldots,a_m) = i$ und damit $f_i(a_1,\ldots,a_m) = 1$. Wir bezeichnen diesen Graphen als Funktionsgraphen von f und definieren $\bar{i} =_{\text{def}} \{1,2,3\} \backslash \{i\}$ für $i = 1,2,3$. Die Aussage „$^{i}_{\bar{i}}$ ist kein Teilgraph des Funktionsgraphen von f“ ist für $i = 1,2,3$ daher beispielsweise gleichbedeutend mit der Aussage „$^{+}_{-}$ ist kein Teilgraph des Funktionsgraphen von f_i“.

Wir untersuchen nun die Klassen $f(\mathrm{NP})$ mit $f\colon \{0,1\}^m \to \{1,2,3\}$ und gehen dabei nach der Stelligkeit m vor. Da einstellige Funktionen nur zwei Werte annehmen können, können sie nicht surjektiv sein. Wir beginnen daher mit der Stelligkeit $m = 2$.

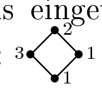
5.1 Zweistellige Funktionen

Die Form eines Funktionsgraphen dieser Funktionen und seine Mengen-Interpretation sehen folgendermaßen aus, wenn wir die zwei eingehenden NP-Mengen mit A, B bezeichnen (siehe Abschnitt 3.2):

wobei wir an den Knoten noch die Werte $1,2,3$ für jede Funktion f auftragen müssen. Wir untersuchen zunächst ein Beispiel, um die weitere Vorgehensweise zu veranschaulichen:

Beispiel. Sei $f\colon \{0,1\}^2 \to \{1,2,3\}$ eine Funktion definiert durch die Wertetabelle:

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$	$f_1(x_1,x_2)$	$f_2(x_1,x_2)$	$f_3(x_1,x_2)$
0	0	1	1	0	0
0	1	3	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	2	0	1	0

Die Funktionen f_1, f_2, f_3 wurden ebenfalls eingetragen. Der Funktionsgraph der Funktion f sieht dann folgendermaßen aus: 

Dann gelten unter Verwendung der Ergebnisse aus dem dritten Kapitel, wie man aus dem Graphen leicht ablesen kann, die folgenden Implikationen:

$$
\begin{array}{rcl@{\quad\Rightarrow\quad}rcl@{\quad\Rightarrow\quad}l}
c_1(f) & = & +- & m_1(f) & = & 1 & f(\mathrm{NP})_1 = \mathrm{C}_1 \\
c_2(f) & = & -+ & m_2(f) & = & 1 & f(\mathrm{NP})_2 = \mathrm{D}_1 \\
c_3(f) & = & -+- & m_3(f) & = & 2 & f(\mathrm{NP})_3 = \mathrm{C}_2
\end{array}
$$

Es gilt also $f(\mathrm{NP}) \subseteq (\text{co-NP}, \mathrm{NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP})$.

Wir werden dieses Verfahren verwenden, um obere Schranken für $f(\mathrm{NP})$ zu finden. Da jeder Pfad im Graphen die Länge 3 besitzt, kann es höchstens zwei Wechsel zwischen $+$ und $-$ geben. Außerdem ist jeder Knoten des Funktionsgraphen nur mit genau einem Funktionswert aus $\{1,2,3\}$ belegt. Es ergibt sich folgender Satz:

Satz 5.1 *Sei* $f\colon \{0,1\}^2 \to \{1,2,3\}$ *eine surjektive Funktion. Dann hat* $f(\mathrm{NP})$ *eine der beiden oberen Schranken:*

1. $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}) = (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$
2. $(\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP})$

oder eine Permutation davon.

Beweis. Wie schon oben erwähnt, hat der Pfad mit den meisten möglichen Wechseln zwei Wechsel zwischen $+$ und $-$. Da sowohl die Spitze als auch die Wurzel nur für eine der Funktionen f_1, f_2, f_3 mit $+$ belegt sind, gibt es auf jeden Fall für eine der drei Funktionen den Pfad $-+-$. Diese Komponente ist also aus C_2.

Falls eine der beiden anderen Funktionen sowohl an der Spitze als auch an der Wurzel ein $+$ stehen hat, so ist diese Komponente aus D_2, denn dann lautet der längste Pfad für diese Funktion $+-+$. Und damit ist konsequenterweise die dritte Komponente aus C_2 mit dem Pfad $-+-$.

Teilen sich die beiden verbleibenden Funktionen dagegen die Wurzel und die Spitze, so ist für die eine Funktion der längste Pfad $+-$, also ist diese Komponente aus C_1, und für die andere Funktion $-+$, also ist diese Komponente aus D_1. $\square$

Wir haben jetzt also die Möglichkeit, für jede Funktion $f\colon \{0,1\}^2 \to \{1,2,3\}$ eine obere Schranke für $f(\mathrm{NP})$ anzugeben. Wir werden nun die beiden oberen Schranken noch etwas genauer untersuchen. Es gilt offensichtlich die Beziehung $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot) \subseteq (\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP})$. Deshalb werden wir mit der ersten Schranke beginnen und zeigen zunächst eine Charakterisierung dieser Klasse.

Lemma 5.2 *Sei* $f\colon \{1,\ldots,l\}^m \to \{1,2,3\}$ *eine dreiwertige Funktion. Sei* $\begin{smallmatrix}1\\3\\2\end{smallmatrix}$ *im Funktionsgraphen von* f *enthalten, dann gilt* $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot) \subseteq f(\mathrm{NP}^{l-1})$.

Beweis. Sei $(A, \overline{B}, B \cap \overline{A})$ eine beliebige Partition aus $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$ mit $A, B \in \mathrm{NP}$ und $B \subseteq A$. Wir verwenden die Auffüllmethode, wie sie im Satz 3.6 beschrieben wurde, und belegen den Teilgraphen $\begin{smallmatrix}1\\3\\2\end{smallmatrix}$ mit den Mengen $\begin{smallmatrix}A\\B\\\Sigma^*\end{smallmatrix}$. Der Rest des Graphen wird so aufgefüllt, daß die anderen Knoten keinen Beitrag zur Partition mehr liefern. Dies ist möglich, da $A \cap \overline{B} = \emptyset$ und damit $A \subseteq B$. Dann erzeugt die Funktion gerade die gewünschte Partition $(A, \overline{B}, B \cap \overline{A})$, denn die Belegung mit 1 gilt genau für die Menge A, mit 3 für die Menge $B \backslash A = B \cap \overline{A}$ und mit 2 für $\Sigma^* \backslash B = \overline{B}$. □

Bemerkung. Liegen im obigen Lemma mehrere 3-en zwischen dem 2- und dem 1-Knoten, so läßt sich das Lemma leicht verallgemeinern. Man muß nur alle 3-Knoten mit derselben Menge, also B, belegen.

Permutiert man die Zahlen $1, 2, 3$ im Teilgraphen, so müssen entsprechend die Klassen NP, co-NP, $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}$ im Tripel permutiert werden.

Wir können jetzt den folgenden Satz beweisen:

Satz 5.3 *Sei* $f\colon \{0,1\}^2 \to \{1,2,3\}$ *eine surjektive Funktion mit der oberen Schranke* $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$. *Unter der Voraussetzung* $\mathrm{NP} \neq \text{co-NP}$ *gilt dann*

$$f(\mathrm{NP}) = (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot).$$

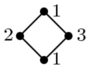
Analog gilt der Satz für Permutationen von $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$.

Beweis. Wir verwenden hier Lemma 3.1, dessen Voraussetzungen erfüllt sind. Es gilt also, daß die Teilgraphen $\begin{smallmatrix}\bar{1}\\1\end{smallmatrix}$ und $\begin{smallmatrix}2\\\bar{2}\end{smallmatrix}$ nicht im Funktionsgraphen von f vorkommen können. Daraus folgt dann sofort, daß 2 an der Wurzel des Graphen steht und 1 an der Spitze, da die beiden Zahlen sonst nicht auftreten können, wegen der Surjektivität von f aber auftreten müssen. Damit die 3 vorkommt, muß sie also an einem der mittleren Knoten stehen. Also ist $\begin{smallmatrix}1\\3\\2\end{smallmatrix}$ Teilgraph des Funktionsgraphen. Damit ist $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot) \subseteq f(\mathrm{NP})$, was zu beweisen war. □

Um die zweite obere Schranke genauer zu charakterisieren, definieren wir zunächst eine neue Partitionsklasse:

Definition 5.4 $\mathrm{P}_4 =_{\mathrm{def}} \{(\overline{(A \cup B)} \cup (A \cap B), A \cap \overline{B}, B \cap \overline{A}) \mid A, B \in \mathrm{NP}\}$

Wir formulieren einen Hilfssatz zur Charakterisierung von P_4:

Lemma 5.5 *Sei f die surjektive Funktion auf $\{1, 2, 3\}$ mit dem Graphen*  . *Dann ist* $\mathrm{P}_4 = f(\mathrm{NP})$.

Beweis.

$\subseteq$ Sei $(\overline{(A \cup B)} \cup (A \cap B), A \cap \overline{B}, B \cap \overline{A})$ eine beliebige Partition aus P_4 mit $A, B \in \mathrm{NP}$. Dann liefert $f(A, B)$ die gewünschte Partition. Es ist also $\mathrm{P}_4 \subseteq f(\mathrm{NP})$.

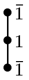
$\supseteq$ Seien A, B zwei beliebige Mengen aus NP. Dann ist $f(A, B) = (\overline{(A \cup B)} \cup (A \cap B), A \cap \overline{B}, B \cap \overline{A}) \in \mathrm{P}_4$.

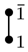
$\square$

Wenn wir in der Definition die zweite und dritte Komponente vertauschen, so erhalten wir die Klasse $\mathrm{P}'_4 =_{\mathrm{def}} \{(\overline{(A \cup B)} \cup (A \cap B), B \cap \overline{A}, A \cap \overline{B}) \mid A, B \in \mathrm{NP}\}$. Der Graph, der diese Klasse repräsentiert, ist offensichtlich dergleiche wie der von P_4, wobei die Ziffern 2 und 3 vertauscht werden müssen.

Wir zeigen nun den folgenden Satz:

Satz 5.6 *Es sei* $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP} \neq \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}$. *Sei* $f \colon \{0, 1\}^2 \to \{1, 2, 3\}$ *eine surjektive Funktion mit der oberen Schranke* $(\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP})$. *Dann ist* $f(\mathrm{NP})$ *eine der Permutationen von* $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$ *oder* $f(\mathrm{NP}) = \mathrm{P}_4$ *oder* $f(\mathrm{NP}) = \mathrm{P}'_4$.

Beweis. Zunächst lassen sich folgende Aussagen aufgrund des Lemma 3.2 treffen:  ,  und  sind keine Teilgraphen des Funktionsgraphen. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

Fall 1:  kommt nicht im Graphen vor. Damit ist die Spitze des Graphen mit 1 belegt, aber nicht die Wurzel. Wir teilen diesen Fall in zwei Unterfälle auf:

Fall 1': $\begin{smallmatrix}2\\ \bar{2}\end{smallmatrix}$ ist Teilgraph des Funktionsgraphen. Dann ist damit der $\bar{2}$-Knoten eine 3, da 1 nicht möglich ist. Es gibt also einen Pfad $\begin{smallmatrix}1\\ 2\\ 3\end{smallmatrix}$ im Graphen, und damit ist $f(\mathrm{NP}) = (\mathrm{NP}, \odot, \text{co-NP})$.

Fall 1": $\begin{smallmatrix}2\\ \bar{2}\end{smallmatrix}$ ist kein Teilgraph des Funktionsgraphen. Dann muß die 2 an der Wurzel stehen, damit sie überhaupt vorkommen kann. Da auch eine 3 im Graphen enthalten ist, gibt es einen Pfad $\begin{smallmatrix}1\\ 3\\ 2\end{smallmatrix}$ im Graphen, und damit gilt $f(\mathrm{NP}) = (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$.

Fall 2: $\begin{smallmatrix}1\\ \bar{1}\end{smallmatrix}$ kommt nicht im Graphen vor. Damit ist die Wurzel des Graphen mit 1 belegt, aber nicht die Spitze. Wir teilen diesen Fall wieder in zwei Unterfälle auf:

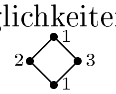
Fall 2': $\begin{smallmatrix}\bar{2}\\ 2\end{smallmatrix}$ kommt im Graphen vor. Dann muß der $\bar{2}$-Knoten ein 3-Knoten sein, da 1 nicht möglich ist. Es gibt also einen Pfad $\begin{smallmatrix}3\\ 2\\ 1\end{smallmatrix}$ im Graphen. Daraus folgt dann sofort $f(\mathrm{NP}) = (\text{co-NP}, \odot, \mathrm{NP})$.

Fall 2": $\begin{smallmatrix}\bar{2}\\ 2\end{smallmatrix}$ kommt nicht im Graphen vor. Dann muß 2 an der Spitze stehen, damit die Zahl überhaupt vorkommen kann. Da auch eine 3 vorkommen muß, gibt es einen Pfad $\begin{smallmatrix}2\\ 3\\ 1\end{smallmatrix}$ im Graphen, und damit gilt $f(\mathrm{NP}) = (\text{co-NP}, \mathrm{NP}, \odot)$.

Fall 3: Es müssen jetzt natürlich sowohl $\begin{smallmatrix}\bar{1}\\ 1\end{smallmatrix}$ als auch $\begin{smallmatrix}1\\ \bar{1}\end{smallmatrix}$ im Graphen vorkommen. Wir teilen diesen Fall in drei Unterfälle auf:

Fall 3': $\begin{smallmatrix}\bar{2}\\ 2\end{smallmatrix}$ kommt nicht im Graphen vor. Dann muß 2 an der Spitze stehen. Würde 2 auch an der Wurzel stehen, so wäre das ein Widerspruch zur Anfangsbedingung $\begin{smallmatrix}2\\ \bar{2}\\ 2\end{smallmatrix}$ kein Teilgraph. Würde 1 an der Wurzel stehen, so gäbe es keinen $\begin{smallmatrix}1\\ \bar{1}\end{smallmatrix}$ Pfad im Graphen. Es muß also 3 an der Wurzel stehen, und damit gibt es einen Pfad $\begin{smallmatrix}2\\ 1\\ 3\end{smallmatrix}$ im Graphen. Es gilt folglich $f(\mathrm{NP}) = (\odot, \mathrm{NP}, \text{co-NP})$.

Fall 3": $\begin{smallmatrix}2\\ \bar{2}\end{smallmatrix}$ kommt nicht im Graphen vor. Dann muß 2 an der Wurzel stehen. Würde 2 auch an der Spitze stehen, so wäre das ein Widerspruch zur Anfangsbedingung $\begin{smallmatrix}2\\ \bar{2}\\ 2\end{smallmatrix}$ kein Teilgraph. Würde 1 an der Spitze stehen, so gäbe es keinen $\begin{smallmatrix}\bar{1}\\ 1\end{smallmatrix}$ Pfad im Graphen. Es muß also 3 an der Spitze stehen, und damit gibt es einen Pfad $\begin{smallmatrix}3\\ 1\\ 2\end{smallmatrix}$ im Graphen. Es gilt folglich $f(\mathrm{NP}) = (\odot, \text{co-NP}, \mathrm{NP})$.

Fall 3"': Sowohl $\begin{smallmatrix}2\\ \bar{2}\end{smallmatrix}$ als auch $\begin{smallmatrix}\bar{2}\\ 2\end{smallmatrix}$ sind Teilgraphen des Graphen. Man kann leicht überprüfen, daß es dann nur zwei Möglichkeiten gibt, alle Bedingungen zu erfüllen, nämlich den Graphen  beziehungsweise den Graphen mit vertauschten 2 und 3. Für diese Graphen haben wir bereits gezeigt, daß $f(\mathrm{NP}) = \mathrm{P}_4$ beziehungsweise $f(\mathrm{NP}) = \mathrm{P}'_4$.

$\square$

5.2 Dreistellige Funktionen

Bestimmung von oberen Schranken

Dieser Abschnitt beschäftigt sich nun mit der Anwendung von dreistelligen, dreiwertigen Funktionen auf NP-Mengen, also mit Funktionen $f\colon \{0,1\}^3 \to \{1,2,3\}$. Auch hier untersuchen wir zunächst mit der Technik, die im Kapitel 2 vorgestellt wurde, welche oberen Schranken für die Klassen $f(\mathrm{NP})$ in Frage kommen. Die Form eines Funktionsgraphen einer dreistelligen, dreiwertigen Funktion und seine Interpretation sieht folgendermaßen aus, wenn wir die drei eingehenden NP-Mengen mit A, B, C bezeichnen:

Auf die gleiche Weise wie im vorigen Abschnitt erhalten wir folgenden Satz:

Satz 5.7 *Sei $f\colon \{0,1\}^3 \to \{1,2,3\}$ eine surjektive Funktion. Dann hat f eine der fünf folgenden oberen Schranken (oder eine Permutation davon):*

1. $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}) = (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$
2. $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, (\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}) \vee \text{co-NP}) = (\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot)$
3. $(\text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, (\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}) \vee \mathrm{NP}) = (\text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot)$
4. $(\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP})$

5. $(\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, (\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}) \vee \mathrm{NP}, (\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}) \vee \text{co-NP})$

Beweis. Der längste Pfad im Graphen einer dreistelligen, dreiwertigen Funktion hat die Länge vier. Die oberen Schranken können also nur aus den Klassen $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3$ bestehen. Der Graph hat nur eine Wurzel und nur eine Spitze. Das bedeutet, daß die Klassen $\mathrm{C}_1, \mathrm{D}_2, C_3$ (da sie ein + in der Wurzel haben müssen) und die Klassen $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3$ (da sie ein + in der Spitze haben müssen) nur einmal im Tripel vorkommen können. Man sieht sogar, daß beim Vorhandensein von D_2 im Tripel alle anderen vier Klassen ausgeschlossen sind. Es muß aber genau eine Klasse aus jeder Gruppe vorkommen, da sowohl die Wurzel als auch die Spitze des Graphen für eine der drei Funktionen f_1, f_2, f_3 mit + belegt ist, da f vollständig und eindeutig definiert ist. Es bleiben genau die oben genannten fünf Möglichkeiten und ihre Permutationen übrig. Daß es wirklich Funktionen für jede obere Schranke gibt, dafür kann man leicht Beispiele finden. □

Detaillierte Betrachtung der ersten drei oberen Schranken

Wir betrachten jetzt die einzelnen oberen Schranken nacheinander und untersuchen die entstehenden Klassen, die unter diesen Schranken liegen.

Satz 5.8 *Sei* $f\colon \{0,1\}^3 \to \{1,2,3\}$ *eine surjektive Funktion mit der oberen Schranke* $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$. *Unter der Voraussetzung* $\mathrm{NP} \neq \text{co-NP}$ *gilt dann*

$$f(\mathrm{NP}) = (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$$

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis des Satzes 5.3. □

Für die beiden nächsten oberen Schranken, die wir noch genauer untersuchen wollen, zeigen wir zunächst die folgende Eigenschaft:

Satz 5.9 *1.* $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot) = \{(A, C \cap \overline{B}, (B \cap \overline{A}) \cup \overline{C}) | A, B, C \in \mathrm{NP}$ *und* $A \subseteq B \subseteq C\}$

2. $(\text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot) = \{(\overline{C}, B \cap \overline{A}, A \cup (C \cap \overline{B})) | A, B, C \in \mathrm{NP}$ *und* $A \subseteq B \subseteq C\}$

Beweis.

zu 1. Zunächst betrachten wir die Definition von $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot)$. Es gilt, daß diese Klasse gleich der folgenden Klasse ist: $\{(A, C \cap \overline{B}, (B \cap \overline{A}) \cup \overline{(A \cup C)} \mid A, B, C \in \mathrm{NP} \text{ und } A \cap C \subseteq B \subseteq C\}$, denn wir wählen A beliebig aus NP und $C \cap \overline{B}$ beliebig aus $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}$ mit $B, C \in \mathrm{NP}$ und $B \subseteq C$ wie im Lemma 3.7 beschrieben. Wegen der Partitionseigenschaft gilt, daß $A \cap C \cap \overline{B} = \emptyset$. Daraus ergibt sich dann die Bedingung $A \cap C \subseteq B$. Wir zeigen jetzt die beiden Richtungen:

- $\supseteq$ Es gilt $A \subseteq B \subseteq C$ und damit natürlich auch $A \cup C = C$ und $A \cap C \subseteq B$. Damit sind alle Bedingungen erfüllt, und die Partition ist gleich der gewünschten.
- $\subseteq$ Sei $C' =_{\mathrm{def}} C \cup A$ und $B' =_{\mathrm{def}} B \cup A$. Dann gilt $A, B', C' \in \mathrm{NP}$ und $A \subseteq B' \subseteq C'$. Setzen wir B' und C' in die Partition ein, so erhalten wir genau die gewünschte Darstellung, denn $B' \cap \overline{C'}$ ist wegen der Bedingung $A \cap C \subseteq B \subseteq C$ gleich der Menge $B \cap \overline{C}$.

zu 2. Wir betrachten wieder die Definition von $(\text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot)$ und erhalten dann die Partitionsklasse $\{\overline{C}, B \cap \overline{A}, (C \cap \overline{B}) \cup (A \cap C)) \mid A, B, C \in \mathrm{NP} \text{ und } A \subseteq B \subseteq A \cup C\}$, denn wir wählen $\overline{C}$ beliebig aus co-NP und $B \cap \overline{A}$ beliebig aus $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}$ mit $A, B \in \mathrm{NP}$ und $A \subseteq B$. Wegen der Partitionseigenschaft gilt, daß $\overline{C} \cap B \cap \overline{A} = \emptyset$. Daraus ergibt sich dann die Bedingung $A \subseteq B \subseteq A \cup C$. Wir zeigen nun wieder die beiden Richtungen:

- $\supseteq$ Es gilt $A \subseteq B \subseteq C$. Damit folgt auch $A \cap C = A$ und $B \subseteq A \cup C$. Die Partition hat also die richtige Gestalt.
- $\subseteq$ Sei $A' = A \cap C$ und $B' = B \cap C$. Dann gilt $A', B', C \in \mathrm{NP}$ und $A \subseteq B \subseteq C$. Setzen wir A' und B' in die Partition ein, so erhalten wir genau die gewünschte Gestalt, denn $B' \cap \overline{A'}$ ist wegen der Bedingung $A \subseteq B \subseteq A \cup C$ gleich der Menge $B \cap \overline{A}$.

□

Diese Darstellung der Klassen werden wir in dem nun folgenden Lemma benutzen.

Lemma 5.10 *Sei $f\colon \{1, \ldots, l\}^m \to \{1, 2, 3\}$ eine Funktion.*

1. *Sei der Graph* 

Teil des Funktionsgraphen von f, dann gilt

$$(\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot) \subseteq f(\mathrm{NP}^{l-1}).$$

2. Sei der Graph $\begin{smallmatrix}\bullet 3\\ \bullet 2\\ \bullet 3\\ \bullet 1\end{smallmatrix}$ *Teil des Funktionsgraphen von* f*, dann gilt*

$$(\text{co-NP}, \text{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot) \subseteq f(\text{NP}^{l-1}).$$

Beweis.

zu 1. Sei $(A, C \cap \overline{B}, (B \cap \overline{A}) \cup \overline{C})$ eine beliebige Partition aus $(\text{NP}, \text{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot)$ mit $A, B, C \in \text{NP}$ und $A \subseteq B \subseteq C$ (siehe Satz 5.9). Dann belegen wir den Teilgraphen $\begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 3\\ \bullet 2\\ \bullet 3\end{smallmatrix}$ folgendermaßen: $\begin{smallmatrix}\bullet A\\ \bullet B\\ \bullet C\\ \bullet \Sigma^*\end{smallmatrix}$. Nach Satz 3.6 können wir den Rest des Graphen so auffüllen, daß keine neuen Mengen mehr hinzukommen. Dann gilt $(A, C \cap \overline{B}, (B \cap \overline{A}) \cup \overline{C}) \in f(\text{NP}^{l-1})$.

zu 2. Sei $(\overline{C}, B \cap \overline{A}, (C \cap \overline{B}) \cup A)$ eine beliebige Partition aus $(\text{co-NP}, \text{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot)$ mit $A, B, C \in \text{NP}$ und $A \subseteq B \subseteq C$ (siehe Satz 5.9). Dann belegen wir den Teilgraphen $\begin{smallmatrix}\bullet 3\\ \bullet 2\\ \bullet 3\\ \bullet 1\end{smallmatrix}$ folgendermaßen: $\begin{smallmatrix}\bullet A\\ \bullet B\\ \bullet C\\ \bullet \Sigma^*\end{smallmatrix}$. Den Rest des Graphen füllen wir nach Satz 3.6 so auf, daß keine neuen Mengen mehr hinzukommen. Dann gilt $(\overline{C}, B \cap \overline{A}, (C \cap \overline{B}) \cup A) \in f(\text{NP}^{l-1})$.

$\square$

Wir können jetzt den folgenden Satz formulieren:

Satz 5.11 *Sei* $f\colon \{0,1\}^3 \to \{1,2,3\}$ *eine surjektive Funktion mit der oberen Schranke* $(\text{NP}, \text{NP}\wedge\text{co-NP}, \odot)$. *Unter der Voraussetzung* $\text{NP}\wedge\text{co-NP} \neq \text{NP}\vee\text{co-NP}$ *ist dann* $f(\text{NP})$ *eine der Klassen* $(\text{NP}, \odot, \text{co-NP})$, $(\text{NP}, \text{co-NP}, \odot)$ *oder* $(\text{NP}, \text{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot)$.

Beweis. Auch hier wird wieder eine Fallunterscheidung benötigt. Zunächst können wir nach den Lemmata 3.1 und 3.2 feststellen, daß die Graphen $\begin{smallmatrix}\bullet \bar{1}\\ \bullet 1\end{smallmatrix}$ und $\begin{smallmatrix}\bullet 2\\ \bullet \bar{2}\\ \bullet 2\end{smallmatrix}$ nicht im Funktionsgraphen enthalten sein können. Wir können daraus sofort schließen, daß sich die 1 an der Spitze des Graphen befindet.

1. Fall: $\begin{smallmatrix}\bullet \bar{3}\\ \bullet 3\end{smallmatrix}$ kommt im Funktionsgraphen nicht vor. Dieser Fall kann nicht eintreten, denn da wir nur surjektive Funktionen betrachten, gäbe es sowohl einen 1-Knoten als auch einen 3-Knoten im Graphen, die sich beide bis zur Spitze fortpflanzen müßten.

2. Fall: $\begin{smallmatrix}\bullet 3\\ \bullet \bar{3}\end{smallmatrix}$ ist kein Teilgraph des Funktionsgraphen. Dann ist die Klasse $(\text{NP}, \text{NP}\wedge\text{co-NP}, \text{co-NP})$ eine obere Schranke des Funktionsgraphen, und mit Satz 5.8 gilt $f(\text{NP}) = (\text{NP}, \odot, \text{co-NP})$.

In den nun folgenden Fällen müssen jetzt sowohl ein Teilgraph $\begin{smallmatrix}\bullet & \bar{3}\\ | & \\ \bullet & 3\end{smallmatrix}$ als auch ein Teilgraph $\begin{smallmatrix}\bullet & 3\\ | & \\ \bullet & \bar{3}\end{smallmatrix}$ enthalten sein.

3. Fall: $\begin{smallmatrix}\bullet & \bar{2}\\ | & \\ \bullet & 2\end{smallmatrix}$ kommt im Funktionsgraphen nicht vor. Dieser Fall kann nicht eintreten, denn da wir nur surjektive Funktionen betrachten, gäbe es sowohl einen 1-Knoten als auch einen 2-Knoten im Graphen, die sich beide bis zur Spitze fortpflanzen müßten.

4. Fall: $\begin{smallmatrix}\bullet & 2\\ | & \\ \bullet & \bar{2}\end{smallmatrix}$ ist kein Teilgraph des Funktionsgraphen. Dann ist die Klasse $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP})$ eine obere Schranke des Funktionsgraphen, und mit Satz 5.8 gilt $f(\mathrm{NP}) = (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$.

Nun müssen auch noch Teilgraphen der Form $\begin{smallmatrix}\bullet & \bar{2}\\ | & \\ \bullet & 2\end{smallmatrix}$, wie auch der Form $\begin{smallmatrix}\bullet & 2\\ | & \\ \bullet & \bar{2}\end{smallmatrix}$ enthalten sein. Dann gibt es einen Teilgraphen $\begin{smallmatrix}\bullet & 1\\ | & \\ \bullet & 3\\ | & \\ \bullet & 2\\ | & \\ \bullet & 3\end{smallmatrix}$ im Funktionsgraphen, um alle Bedingungen erfüllen zu können. Damit gilt wegen Lemma 5.10 schon $f(\mathrm{NP}) = (\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot)$. □

Die obere Schranke $(\text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot)$ wird völlig analog behandelt, und man erhält folgendes Ergebnis:

Satz 5.12 *Sei* $f\colon \{0,1\}^3 \to \{1,2,3\}$ *eine surjektive Funktion mit der oberen Schranke* $(\text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot)$. *Unter der Voraussetzung* $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP} \neq \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}$ *ist dann* $f(\mathrm{NP})$ *eine der Klassen* $(\text{co-NP}, \odot, \mathrm{NP})$, $(\text{co-NP}, \mathrm{NP}, \odot)$ *oder* $(\text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot)$.

Beweis. Zunächst können wir nach den Lemmata 3.1 und 3.2 feststellen, daß die Graphen $\begin{smallmatrix}\bullet & 1\\ | & \\ \bullet & \bar{1}\end{smallmatrix}$ und $\begin{smallmatrix}\bullet & 2\\ | & \\ \bullet & \bar{2}\\ | & \\ \bullet & 2\end{smallmatrix}$ nicht im Funktionsgraphen enthalten sein können. Wir können daraus sofort schließen, daß sich die 1 an der Wurzel des Graphen befindet.

1. Fall: $\begin{smallmatrix}\bullet & 3\\ | & \\ \bullet & \bar{3}\end{smallmatrix}$ kommt im Funktionsgraphen nicht vor. Dieser Fall kann nicht eintreten, denn da wir nur surjektive Funktionen betrachten, gibt es sowohl einen 1-Knoten als auch einen 3-Knoten im Graphen, die beide an der Wurzel beginnen müßten, um überhaupt im Graphen vorkommen zu können.

2. Fall: $\begin{smallmatrix}\bullet & \bar{3}\\ | & \\ \bullet & 3\end{smallmatrix}$ ist kein Teilgraph des Funktionsgraphen. Dann ist die Klasse $(\text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \mathrm{NP})$ eine obere Schranke des Funktionsgraphen, und mit Satz 5.8 gilt $f(\mathrm{NP}) = (\text{co-NP}, \odot, \mathrm{NP})$.

In den nun folgenden Fällen müssen jetzt sowohl ein Teilgraph $\genfrac{}{}{0pt}{}{\bar{3}}{3}$ als auch ein Teilgraph $\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{\bar{3}}$ enthalten sein.

3. Fall: $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{\bar{2}}$ kommt im Funktionsgraphen nicht vor. Dieser Fall kann nicht eintreten, denn da wir nur surjektive Funktionen betrachten, gibt es sowohl einen 1-Knoten als auch einen 2-Knoten im Graphen, die beide an der Wurzel stehen müßten.

4. Fall: $\genfrac{}{}{0pt}{}{\bar{2}}{2}$ ist kein Teilgraph des Funktionsgraphen. Dann ist die Klasse $(\text{co-NP}, \text{NP}, \text{NP} \wedge \text{co-NP})$ eine obere Schranke des Funktionsgraphen, und mit Satz 5.8 gilt $f(\text{NP}) = (\text{co-NP}, \text{NP}, \odot)$.

Nun müssen auch noch Teilgraphen sowohl der Form $\genfrac{}{}{0pt}{}{\bar{2}}{2}$ als auch der Form $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{\bar{2}}$ enthalten sein. Dann gibt es einen Teilgraphen $\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ im Funktionsgraphen, um alle Bedingungen erfüllen zu können. Damit gilt wegen Lemma 5.10 schon $f(\text{NP}) = (\text{co-NP}, \text{NP} \wedge \text{co-NP}, \odot)$. □

Beispiele für die beiden verbleibenden oberen Schranken

Für die beiden anderen oberen Schranken gilt offensichtlich, daß wir nicht zwei Komponenten frei wählen können wie bisher, denn sonst wäre die dritte Klasse das Komplement der Vereinigung der beiden anderen Klassen. Wir haben also nur für eine Komponente der Partition freie Auswahl, die zweite Komponente hängt dann schon von der Wahl der ersten ab. Die dritte ergibt sich wie immer aus den anderen beiden. Um eine Vorstellung dieser Klassen zu erhalten, betrachten wir für beide oberen Schranken je ein Beispiel.

Beispiel. 1. Seien $A, B, C \in \text{NP}$ und $f\colon \{0,1\}^3 \to \{1,2,3\}$ definiert durch:

x	y	z	$f(x,y,z)$	$f_1(x,y,z)$	$f_2(x,y,z)$	$f_3(x,y,z)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	2	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	3	0	0	1
1	0	0	2	0	1	0
1	0	1	3	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Der Graph hat, wie wir uns durch Hinzeichnen leicht klarmachen können, die obere Schranke $(\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP})$, und es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{NP}) \;\; = \;\; \{(\; & \overline{(A \cup C)} \cup (A \cap B),\; (A \cup C) \cap \overline{(B \cup (A \cap C))}, \\ & (C \cap (A \cup B)) \cap \overline{(A \cap B \cap C)} \;) \mid A, B, C \in \mathrm{NP}\} \end{aligned}$$

Sei nun folgende Vereinbarung getroffen: $X := A \cup C$, $Y := C \cap (A \cup B)$ und $Z := A \cap B$, so gilt hier die Vereinfachung

$$f(\mathrm{NP}) = \{(\overline{X} \cup Z, X \cap \overline{(Y \cup Z)}, Y \cap \overline{Z}) | X, Y, Z \in \mathrm{NP} \text{ und } Z \subseteq X, Y \subseteq X\}$$

Zum Beweis setzen wir in der einen Richtung die Definitionen von X, Y, Z einfach ein. In der anderen Richtung erhalten wir für $B \subseteq A$ und $C \subseteq A$ das Gewünschte.

2. Seien $A, B, C \in \mathrm{NP}$ und $f\colon \{0,1\}^3 \to \{1,2,3\}$ definiert durch:

x	y	z	$f(x,y,z)$	$f_1(x,y,z)$	$f_2(x,y,z)$	$f_3(x,y,z)$
0	0	0	3	0	0	1
0	0	1	3	0	0	1
0	1	0	2	0	1	0
0	1	1	3	0	0	1
1	0	0	3	0	0	1
1	0	1	3	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	2	0	1	0

Der Graph hat, wie wir uns durch Hinzeichnen leicht klarmachen können, die obere Schranke $(\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, (\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}) \vee \mathrm{NP}, (\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}) \vee \text{co-NP})$, und es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} f(NP) \;\; = \;\; \{(\; & (A \cap B) \cap \overline{C},\; (B \cap \overline{(A \cup C)}) \cup (A \cap B \cap C), \\ & ((B \cap C) \cap \overline{A}) \cup \overline{B} \;) \mid A, B, C \in \mathrm{NP}\} \end{aligned}$$

6

Dreiwertige Funktionen angewandt auf Dreier-Partitionen

Genau wie bei der Booleschen Hierarchie betrachten wir auch weiterhin Klassen $f(\mathcal{K})$, wobei die Partitionsklasse $\mathcal{K}$ noch festgelegt werden muß. Da wir hier dreiwertige Funktionen auf Dreier-Partitionsklassen untersuchen, müssen wir eine Dreier-Partitionsklasse als Grundklasse finden. Um die entstehenden Klassen mit den Klassen der Booleschen Hierarchie vergleichen zu können, suchen wir eine Grundklasse, die mit der Klasse NP vergleichbar ist. Wenn wir die Partitionsschreibweise auf den Fall $k = 2$ übertragen, so erhalten wir für $A \in \mathrm{NP}$ die Schreibweise $(A, \overline{A}) \in (\mathrm{NP}, \text{co-NP}) = (\mathrm{NP}, \odot)$. Deshalb wählen wir als Ausgangsklasse die Partitionsklasse

$$\mathrm{NP}^2 = (\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot),$$

also die Klasse der Partitionen $A = (A_1, A_2, A_3)$ mit $A_1 \in \mathrm{NP}$, $A_2 \in \mathrm{NP}$ und folglich $A_3 \in \text{co-NP}$, da sich die dritte Menge als $\overline{A_1 \cup A_2}$ ergibt. Diese Dreier-Partitionsklasse ist in ihrer Struktur mit der Sprachklasse NP am besten vergleichbar. Die Mengen A_1 und A_2 können wir bis auf die Forderung $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ frei aus NP wählen.

Wir werden also nun dreiwertige Funktionen auf die Klasse NP^2 anwenden und die dabei entstehenden Klassen betrachten. In Definition 4.7 definierten wir für $f\colon \{1,2,3\}^m \to \{1,2,3\}$:

$$A \in f(\mathrm{NP}^2) \iff_{\text{def}} \exists B_1, B_2, \ldots, B_m \in \mathrm{NP}^2 \text{ mit } c_A(x) = f\left(c_{B_1}(x), c_{B_2}(x), \ldots, c_{B_m}(x)\right)$$

Wir werden uns auch hier nur auf surjektive Funktionen beschränken. Die Partitionseigenschaft der Partitionen in $f(\mathrm{NP}^2)$ ergibt sich durch die vollständige Definition von f.

Wir verwenden die Ergebnisse aus den ersten Kapiteln und formen $f\colon \{1,2,3\}^m \to$

$\{1,2,3\}$ um zu drei booleschen Funktionen f_1, f_2, f_3, die nach Definition 4.8 folgendermaßen aussehen für $i = 1,2,3$: $f_i \colon \{0,1\}^{2m} \to \{1,2,3\}$ mit

$$f_i(x_{(1,1)}, x_{(2,1)}, x_{(1,2)}, x_{(2,2)}, \ldots, x_{(1,m)}, x_{(2,m)}) =_{\text{def}}$$

$$\begin{cases} 1 & \text{, falls } x_j = \mathit{code}_3^{-1}(x_{(1,j)}, x_{(2,j)}) \text{ für } j = 1, \ldots, m \\ & \text{ und } f(x_1, \ldots, x_m) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Auch hier wollen wir nicht für jede dreiwertige Funktion f drei Funktionsgraphen für f_1, f_2, f_3 zeichnen, sondern nur einen, wobei wir an den Knoten $(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{1m}, a_{2m})$ auftragen, welchen Wert f an der Stelle

$$(\mathit{code}_3^{-1}(a_{11}, a_{21}), \ldots, \mathit{code}_3^{-1}(a_{1m}, a_{2m}))$$

annimmt. Wie man hier feststellt, ist dieser Wert nicht definiert, falls es ein $j \in \{1, \ldots m\}$ gibt mit $a_{1j} = a_{2j} = 1$. Wir wenden die Funktion f auf m Dreier-Partitionen $A_1, \ldots, A_m$ an. Wir bezeichnen für $i = 1, \ldots, m$ die Komponenten der Partition folgendermaßen: $A_i = (A_{1i}, A_{2i}, \overline{A_{1,i} \cup A_{2,i}})$. Wie wir im Hilfssatz 4.10 des vierten Kapitels bereits gesehen haben, können wir das Tupel (a_{1j}, a_{2j}) auch interpretieren als Tupel $(c_{A_{1j}}, c_{A_{2j}})$. Das Tupel $(1,1)$ an der j-ten Stelle steht also für die Menge $A_{1j} \cap A_{2j}$. Diese Menge ist leer, da A_j eine Partition darstellt. Das heißt also, alle Knoten, die die Bedingung „*es existiert ein* $j \in \{1, \ldots m\}$ *mit* $a_{1j} = a_{2j} = 1$ “ erfüllen, repräsentieren die leere Menge. Es ist deshalb irrelevant, welchen Wert die Funktionen f_1, f_2, f_3 oder die Funktion f an dieser Stelle annehmen. Der Einfachheit halber werden wir diese Knoten in der weiteren Arbeit streichen.

Wir untersuchen nun die Klassen $f(\mathrm{NP}^2)$ mit $f \colon \{1,2,3\}^m \to \{1,2,3\}$ und beginnen mit $m = 1$.

6.1 Einstellige Funktionen

Die einstelligen, surjektiven Funktionen sind lediglich Permutationen der drei Zahlen $1,2,3$, es entstehen also nur die Klassen $(\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP})$ und $(\odot, \mathrm{NP}, \mathrm{NP})$ neu, da eine Permutation der Zahlen $1,2,3$ in der charakteristischen Funktion einer Dreier-Partition lediglich die Umstellung der drei Sprachen im Tripel bewirkt.

6.2 Zweistellige Funktionen

Funktionsgraph

Die Form eines Funktionsgraphen von Funktionen der Form $f\colon \{1,2,3\}^2 \to \{1,2,3\}$ wird unten abgebildet, wobei die Knoten, die gestrichen werden können, da sie die leere Menge repräsentieren, noch aufgetragen sind. Daneben wurde die Mengeninterpretation des Graphen aufgetragen, wobei wir die beiden in $f(\mathrm{NP}^2)$ eingehenden Dreier-Partitionen mit $A = (A_1, A_2, \overline{A_1 \cup A_2})$ und $B = (B_1, B_2, \overline{B_1 \cup B_2})$ bezeichnen.

Bei der Mengeninterpretation sieht man auch noch einmal sehr deutlich, warum die durchgestrichenen Knoten gestrichen werden können. An dem Knoten (1101) würde zum Beispiel die Menge $A_1 \cap B_1 \cap B_2$ aufgetragen werden. Diese Menge ist aber leer, da $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Wir interpretieren den Funktionsgraphen dann folgendermaßen, daß eine 1 an einem Knoten gleichbedeutend ist mit einem + am Knoten des Funktionsgraphen von f_1 und einem − am Knoten der Funktionsgraphen von f_2 und f_3. Analog werden die Werte 2 und 3 an den Knoten behandelt. Wir schreiben also zum Beispiel „$\,^{i}_{i}$ ist Teilgraph des Funktionsgraphen von f“ anstelle von „$\,^{+}_{-}$ ist Teilgraph des Funktionsgraphen von f_i“ für $i = 1,2,3$.

Bestimmung von oberen Schranken

Wir gehen hier völlig analog vor wie im vorigen Kapitel und bestimmen zunächst obere Schranken, unter die wir die entstehenden Partitionsklassen einordnen können. Wir wollen nun zunächst ein Beispiel betrachten, um die weitere Vorgehensweise zu veranschaulichen.

Beispiel. Sei $f\colon \{1,2,3\}^2 \to \{1,2,3\}$ eine Funktion definiert durch

x	y	$f(x,y)$
1	1	2
1	2	3
1	3	1
2	1	3
2	2	1
2	3	2
3	1	1
3	2	2
3	3	3

wird zu

x_1	x_2	y_1	y_2	f_1	f_2	f_3	entspricht
0	0	0	0	0	0	1	$f(3,3)$
0	0	0	1	0	1	0	$f(3,2)$
0	0	1	0	1	0	0	$f(3,1)$
0	0	1	1	0	0	0	undef.
0	1	0	0	0	1	0	$f(2,3)$
0	1	0	1	1	0	0	$f(2,2)$
0	1	1	0	0	0	1	$f(2,1)$
0	1	1	1	0	0	0	undef.
1	0	0	0	1	0	0	$f(1,3)$
1	0	0	1	0	0	1	$f(1,2)$
1	0	1	0	0	1	0	$f(1,1)$
1	0	1	1	0	0	0	undef.
1	1	0	0	0	0	0	undef.
1	1	0	1	0	0	0	undef.
1	1	1	0	0	0	0	undef.
1	1	1	1	0	0	0	undef.

Als nächstes zeichnen wir den Graphen dieser drei Funktionen, wobei wir an den Knoten die Werte $1, 2, 3$ eintragen.

Wir wenden nun den „mind change"-Algorithmus an. Betrachten wir also nun die längsten Pfade im Graphen für alle drei Funktionen, so erhalten wir die folgenden Implikationen:

$$\begin{array}{rclcrclcl} c_1(f) & = & -+- & \Rightarrow & m_1(f) & = & 2 & \Rightarrow & f(\mathrm{NP}^2)_1 = \mathrm{C}_2 \\ c_2(f) & = & -+- & \Rightarrow & m_2(f) & = & 2 & \Rightarrow & f(\mathrm{NP}^2)_2 = \mathrm{C}_2 \\ c_3(f) & = & +-+ & \Rightarrow & m_3(f) & = & 2 & \Rightarrow & f(\mathrm{NP}^2)_3 = \mathrm{D}_2 \end{array}$$

Es ergibt sich folgender Satz:

Satz 6.1 *Sei $f(x,y)$ wie in der Tabelle beschrieben, dann ist*

$$f(\mathrm{NP}^2) \subseteq (\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP})$$

Auf diese Art und Weise erhalten wir also obere Schranken für dreiwertige Funktionen angewandt auf NP^2-Partitionen.

Im folgenden untersuchen wir die möglichen oberen Schranken für alle zweistelligen dreiwertigen Funktionen analog zum vorigen Kapitel. Wir erhalten folgenden Satz.

Satz 6.2 *Sei $f : \{1,2,3\}^2 \to \{1,2,3\}$ eine surjektive Funktion. Dann gibt es fünf verschiedene obere Schranken für $f(\mathrm{NP}^2)$:*

1. $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \text{co-NP}) = (\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot)$
2. $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}) = (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$
3. $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}) = (\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$
4. $(\text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP})$
5. $(\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP})$

und natürlich ihre Permutationen.

Beweis. Zunächst läßt sich feststellen, daß der längste Pfad im Graphen höchstens zwei Wechsel haben kann, so daß sich alle drei Komponenten aus den vier Klassen $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{D}_1$ und D_2 zusammensetzen. Wegen der Partitionseigenschaft ist der Graph so gestaltet, daß jeder Knoten für genau eine Funktion mit $+$ belegt ist und für die anderen beiden mit $-$. Daraus können wir sofort schließen, daß genau eine der beiden Klassen D_1 und C_2 genau einmal im Tripel vorkommen muß, da nur für diese beiden Klassen die Wurzel mit $+$ belegt sein muß, und dies nur für eine Komponente vorkommen kann. Nun muß nur noch die Möglichkeit $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP})$ ausgeschlossen werden. Angenommen es gäbe einen Graphen mit dieser oberen Schranke. Dann gäbe es einen Pfad für die $\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}$-Menge, der sich durch $+ - +$ charakterisieren läßt. Dann gibt es aber auch für eine der beiden anderen Funktionen einen Pfad $- + -$, nämlich den gleichen. Für eine der beiden Funktionen ist die obere Schranke NP also zu niedrig, wenn wir annehmen, daß die Inklusion zwischen NP und $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}$ echt ist. (Nimmt man die Gleichheit an, erübrigt sich die Diskussion ohnehin.) Es verbleiben noch die fünf verschiedenen oberen Schranken und ihre Permutationen. Daß diese tatsächlich vorkommen, dafür lassen sich sehr leicht Beispiele finden. □

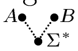
Wir haben nun also obere Schranken gefunden, unter die wir alle entstehenden Klassen einordnen können.

Detaillierte Betrachtung der ersten drei oberen Schranken

Im folgenden werden wir für jede obere Schranke einzeln betrachten, welche Partitionsklassen die enthaltenen Funktionen erzeugen. Dazu verwenden wir die Eigenschaften der Funktionsgraphen, die wir im dritten Kapitel bewiesen haben. Zunächst charakterisieren wir die Klasse $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot)$ auf folgende Weise:

Lemma 6.3 *Sei*  *im Funktionsgraphen enthalten, dann gilt*

$$(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot) \subseteq f^{\mathrm{NP}}.$$

Beweis. Sei $(A, B, \overline{A \cup B})$ eine beliebige Partition aus $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot)$. Dann belegen wir den Teilgraphen folgendermaßen:  Der restliche Graph wird nach 3.6 so aufgefüllt, daß die anderen Knoten keinen Beitrag liefern. Dann erzeugt die Funktion gerade die gewünschte Partition $(A, B, \overline{A \cup B})$, denn alle 1-Knoten zusammen ergeben A, alle 2-Knoten zusammen ergeben B, und die Vereinigung der 3-Knoten ist $\Sigma^* \backslash (A \cup B) = \overline{A \cup B}$. $\square$

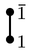
Bemerkung. Der Graph wurde deshalb mit gestrichelten Linien gezeichnet, um zu verdeutlichen, daß beliebig viele Knoten zwischen dem 3- und den 1- und 2-Knoten liegen können. Diese Knoten beeinträchtigen das Ergebnis nicht.

Wir können nun den folgenden Satz zeigen:

Satz 6.4 *Für alle surjektiven Funktionen* $f\colon \{1, 2, 3\}^2 \to \{1, 2, 3\}$ *mit der oberen Schranke* $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot)$ *gilt unter der Voraussetzung* $\mathrm{NP} \neq \text{co-NP}$

$$f(\mathrm{NP}^2) = (\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot).$$

Dasselbe gilt auch für die Permutationen von $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot)$.

Beweis. Wir wollen uns zunächst die Eigenschaften betrachten, die ein Graph mit dieser oberen Schranke besitzt. Es gilt, daß sowohl  als auch  nicht im Graphen vorkommen können wegen Lemma 3.1.1. Daraus folgt dann automatisch, daß die 3 an der Wurzel des Graphen stehen muß, denn wenn 1 oder 2 an der Wurzel stehen, dann kann keine andere Ziffer mehr im Graphen vorkommen wegen der ersten Eigenschaft. Wegen der Surjektivität von f müssen aber alle Zahlen im Graphen vorkommen. Es gilt also zusätzlich:  kommt im Graphen vor. Damit gilt nach Lemma 6.3, daß $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot) \subseteq f(\mathrm{NP}^2)$. Die andere Richtung war bereits vorausgesetzt. Damit folgt die Behauptung. Für die Permutationen vertausche man einfach die Zahlen $1, 2, 3$ entsprechend. $\square$

Da wir die zweite obere Schranke schon im vorigen Kapitel im Lemma 5.2 durch einen Teilgraphen charakterisiert haben, können wir den folgenden Satz sofort zeigen:

Satz 6.5 *Für alle surjektiven Funktionen* $f\colon \{1,2,3\}^2 \to \{1,2,3\}$ *mit der oberen Schranke* $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$ *gilt*

$$\begin{aligned} f(\mathrm{NP}^2) &= (\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP}) \ \textit{oder} \\ f(\mathrm{NP}^2) &= (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot). \end{aligned}$$

Dasselbe gilt auch für die Permutationen von $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$.

Beweis. Wir betrachten den Funktionsgraphen einer Funktion mit der oberen Schranke $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$. Dann gilt nach den Lemmata 3.1.1 und 3.1.2, daß $\begin{smallmatrix}\bar{1}\\ 1\end{smallmatrix}$ und $\begin{smallmatrix}2\\ \bar{2}\end{smallmatrix}$ keine Teilgraphen des Gesamtgraphen sind. Dann muß 2 an der Wurzel stehen, denn sonst könnte die 2 nicht mehr vorkommen. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

- **Fall 1:** Es kommt $\begin{smallmatrix}\bar{3}\\ 3\end{smallmatrix}$ nicht im Graphen vor. Dann hat der Graph die obere Schranke $(\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP})$, denn für 1 und 3 ist der längste mögliche Pfad $-+$. Dann gilt aber die gleiche Argumentation wie im Beweis zuvor, wobei man 2 und 3 vertauschen muß, und man erhält $f(\mathrm{NP}^2) = (\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP})$.
- **Fall 2:** Es kommt $\begin{smallmatrix}\bar{3}\\ 3\end{smallmatrix}$ im Graphen vor. Daraus folgt, daß $\begin{smallmatrix}1\\ 3\end{smallmatrix}$ ein Teilgraph ist, denn eine 2 kann wegen der obigen Eigenschaft nicht nach einer 3 kommen. Es gibt also einen Pfad im Graphen der Form $\begin{smallmatrix}1\\ 3\\ 2\end{smallmatrix}$, und damit gilt nach Lemma 5.2, daß $f(\mathrm{NP}^2) \supseteq (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$. Die andere Richtung gilt nach Voraussetzung.

$\square$

Da bei der dritten oberen Schranke $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$ die Fallunterscheidung noch feiner wird, werden wir zunächst Klassen von Dreier-Partitionen definieren, die verwendet werden:

Definition 6.6

- $\mathrm{P}_1 =_{\mathrm{def}} \{(A, B \cup \overline{(A \cup C)}, C \cap \overline{B})\colon\ A, B, C \in \mathrm{NP}$ *und* $A \cap C = \emptyset, B \subseteq C\}$
- $\mathrm{P}_2 =_{\mathrm{def}} \{(A, B \cup \overline{(C \cup D)}, (C \cup D) \cap \overline{(A \cup B)})\colon\ A, B, C, D \in \mathrm{NP}$ *und* $C \cap D = \emptyset, A \subseteq C, B \subseteq D\}$
- $\mathrm{P}_3 =_{\mathrm{def}} \{(A, B \cup \overline{(C \cup D)}, (C \cup D) \cap \overline{(A \cup B)})\colon\ A, B, C, D \in \mathrm{NP}$ *und* $A \cap D = \emptyset, B \cap C = \emptyset, A \subseteq C, B \subseteq D\}$

Mit dem folgenden Satz setzen wir diese Klassen in Beziehung zueinander:

Satz 6.7 *Es gilt* $\mathrm{P}_1 \subseteq \mathrm{P}_2 \subseteq \mathrm{P}_3 \subseteq (\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$.

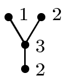
Beweis. $\mathrm{P}_1 \subseteq \mathrm{P}_2$**:** Sei X eine beliebige Partition aus P_1. Dann gibt es nach Definition $A, B, C \in \mathrm{NP}, A \cap C = \emptyset$ und $B \subseteq C$ mit $X = (A, B \cup \overline{(A \cup C)}, C \cap \overline{B})$. Setzen wir nun $C' =_{\text{def}} A$ und $D =_{\text{def}} C$, so können wir X auch schreiben als $(A, B \cup \overline{(C' \cup D)}, (C' \cup D) \cap \overline{(A \cup B)})$ und es gelten die Bedingungen $C' \cap D = A \cap C = \emptyset, A \subseteq A = C'$ und $B \subseteq C = D$. Es gilt also $X \in \mathrm{P}_2$.

$\mathrm{P}_2 \subseteq \mathrm{P}_3$**:** Dies ist sehr leicht zu sehen, denn für P_2 gelten die Bedingungen $C \cap D = \emptyset, A \subseteq C$ und $B \subseteq D$. Damit gelten aber auch automatisch die Bedingungen $A \cap D = \emptyset$ und $B \cap C = \emptyset$, die für P_3 verlangt waren. Mehr hat sich nicht verändert.

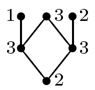
$\mathrm{P}_3 \subseteq (\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$**:** Sei X eine beliebige Partition aus P_3. Dann gibt es nach Definition Mengen $A, B, C, D \in \mathrm{NP}, A \cap D = \emptyset, B \cap C = \emptyset, A \subseteq C$ und $B \subseteq D$, so daß $X = (A, B \cup \overline{(C \cup D)}, (C \cup D) \cap \overline{(A \cup B)})$. Wie man leicht sieht, ist die erste Komponente A aus NP und die zweite Komponente $B \cup \overline{(C \cup D)}$ aus $\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}$. Außerdem ist X eine Partition. Daher gilt $X \in (\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$. □

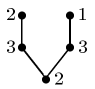
Im folgenden Lemma stellen wir Hilfswerkzeuge zur Bestimmung von Partitions-Klassen zusammen.

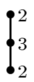
Lemma 6.8 *Sei* $f\colon \{1,2,3\}^2 \to \{1,2,3\}$ *eine surjektive Funktion mit zugehörigem Funktionsgraph. Dann gilt:*

1. *Ist der Graph*  *ein Teilgraph des Funktionsgraphen, so gilt*

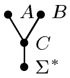
$$(\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot) \subseteq f(\mathrm{NP}^2).$$

2. *Ist der Graph*  *ein Teilgraph des Funktionsgraphen, so gilt* $\mathrm{P}_3 \subseteq f(\mathrm{NP}^2)$.

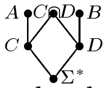
3. *Ist der Graph*  *ein Teilgraph des Funktionsgraphen, so gilt* $\mathrm{P}_2 \subseteq f(\mathrm{NP}^2)$.

4. *Ist der Graph*  *ein Teilgraph des Funktionsgraphen, so gilt* $\mathrm{P}_1 \subseteq f(\mathrm{NP}^2)$.

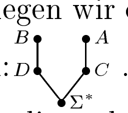
Beweis.

zu 1. Wir verwenden auch hier wieder die Auffüll-Methode aus Satz 3.6. Sei X eine beliebige Partition aus $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$, dann gilt $X = (A, B \cup \overline{C}, C \cap \overline{(A \cup B)})$ mit $A, B, C \in \mathrm{NP}$ und $A \subseteq C, B \subseteq C, A \cap B = \emptyset$, denn jede Menge aus $\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}$ läßt sich schreiben als $B \cup \overline{C}$ mit $B, C \in \mathrm{NP}$ und $B \subseteq C$ (siehe Lemma 3.7). Außerdem gilt $A \cap (B \cup \overline{C}) = \emptyset$ wegen der Partitionseigenschaft, und damit gilt $A \cap B = \emptyset$ und $A \subseteq C$. Belegen wir jetzt den Teilgraphen folgendermaßen: 

, so erhalten wir genau die gewünschte Partition, wenn wir den Rest des Graphen so auffüllen, daß keine neuen Mengen dazukommen.

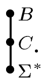
zu 2. Sei X eine beliebige Partition aus P_3. Dann gilt nach Definition $X = (A, B \cup \overline{(C \cup D)}, (C \cup D) \cap \overline{(A \cup B)})$ mit $A, B, C, D \in \mathrm{NP}$ und $A \cap D = \emptyset, B \cap C = \emptyset, A \subseteq C, B \subseteq D$. Belegen wir den Teilgraphen folgenderma-ßen: 

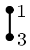
. Dann erzeugen wir damit genau die gewünschte Partition, wenn durch die restlichen Knoten des Graphen nichts neues hinzukommt.

zu 3. Sei X eine beliebige Partition aus P_2, dann gilt nach Definition $X = (A, B \cup \overline{(C \cup D)}, (C \cup D) \cap \overline{(A \cup B)})$ mit $A, B, C, D \in \mathrm{NP}$ und $C \cap D = \emptyset, A \subseteq C, B \subseteq D$. Belegen wir die Knoten des oben angegebenen Teilgraphen folgendermaßen: 

. Dann erhalten wir genau die gewünschte Partition, wenn durch die anderen Knoten des Graphen nichts neues hinzukommt.

zu 4. Sei X eine beliebige Partition aus P_1. Dann gibt es nach Definition drei Mengen $A, B, C \in \mathrm{NP}$ mit $X = (A, B \cup \overline{(A \cup C)}, C \cap \overline{B})$ und $A \cap C = \emptyset, B \subseteq C$. Da wir von einer surjektiven Funktion ausgegangen sind, gibt es mindestens einen 1-Knoten im Graphen. Gibt es einen 

- Teilgraphen, dann sind wir bereits in einem der oberen Fälle gelandet, und die Behauptung ist bewiesen wegen Satz 6.7. Ansonsten kommen die 1-Knoten nur nach 2-Knoten im Graphen vor. Wir wählen uns beliebig einen heraus und belegen diesen mit der Menge A. Den im Lemma angegebenen Teilgraphen belegen wir folgendermaßen: 

. Damit erhalten wir genau die gewünschte Partition, soweit die anderen Knoten nur die leere Menge repräsentieren. Die Bedingung $C \cap A = \emptyset$ ist erfüllt, da der Teilgraph 

ausgeschlossen war.

$\square$

Wir können jetzt den folgenden Satz formulieren:

Satz 6.9 *Sei* $f\colon \{1,2,3\}^2 \to \{1,2,3\}$ *eine surjektive Funktion mit der oberen Schranke* $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$. *Unter der Voraussetzung* $\mathrm{NP} \vee \text{co-NP} \neq \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}$ *ist* $f(\mathrm{NP}^2)$ *eine der folgenden Klassen:*

- $(\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP})$
- $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot)$
- $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$
- P_1
- P_2
- P_3
- $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$

Für die Permutationen von $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$ permutiere man die Klassen entsprechend.

Beweis. Es gilt zunächst, da f die obere Schranke $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$ besitzt, nach den Lemmata 3.1.1 und 3.2.1: $\begin{smallmatrix}\bullet\bar{1}\\ |\\ \bullet 1\end{smallmatrix}$ und $\begin{smallmatrix}\bullet\bar{2}\\ |\\ \bullet 2\\ |\\ \bullet\bar{2}\end{smallmatrix}$ kommen im Graphen nicht vor. Zum Beweis des Satzes benötigen wir mehrere Fallunterscheidungen.

Fall 1: $\begin{smallmatrix}\bullet\bar{3}\\ |\\ \bullet 3\end{smallmatrix}$ ist kein Teilgraph des Graphen von f. Da auch $\begin{smallmatrix}\bullet\bar{1}\\ |\\ \bullet 1\end{smallmatrix}$ nicht vorkommt, folgt damit nach Lemma 3.1, daß $f(\mathrm{NP}^2) \subseteq (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \mathrm{NP})$. Außerdem gilt dann, daß $\begin{smallmatrix}{}^1\bullet & & \bullet^3\\ & \bullet_2 & \end{smallmatrix}$ Teil des Graphen sein muß, da alle drei Ziffern im Graphen vorkommen müssen. Es gilt also nach Lemma 6.3, daß $f(\mathrm{NP}^2) = (\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP})$.

Fall 2: $\begin{smallmatrix}\bullet 3\\ |\\ \bullet\bar{3}\end{smallmatrix}$ ist kein Teilgraph des Graphen von f. Das heißt, die 3 muß an der Wurzel des Graphen stehen, sonst könnte sie nicht mehr vorkommen. Dann gilt wegen der beiden Bedingungen „$\begin{smallmatrix}\bullet\bar{1}\\ |\\ \bullet 1\end{smallmatrix}$ und $\begin{smallmatrix}\bullet\bar{2}\\ |\\ \bullet 2\\ |\\ \bullet\bar{2}\end{smallmatrix}$ kommen nicht im Graphen vor“, daß $\begin{smallmatrix}\bullet\bar{2}\\ |\\ \bullet 2\end{smallmatrix}$ nicht im Graphen enthalten sein kann. Mit der gleichen Argumentation wie im Fall vorher mit vertauschten 2 und 3 gilt dann $f(\mathrm{NP}^2) = (\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot)$.

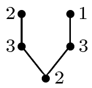
In den folgenden Fällen gilt jetzt immer, daß sowohl $\left|\begin{smallmatrix}\bar{3}\\ 3\end{smallmatrix}\right.$ als auch $\left|\begin{smallmatrix}3\\ \bar{3}\end{smallmatrix}\right.$ im Graphen vorkommen müssen.

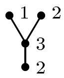
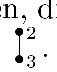
Fall 3: $\left|\begin{smallmatrix}2\\ \bar{2}\end{smallmatrix}\right.$ ist kein Teilgraph des Funktionsgraphen. Dann gilt $f(\mathrm{NP}^2) \subseteq (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$. Außerdem muß der Pfad $\left|\begin{smallmatrix}1\\ 3\\ 2\end{smallmatrix}\right.$ im Graphen enthalten sein, um alle Bedingungen erfüllen zu können. Nach Lemma 5.2 gilt dann schon $f(\mathrm{NP}^2) = (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$.

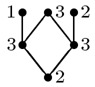
Fall 4: $\left|\begin{smallmatrix}\bar{2}\\ 2\end{smallmatrix}\right.$ ist kein Teilgraph des Funktionsgraphen. Dieser Fall ist nicht möglich, denn dann kann es keinen Teilgraphen $\left|\begin{smallmatrix}3\\ \bar{3}\end{smallmatrix}\right.$ mehr geben, was der Voraussetzung widerspricht.

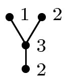
In den folgenden Fällen müssen jetzt alle vier Teilgraphen vorkommen: $\left|\begin{smallmatrix}\bar{3}\\ 3\end{smallmatrix}\right.$, $\left|\begin{smallmatrix}3\\ \bar{3}\end{smallmatrix}\right.$, $\left|\begin{smallmatrix}\bar{2}\\ 2\end{smallmatrix}\right.$ und $\left|\begin{smallmatrix}2\\ \bar{2}\end{smallmatrix}\right.$. Zusammen mit den Voraussetzungen am Anfang, nämlich $\left|\begin{smallmatrix}\bar{1}\\ 1\end{smallmatrix}\right.$ und $\left|\begin{smallmatrix}\bar{2}\\ 2\\ \bar{2}\end{smallmatrix}\right.$ nicht im Graphen enthalten, wissen wir dann, daß $\left|\begin{smallmatrix}2\\ 3\\ 2\end{smallmatrix}\right.$ ein Teilgraph sein muß. Damit gilt nach dem Lemma 6.8.4: $\mathrm{P}_1 \subseteq f(\mathrm{NP}^2)$. Die weiteren Fälle liefern uns also nur Partitionsklassen, die P_1 enthalten.

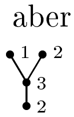
Fall 5: $\left|\begin{smallmatrix}1\\ 3\\ 2\end{smallmatrix}\right.$ kommt nicht im Graphen vor. Wir benennen jetzt verschiedene Mengen, und zwar bezeichnen wir die NP-Menge, die alle 1-Mengen umfaßt, mit A, die NP-Menge, die alle 2-Mengen aus den Teilgraphen $\left|\begin{smallmatrix}2\\ 3\end{smallmatrix}\right.$ umfaßt, mit B, und die NP-Menge, die durch Vereinigung aller 3-Mengen entsteht mit C. Dann gilt, wie man leicht sieht, daß $A \cap C = \emptyset$, denn keine 3-Menge darf nach Voraussetzung eine 1-Menge enthalten. Außerdem gilt $B \subseteq C$, denn diese 2-Mengen sind nach Voraussetzung alle in 3-Mengen enthalten. Dann können wir jede Partition aus $f(\mathrm{NP}^2)$ umschreiben als $(A, B \cup \overline{(A \cup C)}, C \cap \overline{B})$, denn A umfaßt alle 1-Mengen, C umfaßt alle 3-Mengen. Da in C aber noch 2-Mengen enthalten sind, nämlich genau B, müssen wir diese Menge noch abziehen. Als letztes gilt für die zweite Komponente, daß wir hier natürlich B hinzunehmen müssen, da B nur 2-Mengen umfaßt. Außerdem brauchen wir noch $\overline{(A \cup C)}$ für die 2-Mengen, die bisher nicht betrachtet wurden. Diese Partition liegt in P_1. Es gilt also $f(\mathrm{NP}^2) = \mathrm{P}_1$.

In den folgenden Fällen gibt es nun also einen Teilgraphen $\left|\begin{smallmatrix}1\\ 3\\ 2\end{smallmatrix}\right.$. Zusammen mit dem Teilgraphen $\left|\begin{smallmatrix}2\\ 3\\ 2\end{smallmatrix}\right.$, der ebenfalls vorkommen muß, gilt dann  ist Teilgraph, und damit nach Lemma 6.8.3 auch $\mathrm{P}_2 \subseteq f(\mathrm{NP}^2)$.

Fall 6: Wir verbieten die Teilgraphen  und . Auch hier wollen wir wieder Mengen einführen, die beliebige Partitionen aus $f(\mathrm{NP}^2)$ so umschreiben lassen, daß man leicht sehen kann, daß sie in P_2 liegen. Wir definieren uns also A als Vereinigung aller 1-Mengen, dann ist A wieder eine NP-Menge. Mit B bezeichnen wir wie gehabt alle 2-Mengen, die in 3-Mengen enthalten sind, also die Mengen aus den Teilgraphen . Die 3-Mengen können wir jetzt aufgrund der obigen Bedingungen aufteilen in zwei disjunkte NP-Mengen C und D, wobei C die Vereinigung aller 3-Mengen darstellt, die eine 1-Menge enthalten, vereinigt mit A, und D die Vereinigung aller 3-Mengen darstellt, die eine 2-Menge enthalten. Die 3-Mengen der obersten Ebene können wir bei genau einer der Mengen C oder D dazupacken. Dann laßt sich jede Partition aus $f(\mathrm{NP}^2)$ auch schreiben als $(A, B \cup \overline{(C \cup D)}, (C \cup D) \cap \overline{(A \cup B)})$, denn A ist die Vereinigung aller 1-Mengen, die 2 setzt sich zusammen aus B und dem Komplement aller 1- und 3-Mengen. Da A nach Konstruktion in C enthalten ist, ist die Vereinigung der 1- und 3-Mengen gerade $C \cup D$. Von $C \cup D$ müssen wir in der dritten Komponente noch die enthaltenen 1- und 2-Mengen abziehen, also $A \cup B$. Damit gilt also $f(\mathrm{NP}^2) \subseteq \mathrm{P}_2$.

In den folgenden Fällen sollen jetzt sowohl , als auch  und  vorkommen. Dann gilt aber sofort, daß  ein Teilgraph des Funktionsgraphen sein muß, und nach Lemma 6.8 gilt damit $\mathrm{P}_3 \subseteq f(\mathrm{NP}^2)$.

Fall 7: Es sei nun der Graph  kein Teilgraph des Funktionsgraphen von f. Dann gilt bei der gleichen Beschreibung der Mengen wie im Fall vorher lediglich die Bedingung $C \cap D = \emptyset$ nicht mehr, da die Schnittmenge dieser beiden Mengen jetzt eine 3-Menge sein darf. Wir erhalten dann also $f(\mathrm{NP}^2) \subseteq \mathrm{P}_3$.

Es gibt zwar noch viele weitere Möglichkeiten, Teile von Funktionsgraphen auszuschließen. Diese haben aber alle eine gemeinsame Eigenschaft: Sie schließen nicht aus, daß der Teilgraph  im Graphen vorkommt. Sobald dies aber geschieht, ist nach Lemma 6.8.1 aber schon $f(\mathrm{NP}^2) = (\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$. □

Wir wissen bereits die Inklusionen $\mathrm{P}_1 \subseteq \mathrm{P}_2 \subseteq \mathrm{P}_3 \subseteq (\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$. Um auch die anderen Klassen noch zueinander in Relation zu setzen, formulieren wir den folgenden Satz:

Satz 6.10 *1.* $(\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP}) \subseteq (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$

2. $(\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP}) \subseteq \mathrm{P}_1$

3. $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot) \subseteq \mathrm{P}_2$

4. $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot) \subseteq (\mathrm{NP}, \mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \odot)$

Beweis.

zu 1. Es gilt, daß $(\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP}) = (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \mathrm{NP})$. Aus der Definition der Partitionsklassen folgt sofort, daß diese Klasse eine Teilmenge von $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}) = (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$ ist.

zu 2. Sei $(A, \overline{A \cup C}, C)$ eine beliebige Partition aus $(\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP})$. Also $A, C \in \mathrm{NP}$ und $A \cap C = \emptyset$. Dann ist diese Partition für $B =_{\text{def}} \emptyset$ gleich der Partition $(A, B \cup \overline{(A \cup C)}, C \cap \overline{B})$, und es gilt $A, B, C \in \mathrm{NP}$, $A \cap C = \emptyset$ und $B \subseteq C$. Damit ist diese Partition aus P_1.

zu 3. Sei $(A, \overline{C}, C \cap \overline{A})$ eine beliebige Partition aus $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$. Dann gilt also $A, C \in \mathrm{NP}$ und $A \subseteq C$. Für $B = D =_{\text{def}} \emptyset$ ist diese Partition gleich der Partition $(A, B \cup \overline{(C \cup D)}, (C \cup D) \cap \overline{(A \cup B)})$, und es gilt $A, B, C, D \in \mathrm{NP}$, $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ und $C \cap D = \emptyset$. Das heißt die Partition ist in P_2.

zu 4. Wie bei 1. leicht abzulesen aus der Definition der Klassen.

□

Unter der Voraussetzung, daß die Boolesche Hierarchie nicht zusammenbricht, vor allem, daß $\mathrm{NP} \neq \text{co-NP}$, läßt sich für einige Inklusionen die Echtheit zeigen, und die Unvergleichbarkeit von P_1 und $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$. Wir können also für Klassen zeigen, daß aus $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$ schon $\mathrm{NP} = \text{co-NP}$ folgt, und deshalb diese Inklusion falsch sein muß.

Satz 6.11 *1.* $(\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP}) \supseteq (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot) \Rightarrow \mathrm{NP} = \text{co-NP}$

2. $(\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP}) \supseteq \mathrm{P}_1 \Rightarrow \mathrm{NP} = \text{co-NP}$

3. $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot) \supseteq \mathrm{P}_1 \Rightarrow \mathrm{NP} = \text{co-NP}$

4. $\mathrm{P}_1 \supseteq (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot) \Rightarrow \mathrm{NP} = \text{co-NP}$

5. $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot) \supseteq \mathrm{P}_2 \Rightarrow \mathrm{NP} = \text{co-NP}$

6. $\mathrm{P}_1 \supseteq \mathrm{P}_2 \Rightarrow \mathrm{NP} = \text{co-NP}$

7. $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot) \supseteq (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot) \Rightarrow \mathrm{NP} = \text{co-NP}$

Beweis.

zu 1. Sei $B \cap \overline{A}$ eine beliebige Menge aus $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}$ mit $A, B \in \mathrm{NP}$ und $A \subseteq B$ (siehe Lemma 3.7). Dann ist $(A, \overline{B}, B \cap \overline{A})$ eine Partition aus $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$, und die Partition liegt ebenfalls in $(\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP})$. Es gibt also ein $C \in \mathrm{NP}$ mit $C = B \cap \overline{A}$, also $B \cap \overline{A} \in \mathrm{NP}$. Daraus folgt unmittelbar $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP} = \mathrm{NP}$, und damit $\mathrm{NP} = \mathrm{P}^{\mathrm{NP}}[1]$. Folglich gilt $\mathrm{NP} = \text{co-NP}$.

zu 2. Sei $C \cap \overline{B}$ eine beliebige Menge aus $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}$ mit $B, C \in \mathrm{NP}$ und $B \subseteq C$. Dann ist $(A, B \cup \overline{(A \cup C)}, C \cap \overline{B}) \in \mathrm{P}_1$ für $A \in \mathrm{NP}, A \cap C = \emptyset$. Damit ist die Partition auch in $(\mathrm{NP}, \odot, \mathrm{NP})$. Es gibt also ein $D \in \mathrm{NP}$ mit $D = C \cap \overline{B}$, also $C \cap \overline{B} \in \mathrm{NP}$, und damit wie im vorigen Fall $\mathrm{NP} = \text{co-NP}$.

zu 3. Sei $B \cup \overline{C}$ eine beliebige Menge aus $\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}$ mit $B, C \in \mathrm{NP}$ und $B \subseteq C$ (siehe Lemma 3.7). Dann ist $(\emptyset, B \cup \overline{(\emptyset \cup C)}, C \cap \overline{B}) \in \mathrm{P}_1$. Damit ist die Partition auch in $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$. Es gibt also ein $D \in \text{co-NP}$ mit $D = B \cup \overline{C}$. Damit ist $B \cup \overline{C} \in \text{co-NP}$ und es folgt $\mathrm{NP} = \text{co-NP}$.

zu 4. Sei $B \cap \overline{A}$ eine beliebige Menge aus $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}$ mit $A, B \in \mathrm{NP}$ und $A \subseteq B$. Dann ist $(A, \overline{B}, B \cap \overline{A}) \in (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$ und damit auch in P_1. Es gibt also $B_1, C_1 \in \mathrm{NP}$ mit $B_1 \subseteq C_1, A \cap C_1 = \emptyset$ und $(A, \overline{B}, B \cap \overline{A}) = (A, B_1 \cup \overline{(A \cup C_1)}, C_1 \cap \overline{B_1})$. Daraus folgt dann

$$\begin{array}{rcll} B \cap C_1 & = & B \cap C_1 \cap \overline{A} & \text{da } A \cap C_1 = \emptyset \\ & = & B \cap \overline{A} & \text{da } B \cap \overline{A} = C_1 \cap \overline{B_1} \subseteq C_1 \end{array}$$

Es gilt also, da $B \cap C_1 \in \mathrm{NP}$, auch $B \cap \overline{A}$ und damit $\mathrm{NP} = \text{co-NP}$.

zu 5. Sei $B \cup \overline{D}$ eine beliebige Menge aus $\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}$ mit $B, D \in \mathrm{NP}$ und $B \subseteq D$. Dann ist die Partition $(\emptyset, B \cup \overline{(D \cup \emptyset)}, (D \cup \emptyset) \cap \overline{(\emptyset \cup B)}) \in \mathrm{P}_2$ und damit auch $\in (\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$. Dann gibt es ein $B_1 \in \mathrm{NP}$ mit $\overline{B_1} = B \cup \overline{D}$, also $B \cup \overline{D} \in \text{co-NP}$. Daraus folgt dann $\mathrm{NP} = \text{co-NP}$.

zu 6. Sei $C \cap \overline{A}$ eine beliebige Menge aus $\mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}$ mit $A, C \in \mathrm{NP}$ und $A \subseteq C$. Dann ist die Partition $(A, \emptyset \cup \overline{(C \cup \emptyset)}, (C \cup \emptyset) \cap \overline{(A \cup \emptyset)}) \in \mathrm{P}_2$ und damit auch $\in P_1$. Es gibt also ein $B_1, C_1 \in \mathrm{NP}$, so daß $(A, \overline{C}, C \cap \overline{A}) =$

$(A, B_1 \cup \overline{(A \cup C_1)}, C_1 \cap \overline{B_1})$ mit $B_1 \subseteq C_1$ und $A \cap C_1 = \emptyset$. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}
C \cap C_1 &= ((C \cap A) \cup (C \cap \overline{A})) \cap C_1 \\
&= (A \cup (C \cap \overline{A})) \cap C_1 && \text{da } A \subseteq C \\
&= (C \cap \overline{A}) \cap C_1 && \text{da } A \cap C_1 = \emptyset \\
&= C \cap \overline{A} && \text{da } C \cap \overline{A} = C_1 \cap B_1
\end{aligned}$$

Es gilt also, da $C \cap C_1 \in \mathrm{NP}$, auch $C \cap \overline{A} \in \mathrm{NP}$ und damit $\mathrm{NP} = \text{co-NP}$.

zu 7. Sei $\overline{B}$ eine beliebige Menge aus co-NP mit $B \in \mathrm{NP}$. Dann ist $(\emptyset, \overline{B}, B)$ eine Partition aus $(\mathrm{NP}, \text{co-NP}, \odot)$ und damit aus $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \odot)$. Das heißt es existiert eine Menge $B' \in \mathrm{NP}$ mit $B' = \overline{B}$. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage $\mathrm{NP} = \text{co-NP}$.

$\square$

Das Ergebnis unserer Untersuchungen wurde in der folgenden Abbildung graphisch aufbereitet:

Beispiele für die beiden verbleibenden oberen Schranken

Auch hier können wir wieder nur eine Komponente frei wählen. Die beiden verbleibenden Komponenten hängen dann stark von der Wahl der ersten ab. Um eine Vorstellung dieser Klassen zu erhalten, betrachten wir für beide obere Schranken je ein Beispiel.

Beispiel. 1. Sei $A = (A_1, A_2, \overline{A_1 \cup A_2})$, $B = (B_1, B_2, \overline{B_1 \cup B_2})$. Sei außerdem $f\colon \{1,2,3\}^2 \to \{1,2,3\}$ definiert durch:

x	y	$f(x,y)$	entspricht der Menge
1	1	3	$A_1 \cap B_1$
1	2	2	$A_1 \cap B_2$
1	3	2	$A_1 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$
2	1	2	$A_2 \cap B_1$
2	2	2	$A_2 \cap B_2$
2	3	3	$A_2 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$
3	1	2	$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap B_1$
3	2	2	$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap B_2$
3	3	1	$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$

Dann ist

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{NP}^2) &= \{(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2},\ B_2 \cup (B_1 \cap \overline{A_1}) \cup (A_1 \cap \overline{B_1}),\\
&\quad (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}))\colon\\
&\quad A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathrm{NP}, A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset\}\\
&\subseteq \{(\overline{X \cup Z},\ Z \cap \overline{Y},\ (X \cup Y) \cap \overline{(X \cap Z)})\colon X, Y, Z \in \mathrm{NP},\\
&\quad X \cap Y = \emptyset \text{ und } Y \subseteq Z\}\\
&\quad \text{mit } X := A_2, Y := A_1 \cap B_1, Z := A_1 \cup B_1 \cup B_2\\
&\subseteq (\text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP})
\end{aligned}$$

2. Sei $A = (A_1, A_2, \overline{A_1 \cup A_2})$, $B = (B_1, B_2, \overline{B_1 \cup B_2})$. Sei $f\colon \{1,2,3\}^2 \to \{1,2,3\}$ definiert durch:

x	y	$f(x,y)$	entspricht der Menge
1	1	3	$A_1 \cap B_1$
1	2	1	$A_1 \cap B_2$
1	3	3	$A_1 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$
2	1	1	$A_2 \cap B_1$
2	2	2	$A_2 \cap B_2$
2	3	2	$A_2 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$
3	1	3	$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap B_1$
3	2	2	$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap B_2$
3	3	1	$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$

Dann ist

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{NP}^2) &= \{((A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}),\\
&\quad\; (A_2 \cap \overline{B_1}) \cup (\overline{(A_1 \cup A_2)} \cap B_2),\ (A_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{(A_1 \cup A_2)} \cap B_1)) \colon\\
&\quad\; A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathrm{NP} \text{ und } A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset\}\\
&\subseteq \{(\overline{(X \cup Y)} \cup (X \cap Y), X \cap \overline{Y}, Y \cap \overline{X}) \colon X, Y \in \mathrm{NP}\}\\
&\quad \text{mit } X := A_2 \cup B_2 \text{ und } Y := A_1 \cup B_1\\
&\subseteq (\mathrm{NP} \vee \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP}, \mathrm{NP} \wedge \text{co-NP})
\end{aligned}$$

Bei der zweiten Relation gilt sogar die Gleichheit, denn sei $A = (Y, \emptyset, \overline{Y})$, $B = (\emptyset, X, \overline{X})$. Dann gilt $f(A, B) = (\overline{(X \cup Y)} \cup (X \cap Y), X \cap \overline{Y}, Y \cap \overline{X})$.

7

Zusammenfassung und Ausblicke

Im zweiten Kapitel wurde die Boolesche Hierarchie definiert und einige Eigenschaften wurden dargelegt. Der Schwerpunkt dieses Kapitels lag in der Erläuterung der „mind change"-Technik, die in [WW85] eingeführt wurde, mit deren Hilfe man die Klassen, die bei der Anwendung von Booleschen Funktionen auf NP entstehen, in die Boolesche Hierarchie einordnen kann. Diese Technik wurde auch in den weiteren Kapiteln oft verwendet.

Das dritte Kapitel untersuchte die in der „mind change"-Technik verwendeten Funktionsgraphen noch etwas genauer, um die für die weiteren Kapitel notwendigen Ergebnisse bereitzustellen. Außerdem wurde eine andere Betrachtungsweise dieser Funktionsgraphen bereitgestellt, welche die NP-Mengen mit einbezieht, die bei der Bestimmung der Klassen $f(\mathrm{NP})$ eine Rolle spielen. Mit Hilfe dieser Betrachtungsweise haben wir einen Algorithmus entwickelt, um vorgegebene Partitionen auf vorgegebenen Teilgraphen des Funktionsgraphen zu erzeugen.

Das vierte Kapitel diente zur Bereitstellung von Definitionen der k-Partition und der Klassen von Partitionen, von denen die Punktklassen einen Sonderfall bilden, der die Tatsache berücksichtigt, daß eine Komponente der Partition sich vollständig aus den anderen Komponenten ergibt. Außerdem wurde definiert, was unter der Anwendung von k-wertigen Funktionen auf Partitionsklassen zu verstehen ist. Schließlich wurde der Fall der k-wertigen Funktionen auf boolesche Funktionen zurückgeführt mit Hilfe einer speziell gewählten Kodierung. Es wurde gezeigt, wie sich die Ergebnisse der „mind change"-Technik auch auf k-wertige Funktionen fortsetzen lassen.

Im fünften und sechsten Kapitel wurden dann konkret Klassen von Partitionen betrachtet, die durch Anwendung von logischen Funktionen auf Partitionsklassen entstanden sind, und zwar für den Spezialfall der dreiwertigen Funktionen. Es wurden zwei Ansätze betrachtet. Im ersten Ansatz wurde, wie bei der Booleschen Hierarchie, NP als Grundklasse verwendet und betrachtet, welche Klassen bei Anwendung von dreiwertigen Funktionen entstehen. Der Fall der zweistelligen Funktionen ist vollständig behandelt worden, und bei den dreistelligen Funktionen wurden zunächst mit Hilfe der „mind change"-Technik fünf obere Schranken bestimmt, unter die man alle entstehenden Partitionen einordnen konnte. Danach wurden drei der oberen Schranken genauer untersucht, und alle Partitionsklassen beschrieben, die unter diesen oberen Schranken liegen und durch Anwendung von dreiwertigen Funktionen auf NP-Mengen entstanden sind. Für die beiden verbleibenden oberen Schranken wurden wegen der zunehmenden Schwierigkeit der Betrachtung nur Beispiele gezeigt.

Im zweiten Fall wurde dann bereits von einer Dreier-Partitionsklasse ausgegangen, deren Gestalt mit der von NP vergleichbar ist, nähmlich $(\mathrm{NP}, \mathrm{NP}, \text{co-NP})$. Es wurde festgestellt, daß alle Klassen, die bei der Anwendung durch dreiwertige zweistellige Funktionen aus dieser Grundklasse entstehen, sich unter fünf verschiedene obere Schranken einordnen lassen, die allerdings nicht mit denen aus dem vorigen Kapitel übereinstimmen. Auch hier wurden wieder für die drei kleineren oberen Schranken die darunterliegenden Partitionsklassen genau bestimmt und ihrer Größe nach geordnet. Für die beiden verbleibenden oberen Schranken wurden Beispiele gebracht, die einen Einblick in die möglichen Partitionsklassen geben sollen.

In dieser Arbeit wurde ein Einstieg in die Betrachtung von Klassen von Partitionen gemacht. Wie wir gesehen haben, ist es für Klassen von Dreier-Partitionen, die durch Anwendung von dreiwertigen Funktionen entstanden sind, nicht möglich, einfache Strukturen wie die Boolesche Hierarchie zu definieren, da die Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Sprachen in den Partitionen einer Klasse von komplexer Natur sein können, während bei Zweier-Partitionen die zweite Komponente immer das Komplement der ersten sein muß. Es ist leicht einzusehen, daß dieses Problem bei größeren Partitionen eher noch komplexer wird. Außerdem macht es das Fehlen einer „einfachen" Normalform sehr schwer, die Untersuchung auf nur wenige Funktionen zu beschränken, wie $\wedge, \vee, \text{co-}$ im Falle der Booleschen Hierarchie. Wählt man andere Grundklassen als NP, bzw. Partitionsklassen, bei denen alle Komponenten aus NP sind bis auf eine aus co-NP, so muß die Anwendbarkeit der Technik aus dem zweiten Kapitel überprüft werden, um ähnliche Ergebnisse zu erhalten.

Literaturverzeichnis

[CGH+88] Jin-Yi Cai, Thomas Gundermann, Juris Hartmanis, Lane A. Hemachandra, Vivian Sewelson, Klaus Wagner, and Gerd Wechsung. The boolean hierarchy I: Structural properties. *SIAM Journal on Computing*, 17(6):1232 – 1252, December 1988.

[CGH+89] Jin-Yi Cai, Thomas Gundermann, Juris Hartmanis, Lane A. Hemachandra, Vivian Sewelson, Klaus Wagner, and Gerd Wechsung. The boolean hierarchy II: Applications. *SIAM Journal on Computing*, 18(1):95 – 111, February 1989.

[KSW87] Johannes Köbler, Uwe Schöning, and Klaus W. Wagner. The difference and thruth-table hierarchies for NP. *Informatique théorique et Applications*, 21(4):419 – 435, 1987.

[Wag90] Klaus W. Wagner. Bounded query classes. *SIAM Journal on Computing*, 1990(19):833 – 846, October 1990.

[WW85] Klaus W. Wagner and Gerd Wechsung. On the boolean closure of NP. Extended abstract as: Gerd Wechsung. On the boolean closure of NP. *Proc. of FCT Conf. 1985, Lecture Notes in Computer Science*, 199:485–493, 1985.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich diese Arbeit eigenständig verfaßt und keine anderen Hilfsmittel als die hier angegebenen verwendet habe.

Würzburg, den 21. Februar 1996 Katja Jucht